Ένας καλλιεργητής έχει ένα ζευγάρι λαγών σε μια κλειστή φάρμα. Πόσα ζευγάρια λαγών μπορούν να προκύψουν, αν κάθε μήνα, κάθε ζευγάρι δημιουργεί ένα νέο ζευγάρι, το οποίο από το δεύτερο μήνα γίνεται έτοιμο να αναπαραχθεί;"

Η απάντηση: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Λεονάρντο της Πίζας ή Fibonacci (1170-1240)

ΑΛΓΕΒΡΑ και πιθανότητες

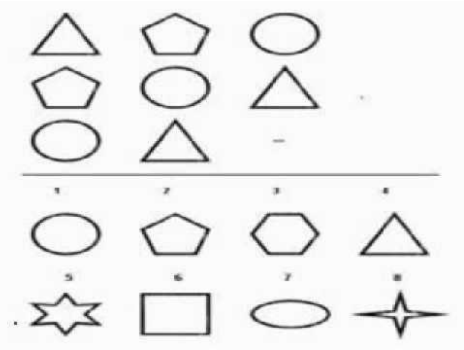
Μαθηματικά Α΄Λυκείου

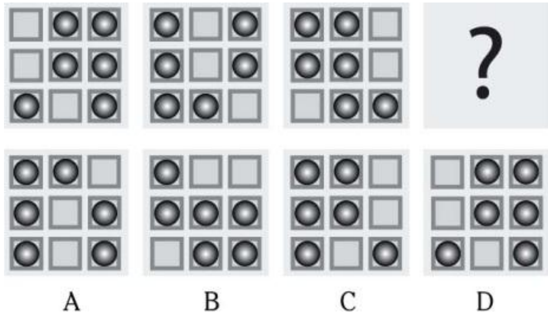
Φροντιστήρια Μ.Ε. ''ΠΑΙΔΕΙΑ''

θεωρία-παρατηρήσεις-ασκήσεις

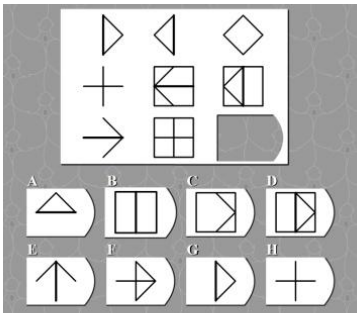
Παναγιώτης Χρ.Χρήστου
Φάνης Γρ.Γκανάς
Θεολόγος Κ.Ζαχαράκης

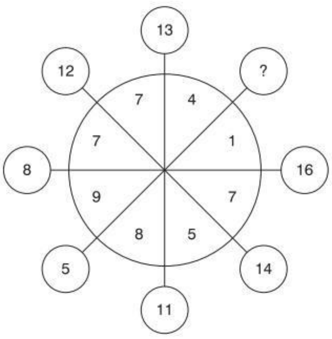
2014-2015

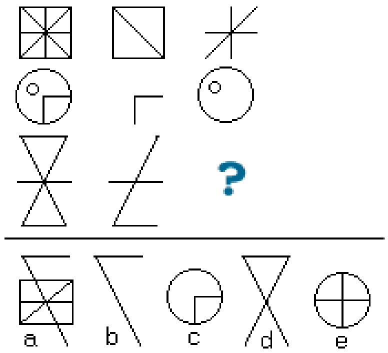




3	12	8
7	28	24
5	20	?







ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

- Η συνεπαγωγή $(\Rightarrow)$

Εχω δυο λογικές προτάσεις.

P: Έξω βρέχει.

Q: Ο ουρανός έχει σύννεφα.

Το σύμβολο της συνεπαγωγής το χρησιμοποιώ στην περίπτωση κατα την οποία αν ισχύει μια απο αυτές τις λογικές προτάσεις τότε μπορώ να βγάλω το ασφαλές συμπέρασμα οτι ισχύει και η άλλη.

π.χ αν έξω βρέχει τότε γνωρίζω οτι ο ουρανός έχει σύννεφα.

(και με τη βοήθεια των συμβόλων)

αν έξω βρέχει $\Rightarrow$ ο ουρανός έχει σύννεφα.

Δηλαδή $P \Rightarrow Q$.

<u>Προσοχη!!!</u>

Το αντίστοφο όμως μπορώ να είμαι σίγουρος οτι ισχύει;

Δηλαδή αν ο ουρανός έχει σύννεφα μπορώ να βγάλω το ασφαλές συμπερασμα οτι βρέχει;

Άρα αν ο ουρανός έχει σύννεφα δεν συνεπάγεται οτι βρέχει.

(να το κάνουμε λίγο πιο μαθηματικό τώρα)

Αν έχω δυο ισχυρισμούς:

P το όνομα του πρώτου και μου λέει οτι P: $a = \beta$

Q το όνομα του δεύτερου και μου λέει οτι Q: $\alpha^2 = \beta^2$

Γνωρίζουμε οτι αν $a = \beta$ τότε $\alpha^2 = \beta^2$.

Δηλαδά: αν $a = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$.$(\mathrm{P} \Rightarrow Q)$

(ελέξτε αν ισχύει το αντίστροφο δηλαδή αν ισχυει $Q \Rightarrow P$)

- Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή $(\Leftrightarrow)$

  αν $a=\beta \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$

  και αν $\alpha+\gamma=\beta+\gamma \Rightarrow \alpha=\beta$

  Άρα τελικά αν $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$

  λέμε οτι οι δυο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

  ή $\alpha=\beta$ αν και μόνο αν $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$.

- Ο σύνδεσμος '' ή ''

  Αν έχω δυο ισχυρισμούς P , Q τότε η έκφραση P ή Q είναι ένας νέος ισχυρισμός που αληθεύει μόνο στην περίπτωση που ένας τουλάχιστον απο τους δυο ισχυρισμούς αληθεύει.

  π.χ η εξίσωση $\left(x^2-x\right)\cdot\left(x^2-1\right)=0$ αληθεύει αν και μόνο αν $x^2-x=0$ ή $x^2-1=0$

  Ο ισχυρισμός P ή Q λέγεται και **διάζευξη** των P , Q.

- Ο σύνδεσμος ''και''

  Αν P , Q είναι δυο ισχυρισμοί τότε ο ισχυρισμός P και Q αληθεύει αν και μόνο αν και οι δυο ισχυρισμοί αληθεύουν.

  π.χ $x(x-1)\neq 0$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία $x\neq 0$ και $x-1\neq 0$.

ΣΥΝΟΛΑ

Κάθε συλλογή αντικειμένων τα οποία είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα απο το άλλο.

(καλά ορισμένο θα πεί να μην υπάρχουν αμφιβολίες ως προς ποια είναι τα στοιχεία ενός συνόλου.Παράδειγμα δεν μπορώ να μιλήσω για το σύνολο των μεγάλων ανδρών των Τρικάλων , ενώ μπορώ να μιλήσω για το σύνολο των ανδρών των Τρικάλων που είναι πάνω απο 70 ετών.)

Τα αντικείμενα απο τα οποία αποτελείται ενα σύνολο ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

Ένα σύνολο το ονομάζω με ένα κεφαλαίο γράμμα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου ενω τα στοιχεία του συνόλου τα συμβολίζω με μικρά γράμματα.

Τα σύνολα που έχουμε δει μέχρι στιγμής στη μαθηματική μας ζωή είναι τα εξής:

$\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών (το 0,το 1,το 2,...)

$\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών (οι φυσικοί με την προσθήκη προσήμων)

$\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών (όλοι οι αριθμοί που μπορούν να πάρουν τη μορφή κλάσματος με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιο και

παρονομαστή διάφορο του μηδενός)

$\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών (όλοι οι γνωστοί μου αριθμοί)

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$.

Όταν ένα x είναι στοιχείο ενος συνόλου Α το συμβολίζω: $x \in A$

Αντίστοιχα όταν το x δεν είναι στοιχείο του Α τότε: $x \notin A$

Έτσι για παράδειγμα:

$\frac{3}{5}\notin\mathbb{N}$, $\frac{3}{5}\in\mathbb{Q}$, $-2\in\mathbb{Z}$, $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$

Με ποιούς τρόπους παριστάνω ένα σύνολο;

Όταν γνωρίζω όλα τα στοιχεία του συνόλου και είναι λίγα τότε:
$A=\{2,4,6\}$ δηλαδή μέσα σε άγκιστρα και χωρισμένα με κόμμα.

Αλλά αν το σύνολό μου έχει πολλά στοιχεία:

$$B=\{1,2,3,...,100\} \text{ ή } \Gamma=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\right\} \text{ ή } \Delta=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$$

Όλοι αυτοί οι τρόποι είναι η παράσταση ενός συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του.

Μπορώ όμως να παραστήσω ενα σύνολο και με

περιγραφή των στοιχείων του.

$\mathrm{A}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>0\}$ δηλαδή εκείνα τα x που ανήκουν στους πραγματικούς αριθμούς τα οποία όμως έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί.

Δηλαδή δηλώνω σε ποιό σύνολο ανήκουν τα στοιχεία μου και στη συνέχεια δηλώνω την ιδιότητα την οποία ικανοποιούν.

Πότε δυο σύνολα λέγονται ίσα;

Δυο σύνολα λέγονται ίσα όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Δηλαδή δυο σύνολα Α, Β λέγονται ίσα αν για κάθε $x\in A \Leftrightarrow x\in B$.
Τότε $A=B$.

Πότε ενα σύνολο Α λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου Β;

Όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Δηλαδή για κάθε $x \in A \Rightarrow x \in B$.Τότε συμβολίζω $A \subseteq B$.

Συνέπειες του ορισμού:

α) $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A

β) Αν $A \subseteq B$ και $\mathrm{B} \subseteq \Gamma$ τότε .

γ) Αν $A \subseteq B$ και $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ τότε $A = B$.

Το κενό σύνολο

Το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.Συμβολισμός $\mathrm{A} = \varnothing$.

Παράδειγμα $\mathrm{A} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\right\}$.

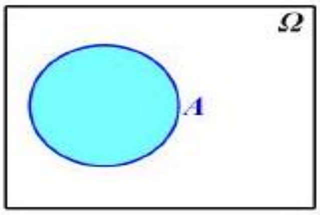
Παρατήρηση: Δεχόμαστε οτι το κενό είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

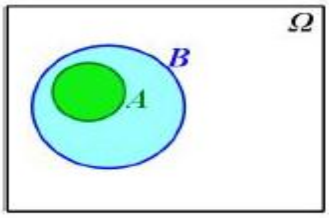
Διαγράμματα Venn.

Ένας καλός τρόπος για να ′′δώ′′ τα σύνολα και να καταλάβω καλύτερα τις πράξεις τους που θα ορίσουμε στη συνέχεια είναι τα διαγράμματα Venn.

Κάθε φορά που ασχολούμε με κάποιο σύνολο το θεωρώ σαν υποσύνολο ενός μεγαλύτερου συνόλου

π.χ όταν ασχολούμε με το $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ τα θεωρώ υποσύνολα του $\mathbb{R}$ το οποίο κάθε φορά το ονομάζω βασικό σύνολο και το ονομάζω Ω, δηλαδή $\Omega = \mathbb{R}$ και το συμβολίζω με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου.Μέσα στο ορθογώνιο μπαίνουν όλα τα υπόλοιπα υποσύνολα με τα οποία ασχολούμε και συμβολίζονται με μια κλειστή καμπύλη μέσα στο ορθογώνιο.Στην περίπτωση που το ένα είναι υποσύνολο του άλλου(όπως στο δικό μας παράδειγμα) τότε οι καμπύλες βρίσκονται η μια μέσα στην άλλη.Δηλαδή:





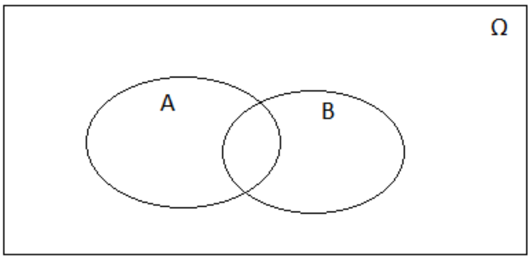
ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΟΛΑ

Για να μιλήσουμε για τις πράξεις με τα σύνολα θα χρησιμοποιήσουμε ενα παράδειγμα.

Θεωρώ σαν σύνολο Ω το $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ και τα υποσύνολά του $A=\{1,2,3,5,6,7\}$ και $B=\{3,4,5,8,9,10\}$.

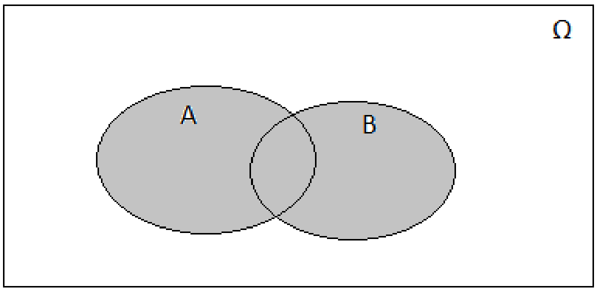
Είναι $A\subseteq\Omega$ και $B\subseteq\Omega$.

Για αρχή θα φτιάξω ενα διάγραμμα Venn για αυτά τα 3 σύνολα.



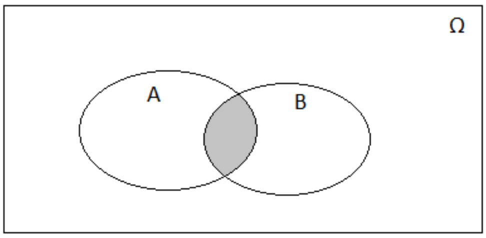
Οι πρώτες παρατηρήσεις που μπορώ να κάνω είναι οτι τα σύνολά μου Α και Β βρίσκονται και τα δυο μέσα στο βασικό μου σύνολο Ω αφου και το Α και το Β είναι υποσύνολά του.Επίσης βλέπω οτι το Α και το Β έχουν κοινό κομμάτι.Αυτό δεν συμβαίνει πάντα αλλά στο δικό μας παράδειγμα παρατηρώ οτι το Α και το Β έχουν κοινά στοιχεία και γιαυτο υπάρχει ενα κοινό κομμάτι.Για να πάμε τώρα στις πράξεις μεταξύ συνόλων:

1. **Ένωση** δυο συνόλων Α και Β είναι το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν σε ενα τουλάχιστον απο τα Α ,Β. Συμβολίζεται με $A \cup B$ και με μαθηματικά σύμβολα μπορώ να το γράψω ως εξής: $A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$. Η ένωση δυο συνόλων με τη χρήση του διαγράμματος Venn φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι όλο το γκρί κομμάτι.Στο παράδειγμά μας είναι:



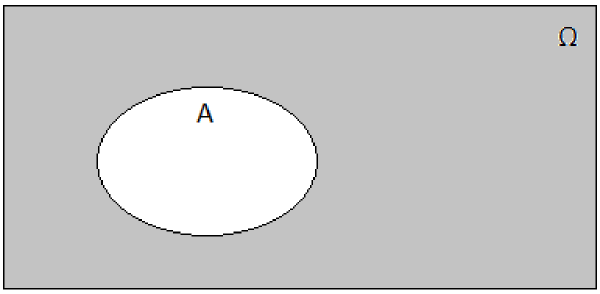
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = \Omega$

2. **Τομή** δυο συνόλων Α και Β είναι το σύνολο των στοιχείν του Ω που ανήκουν ταυτόχρονα και στο Α και στο Β.Είναι δηλαδή τα κοινά στοιχεία του Α και του Β.Συμβολίζεται με $A \cap B$ και με μαθηματικά σύμβολα μπορώ να το γράψω ως εξής: $A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$.Η τομή δυο συνόλων με τη χρήση του διαγράμματος Venn φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι το γκρί κομμάτι.Στο παράδειγμά μαε είναι $A \cap B = \{3,5\}$.Στην περίπτωση που τα δυο σύνολα δεν έχουν κοινά στοιχεία είναι $A \cap B = \varnothing$



3. **Συμπλήρωμα του Α** το σύνολο των στοιχείν του Ω που δεν περιέχονται στο Α. Συμβολίζεται με A' και με μαθηματικά σύμβολα μπορώ να το γράψω ως εξής: $A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$.

Το συμπληρωματικό ενός συνόλου με τη χρήση του διαγράμματος Venn φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι το γκρί κομμάτι (δηλαδή όλο το Ω χωρίς το Α).Στο παράδειγμά μας είναι $A' = \{4,8,9,10\}$.



<u>ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ</u>

Ένα πείραμα λέγεται **αιτιοκρατικό** όταν η γνώση των συνθηκών κάτω απο τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα.

Σαυτό το κεφάλαιο δεν θα ασχοληθούμε με αιτιοκρατικά πειράματα αλλά με πειράματα τύχης δηλαδή με πειράματα στα οποία δεν μπορώ εκ των προτέρων να προβλέψω το αποτέλεσμα παρά το οτι επαναλαμβάνονται κάτω απο τις ίδιες συνθήκες.

<u>Παραδείγματα πειραμάτων τύχης:</u>

Ρίχνω ενα νόμισμα και καταγράφω την άνω όψη του.

Ρίχνω ενα ζάρι και καταγράφω τον αριθμό της άνω έδρας του.

Δειγματικός χώρος

Για να μελετήσω ενα πειράμα τύχης το πρώτο πράγμα που με ενδιαφέρει είναι όλα τα πιθανά αποτελέσματα του πειράματός μου.

<u>Το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων</u> ενός πειράματος τύχης ονομάζεται δειγματικός χώρος του πειράματος και το <u>συμβολίζουμε με Ω.</u>

<u>Παράδειγμα</u>

Όταν ρίχνω ένα ζάρι μια φορά και καταγράφω τον αριθμό που θα φέρει η άνω έδρα του τα πιθανά αποτελέσματα που μπορεί να φέρει είναι 1,2,3,4,5,6. Το σύνολο όλων αυτών των πιθανών αποτελεσμάτων είναι ο δειγματικός μου χώρος.

Δηλαδή $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Ενδεχόμενα

Στη συνέχεια το επόμενο με το οποίο πρέπει να ασχοληθώ είναι τα ενδεχόμενά μου.

Κάθε σύνολο που περιέχει κάποια απο τα στοιχεία του δειγματικού χώρου ονομάζεται ενδεχόμενο του πειράματος τύχης.

Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα ένα ενδεχόμενο μπορεί να είναι να φέρω άρτιο αποτέλεσμα στη ρίψη του ζαριού.Έτσι ονομάζοντας Α το ενδεχόμενό μου έχω: $A=\{2,4,6\}$ ή Β το ενδεχόμενο να φέρω αποτέλεσμα 6 .Τότε $B=\{6\}$.

Παρατηρήστε οτι όλα τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου.

Όταν το ενδεχόμενο περιέχει ενα μόνο στοιχείο λέγεται **απλό** ενώ αν ενα ενδεχόμενο περιέχει περισσότερα απο ένα στοιχεία λέγεται **σύνθετο**.Απο τα προηγούμενα ενδεχόμενα το Α είναι σύνθετο ενω το Β είναι απλό.

Όταν σε ενα πείραμα τύχης σε μια συγκεκριμένη εκτελεσή του το αποτέλεσμα είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου τότε λέμε οτι το ενδεχόμενο πραγματοποιείται.Έτσι για παράδειγμα αν ρίξω το προηγούμενο ζάρι και φέρω 4 τότε έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α. (ενω ΔΕΝ έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Β)

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι και αυτός ενδεχόμενο που ονομάζεται βέβαιο ενδεχόμενο και πραγματοποιείται πάντα.Το $\varnothing$ το θεωρώ και αυτό ενδεχόμενο και είναι το αδύνατο ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται ποτέ.

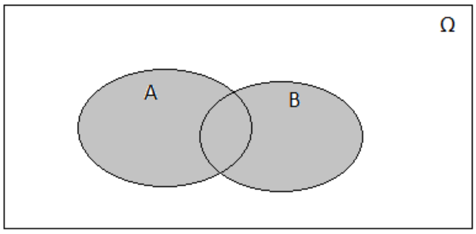
Πληθικός αριθμός είναι το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου.Συμβολίζεται με Ν(ενδεχομένου). Παράδειγμα Ν(Α),Ν(Β) κ.τ.λ

Πράξεις με ενδεχόμενα

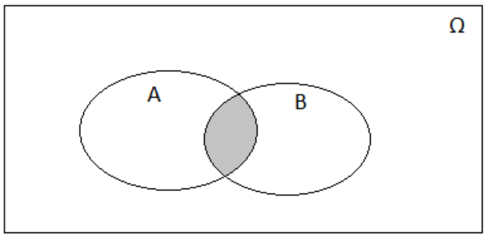
Οι τρεις πρώτες πράξεις που θα δούμε είναι οι πράξεις που ορίσαμε (στο εισαγωγικό κεφάλαιο) στα σύνολα.

Έστω οτι έχω δυο ενδεχόμενα Α και Β υποσύνολα ενός δειγματικού χώρου Ω.Τότε ορίζουμε

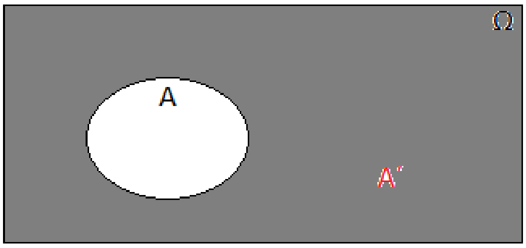
- **Ένωση** το ενδεχόμενο $A \cup B$ που περιέχει τα στοιχεία του Α και του Β και πραγματοποιείται αν πραγματοποιείται ενα απο τα Α ή Β.



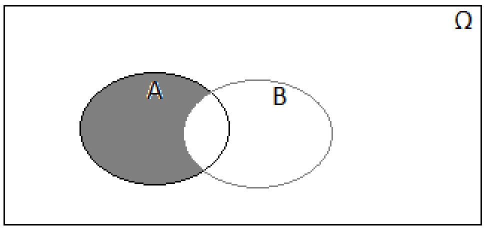
- **Τομή** το ενδεχόμενο $A \cap B$ που περιέχει τα κοινά στοιχεία του Α και του Β και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα και το Α και το Β.



- **Συμπληρωματικό** ενός συνόλου π.χ του Α το ενδεχόμενο Α΄ που περιέχει τα στοιχεία που δεν περιέχονται στο Α και πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.



- **Αφαίρεση** δυο ενδεχομένων π.χ Α−Β το ενδεχόμενο που περιέχει εκείνα τα στοιχεία του Α χωρίς τα κοινά του στοιχεία με το Β.Είναι $A - B = A \cap B'$.



Για να δούμε τώρα πως μιλάμε στη γλώσσα των συνόλων.Έστω οτι έχω ενα πείραμα τύχης (παράδειγμα με το ζάρι πρίν), Ω ο δειγματκός χώρος και Α,Β δυο ενδεχόμενα.Αν ω το αποτέλεσμα του πειράματος(δηλαδή στο παράδειγμα με το ζάρι ενα απο τα 1,2,3,4,5,6) τότε

αν το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται $\rightarrow \ \omega \in A$

αν το ενδεχόμενο Α δεν πραγματοποιείται $\rightarrow \ \omega \in A'$ ή $\omega \notin A$

αν ενα τουλάχιστον απο τα Α,Β πραγματοποιείται $\rightarrow \omega \in A \cup B$

αν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα και το Α και το Β $\rightarrow \omega \in A \cap B$

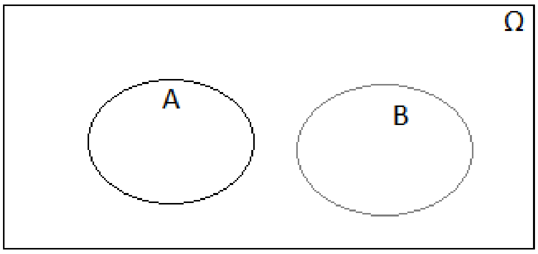
αν δεν πραγματοποιείται κανένα απο τα Α,Β $\rightarrow \omega \in (A \cup B)'$

αν πραγματοποιείται μόνο το Α (''καθαρό'' Α) $\rightarrow \omega \in (A - B)$ ή $\omega \in (A \cap B')$

αν η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β $\rightarrow A \subseteq B$

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Δυο ενδεχόμενα Α,Β ονομάζονται ασυμβίβαστα ή ξένα ή αμοιβαίως αποκλειώμενα αν $A \cap B = \varnothing$ δηλαδή αν ΔΕΝ έχουν κοινά στοιχεία.



Παράδειγμα στη ρίψη του ζαριού αν $A = \{1,2,3\}$ και $B=\{4,6\}$ τότε τα ενδεχόμενα Α,Β δεν έχουν κοινά στοιχεία είναι δηλαδή $A \cap B = \varnothing$.Άρα τα Α,Β είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

Παραδείγματα 1

Χρησιμοποιούμε δυο τρόπους για την εύρεση του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης.Ο πρώτος είναι **το δενδροδιάγραμμα** και ο δεύτερος ο **πίνακας διπλής εισόδου.**

Με δενδροδιάγραμμα

Ρίχνω ενα νόμισμα 3 διαδοχικές φορές και καταγράφω τα αποτελέσματα.

α) Βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος

β) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα

Α: " ο αριθμός των Γ υπερβαίνει τον αριθμό των Κ"

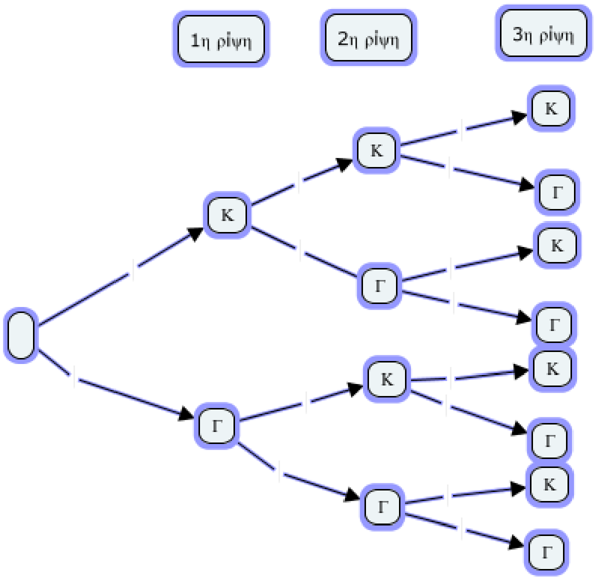
Β: " ο αριθμός των Κ είναι ακριβώς 1"

Γ: " ο αριθμός των Γ είναι τουλάχιστον 1"

γ) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A', $A \cap B$, $B \cup \Gamma$

ΛΥΣΗ

α) Αφού ρίχνω το νόμισμα 3 φόρες τα στοιχεία του δειγματικού χώρου θα είναι οι 3άδες των αποτελεσμάτων των ρίψεων.
Για να μπορέσω αυτές τις 3άδες να τις βρώ όλες (σκέψου να είχα 4άδες ή 5άδες) χρησιμοποιώ έναν πιο οργανωμένο τρόπο που ονομάζεται **δενδροδιάγραμμα**



Άρα ο δειγματικός μου χώρος Ω θα έχει για στοιχεία του τις 3άδες που δημιουργούνται απο τις 3 ρίψεις.Δηλαδή :

$$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$$

β) Α: " ο αριθμός των Γ υπερβαίνει τον αριθμό των Κ"

Για να βρώ τα στοιχεία του ενδεχομένου Α απο τα στοιχεία του Ω θα επιλέξω εκείνες τις 3άδες στις οποίες τα Γ είναι περισσότερα απο τα Κ. Δηλαδή είναι $Α=\{ΚΓΓ,ΓΚΓ,ΓΓΚ,ΓΓΓ\}$

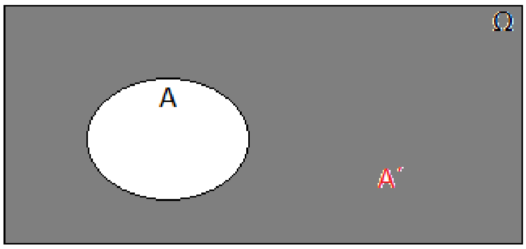
Β: " ο αριθμός των Κ είναι ακριβώς 1"

Με την ίδια λογική όπως πρίν τώρα θα επιλέξω εκείνες τις 3άδες του Ω στις οποίες το Κ εμφανίζεται ακριβώς μια φορά. Δηλαδή είναι $Β=\{ΚΓΓ,ΓΚΓ,ΓΓΚ\}$

Γ: " ο αριθμός των Γ είναι τουλάχιστον 1"

Τέλος για το Γ θα επιλέξω εκείνες τις 3άδες του Ω στις οποίες το Γ εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά δηλαδή θέλω το Γ να εμφανίζεται ή 1 ή 2 ή 3 φορές. Δηλαδή είναι
$Γ=\{ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΚΓΓ,ΓΚΚ,ΓΚΓ,ΓΓΚ,ΓΓΓ\}$

γ) Θέλω να βρώ το ενδεχόμενο Α΄, δηλαδή το συμπληρωματικό του Α , το οποίο θα περιέχει εκείνα τα στοιχεία (3άδες) του δειγματικού χώρου Ω που δεν περιέχονται στο Α. Είναι δηλαδή $Α'=\{ΚΚΚ,ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΓΚΚ\}$

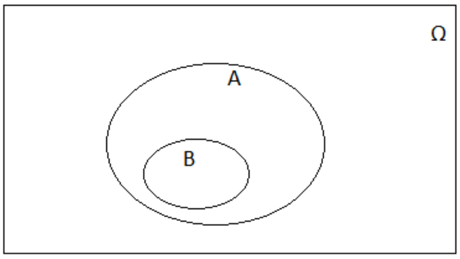


ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αφού το Α είναι το ενδεχόμενο στο οποίο ο αριθμός των Γ υπερβαίνει τον αριθμό των Κ (δηλαδή έχω φέρει περισσότερες φορές Γράμματα απο τις Κεφαλές) το συμπληρωματικό του δηλαδή το Α΄ θα είναι το ενδεχόμενο στο οποίο θα συμβαίνει το ανάποδο, δηλαδή ο αριθμός των Κ θα υπερβαίνει τον αριθμό των Γ.

$Α\cap Β$:Το ενδεχόμενο $Α\cap Β$ περιέχει τα κοινά στοιχεία των Α , Β δηλαδή τα στοιχεία που βρίσκονται **και στο Α και στο Β.**

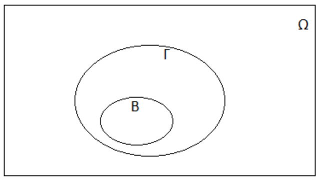
$$Α\cap Β=\{ΚΓΓ,ΓΚΓ,ΓΓΚ\}.$$

Αν δω τα στοιχεία του ενδεχομένου $B=\{K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K\}$ και τα στοιχεία του ενδεχομένου $A\cap B$ θα δώ οτι $B=A\cap B$. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι $B\subseteq A$ (αφού όλα τα στοιχεία του Β είναι και στοιχεία του Α).



Άρα όταν $B\subseteq A$ ***θα είναι*** $A\cap B=B$. *(Δηλαδή τα κοινά στοιχεία δυο συνόλων όταν το ένα είναι μέσα στο άλλο είναι το μικρότερο απο τα δυο σύνολα.)*

$B\cup\Gamma$:Είναι $B=\{K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K\}$ και $\Gamma=\{KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$.



Η ένωσή τους είναι το ενδεχόμενο που περιέχει τα στοιχεία και των δυο ενδεχομένων. Δηλαδή $B\cup\Gamma=\{KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$. Παρατηρήστε οτι είναι $B\cup\Gamma=\Gamma$.Αυτο συμβαίνει γιατί $B\subseteq\Gamma$.

Άρα αν είναι $B\subseteq\Gamma$ ***τότε είναι*** $B\cup\Gamma=\Gamma$.*(Δηλαδή όλα τα στοιχεία δυο συνόλων όταν το ένα είναι μέσα στο άλλο είναι το μεγαλύτερο απο τα δυο σύνολα).*

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Σε όλα τα πειράματα τύχης δεν μπορούμε με βεβαιότητα να πούμε ποιο θα είναι το αποτέλεσμα ή δεν μπορούμε με βεβαιότητα να ξέρουμε αν θα πραγματοποιηθεί κάποιο ενδεχόμενο Α.

Μπορούμε όμως σε κάθε ενδεχόμενο Α να αντιστοιχίσω κάποιον αριθμό που θα είναι το μέτρο της ''προσδοκίας'' με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του.Τον αριθμό αυτόν τον ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου Α και το συμβολίζουμε με $P(A)$.

Κλασσικός ορισμός πιθανότητας

Σε αυτήν την ενασχόλησή μας με τις πιθανότητες θα ασχοληθούμε μόνο με πειράματα τύχης στα οποία τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα (δηλαδή δεν έχω κάποιο λόγο να πιστεύω οτι κάποιο απο τα απλά ενδεχόμενα πραγματοποιείται πιο συχνά απο κάποιο άλλο)

Σε ενα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω και με ισοπίθανα αποτελέσματα **ορίζω ως πιθανότητα** του ενδεχομένου Α τον αριθμό $P(A)$ ο οποίος είναι ίσος με το κλάσμα $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$ δηλαδή

$$P(A)=\frac{\textit{πλήθος}\ \text{ευνοικών περιπτώσεων}}{\textit{πλήθος}\ \text{δυνατών περιπτώσεων}}=\frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N}(\Omega)}.$$

Απο τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι:

1. $\mathrm{P}(\Omega)=\dfrac{\mathrm{N}(\Omega)}{\mathrm{N}(\Omega)}=1$
2. $\mathrm{P}(\varnothing)=\dfrac{\mathrm{N}(\varnothing)}{\mathrm{N}(\Omega)}=\dfrac{0}{\mathrm{N}(\Omega)}=0$

3. Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq 1$ αφού το πλήθος των στοιχείων κάθε ενδεχομένου Α είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο με το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Παράδειγμα 2

Έστω το πείραμα τύχης στο οποίο ρίχνω ένα αμερόληπτο ζάρι μια φορά και με ενδιαφέρει ο αριθμός που θα έχει η άνω έδρα του.Έστω το ενδεχόμενο Α:"η άνω έδρα του να έχει άρτιο αριθμό" και το ενδεχόμενο Β:" η άνω έδρα του να έχει περιττό αριθμό". Βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων Α,Β.

Λύση

Πρώτη μου κίνηση είναι να βρώ το δειγματικό χώρο του πειράματος. Δηλαδή πρέπει να βρώ ποια στοιχεία περιέχει το σύνολο Ω όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος.

Αφού ρίχνω ένα ζάρι είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

(σε άλλες ασκήσεις η εύρεση του δειγματικού χώρου Ω θα είναι πιο σύνθετη και θα ακολουθώ μεθόδους για την εύρεσή του όπως το δενδροδιάγραμμα και ο πίνακας διπλής εισόδου που θα αναλυθούν σε άλλα παραδείγματα).

Στη συνέχεια πρέπει να βρώ εκείνα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που περιέχονται σε κάθε ενα απο τα ενδεχόμενά μου.

Αφού το ενδεχόμενο Α περιέχει τα άρτια πιθανά αποτελέσματα είναι $\mathrm{A} = \{2,4,6\}$

Αφού το ενδεχόμενο Β περιέχει τα περιττά πιθανά αποτελέσματα είναι $\mathrm{B} = \{1,3,5\}$.

Οπότε είναι: $P(A) = \dfrac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma \text{ στοιχείων του A}}{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma \text{ στοιχείων του } \Omega} = \dfrac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N}(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

και $$P(\mathrm{B}) = \frac{\textit{πλήθος} \text{ στοιχείων του B}}{\textit{πλήθος} \text{ στοιχείων του } \Omega} = \frac{\mathrm{N(B)}}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου ισχύουν οι παρακάτω κανόνες

- $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ (προσθετικός νόμος)
- στην περίπτωση που τα ενδεχόμενα είναι **ασυμβίβαστα** (επομένως είναι $\mathrm{A \cap B = \varnothing}$ οπότε $\mathrm{P(A \cap B) = 0}$) ο παραπάνω κανόνας γίνεται $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$
- $\mathrm{P(A') = 1 - P(A)}$
- Αν $\mathrm{A \subseteq B}$ τότε $\mathrm{P(A) \le P(B)}$ Το αντίστροφο **ΔΕΝ** ισχύει
- $\mathrm{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$

Παράδειγμα 3

Ρίχνω δυο αμερόληπτα ζάρια μια φορά και καταγράφω τους αριθμούς που αναγράφει η άνω έδρα τους.Βρείτε την πιθανότητα

α) να φέρω εξάρες.

β) να φέρω σαν αποτέλεσμα δυο διαδοχικούς αριθμούς

γ) το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δυο ζαριών να είναι άρτιος.

δ) το άθροισμα των αποτελεσμάτων να είναι άρτιος και το αποτέλεσμα του 1^{ου} ζαριού να είναι μεγαλύτερο απο το αποτέλεσμα του 2^{ου} ζαριού.

ΛΥΣΗ

Θα βρώ το δειγματικό χώρο με ***πίνακα διπλής εισόδου***

1ο \ 2ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ο δειγματικός χώρος αποτελείται απο όλες αυτές τις δυάδες του πίνακα διπλής εισόδου. Άρα είναι:

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),,(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{matrix}\right\}$$

με $N(\Omega)=36$

α) Θέλω να βρώ την πιθανότητα να φέρω εξάρες.Το πρώτο πράγμα που θα κάνω θα είναι να ονομάζω το ενδεχόμενό μου .

Έστω Α το ενδεχόμενο Α:"να φέρω εξάρες"

Στη συνέχεια (αν μπορώ) βρίσκω τα στοιχεία που περιέχει το ενδεχόμενό μου.

$A=\{(6,6)\}$ *με* $N(A)=1$

Αφού τα ζάρια μου είναι αμερόληπτα *θα χρησιμοποιήσω τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας.*

$$\boxed{P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{36}}$$

β) Έστω Β το ενδεχόμενο Β:"Να φέρω σαν αποτέλεσμα δυο διαδοχικούς αριθμούς".

$$B=\{(1,2),(2,1),(3,2),(2,3),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}$$

με $N(B)=10$

Και ξανά **αφού τα ζάρια είναι αμερόληπτα** είναι

$$\boxed{P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}}$$

γ) Έστω Γ το ενδεχόμενο Γ:"το άθροισμα των ενδείξεων των δυο ζαριών να είναι άρτιο"

Είναι $\Gamma=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),\\ ,(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\end{Bmatrix}$ με

$N(\Gamma)=18$

Και πάλι **αφού τα ζάρια είναι αμερόληπτα** είναι.

$$\boxed{P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}}$$

δ) Αυτό το ερώτημα μπορεί να λυθεί με περισσότερους απο έναν τρόπους.

Ένας τρόπος είναι να ΄΄δω΄΄ οτι το ενδεχόμενό μου μπορεί να θεωρηθεί σαν τα κοινά στοιχεία (τομή) των ενδεχομένων Γ και Δ όπου Γ το ενδεχόμενο του προηγούμενου ερωτήματος και Δ το ενδεχόμενο

Δ:"Το αποτέλεσμα του 1ου ζαριού να είναι μεγαλύτερο απο το αποτέλεσμα του 2ου ζαριού"

Είναι $\Delta=\begin{cases}(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1), \\ (5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\end{cases}$

με $N(\Delta)=15$

και να θυμίσουμε απο το γ) ερώτημα οτι

$\Gamma=\begin{cases}(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5), \\ ,(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\end{cases}$ με $N(\Gamma)=18$.

Είναι $\Gamma\cap\Delta=\{(3,1),(4,2),(5,1),(5,3),(6,2),(6,4)\}$ με $N(\Gamma\cap\Delta)=6$

Οπότε και για μια ακόμη φορά **αφού τα ζάρια είναι αμερόληπτα** είναι

$$\boxed{P(\Gamma\cap\Delta)=\frac{N(\Gamma\cap\Delta)}{N(\Omega)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}}$$

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αυτό που κάνουμε στην ενασχόλησή μας με τους αριθμούς στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο είναι να ΄΄παίζουμε΄΄ μέσα σε ομάδες (σύνολα) αριθμών.
Δηλαδή
1. συμφωνούμε να παίζουμε μέσα σε κάποιο απο τα γνωστά μας βασικά σύνολα αριθμών $(\mathbb{R},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{N})$
2. συμφωνούμε για τους κανόνες με τους οποίους μπορούμε να ΄΄μπλέξουμε΄΄ τους αριθμούς μεταξύ τους (οι πράξεις και οι ιδιότητές τους)
3. και επίσης θέλουμε οι αριθμοί αυτοί να έχουν και κάποιες ιδιότητες και να ικανοποιούν κάποιες σχέσεις(π.χ πότε ένας αριθμός είναι μικρότερος απο κάποιον άλλον).

Αφού λοιπόν συμφωνήσουμε για τους κανόνες μας μπορούμε στη συνέχεια να παίξουμε με την αριθμητική. Για να ξαναθυμηθούμε λοιπόν και να συμπληρώσουμε την πορεία του παιχνιδιού μας μέχρι τώρα.

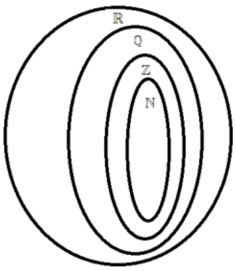
<u>α΄ Γυμνασίου</u> :μελετήσαμε τους αριθμούς τις πράξεις τους και τις ιδιότητές τους στο σύνολο των φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\})$.

<u>β΄ Γυμνασίου</u> :συμπληρώσαμε τους φυσικούς αριθμούς με το ΄΄ταίρι τους΄΄ (το πρόσημο + ή −) και έτσι πήγαμε στους ακέραιους αριθμούς$(\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\})$.
Παράλληλα γνωρίζαμε ήδη τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς.Μάθαμε τη ρίζα και στη συνέχεια με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος είδαμε οτι υπάρχουν και ρίζες τις οποίες δεν μπορώ να βρώ. Περάσαμε δηλαδή στο σύνολο των ρητών αριθμών

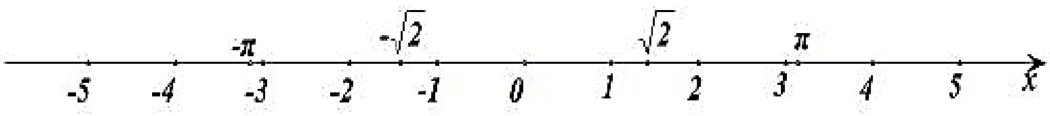
$$\left(\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{\beta}\,|\,\alpha,\beta\in\mathbb{Z},\beta\neq 0\right\}\right)$$

και στους άρρητους αριθμούς για να μπορέσουμε να παίξουμε μέσα στο μεγαλύτερο σύνολο των πραγματικών αριθμών $(\mathbb{R})$.

Για να δούμε λοιπόν ολοκληρωμένα πλέον τους πραγματικούς αριθμούς.



Μέσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών περιέχονται όλα τα υπόλοιπα σύνολα αριθμών που έχουμε μάθει. Δηλαδή $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.



Δυο μεγάλες κατηγορίες στις οποίες διακρίνονται οι πραγματικοί αριθμοί είναι οι ρητοί και οι άρρητοι.

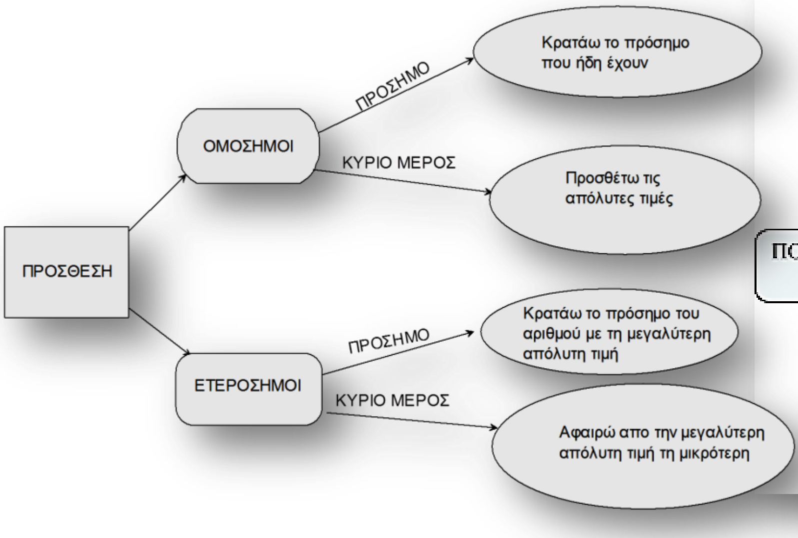
- ✓ Ρητός $\left(\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0 \right\} \right)$

  είναι κάθε αριθμός που έχει ή που μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος με αριθμητή και παρονομαστή φυσικό αριθμό$(\mathbb{Z})$ και όπως πάντα πρέπει ο παρονομαστής να μην είναι μηδέν.Μέσα στους ρητούς αριθμούς βρίσκονται και οι δεκαδικοί και οι περιοδικοί δεκαδικοί .
- ✓ Υπάρχουν όμως και οι άρρητοι αριθμοί όπως για παράδειγμα ο $\sqrt{2}$ ή ο $\sqrt{3}$.

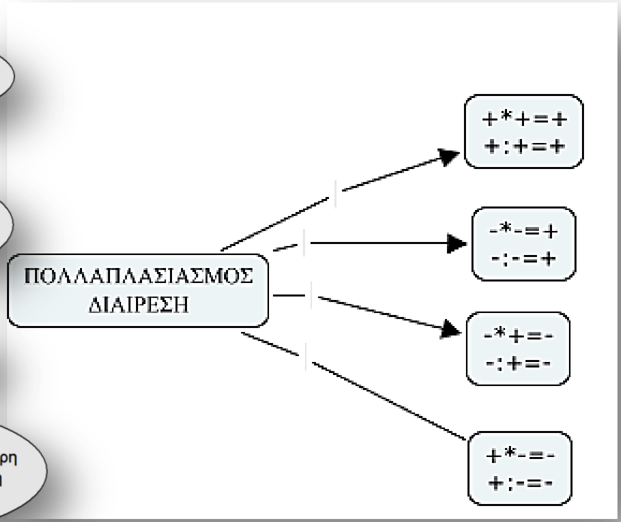
(Για να θυμηθούμε και την εισαγωγή) αφού συμφωνήσαμε οτι ΄΄παίζουμε΄΄ μέσα στην ομάδα των πραγματικών αριθμών $(\mathbb{R})$ και είδαμε ποιοί είναι οι αριθμοί μου μέσα σ'αυτήν την ομάδα τώρα να δούμε τις πράξεις που μπορώ να κάνω μέσα στο $\mathbb{R}$.

ΠΡΑΞΕΙΣ

- ## ΠΡΟΣΘΕΣΗ



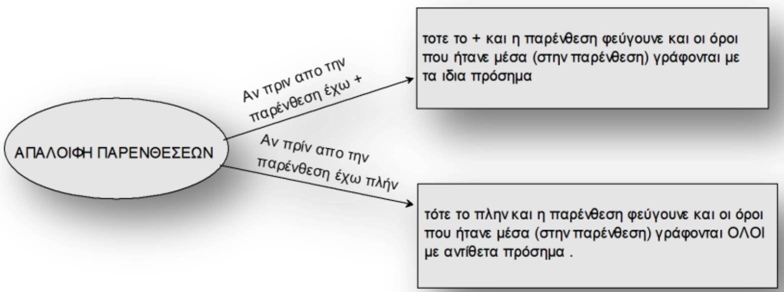
ΠΟΛΛ/ΣΜΟΣ-ΔΙΑΙΡΕΣΗ



Απαλοιφή παρενθέσεων

Αυτό που με ενδιαφέρει για την επιλογή του τρόπου με τον οποίο θα διώξω μια παρένθεση είναι αν αυτήν πολλαπλασιάζεται ή οχι με κάποια ποσότητα.

✓ Αν ΔΕΝ πολλαπλασιάζεται με κάποια ποσότητα τότε



$3+(2-x)=3+2-x$ ή $3-(2-x)=3-2+x$

- ✓ Ενώ αν η παρένθεση πολλαπλασιάζεται με κάποια ποσότητα τότε ''παίζω'' με την επιμεριστική ιδιότητα

  - $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
  - $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)=\alpha\cdot\gamma+\alpha\cdot\delta+\beta\cdot\gamma+\beta\cdot\delta$

πχ $-3\cdot(5-x)=-15+3x$

$(2-x)\cdot(-7+x)=-14+2x+7x-x^2$

Παράδειγμα πλήν επί πλήν μου κάνει + γιαυτό στο αποτέλεσμα έχω +7x

Έχω πάντα στο μυαλό μου οτι τα πρόσημα των αποτελεσμάτων που σημειώνονται υπακούουν στους κανόνες της πράξης του πολλαπλασιασμού.

(Ένας διαφορετικός τρόπος για να ''δω'' την απαλοιφή των παρενθέσεων είναι να σκεφτώ οτι τον πρώτο κανόνα με τα πρόσημα δεν τον χρειάζομαι αφού μπορώ να θεωρήσω οτι η παρένθεση πολλαπλασιάζεται με το +1 ή με το -1 αντίστοιχα και να εκτελώ πάντα την επιμεριστική ιδιότητα)

π.χ $x+(3y-2)=x+1\cdot(3y-2)=x+1\cdot 3y-1\cdot 2=x+3y-2$

π.χ $x-(3y-2)=x-1\cdot(3y-2)=x-1\cdot 3y+1\cdot 2=x-3y+2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

- Η αφαίρεση υπήρχε σαν ξεχωριστή πράξη μέχρι και την Α' Γυμνασίου επειδή ''έπαιζα'' στους φυσικούς αριθμούς και δεν υπήρχαν πρόσημα (''έπαιζα'' δηλαδή με τις απόλυτες τιμές των αριθμών).Στη συνέχεια αφού μάθαμε τα πρόσημα να θυμηθούμε για μια φορά ακόμη οτι πρόσθεση και αφαίρεση δεν είναι ξεχωριστές πράξεις και ο μόνος κανόνας με βασει τον οποίο κινούμαστε είναι ο κανόνας της πρόσθεσης.

Παράδειγμα: $5-3=2$. Έχω πρόσθεση ετερόσημων αριθμών. Του $+5$ και του -3. Άρα σύμφωνα με τον κανόνα της πρόσθεσης κρατάω το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και αφαιρω τις απόλυτες τιμές. Άρα το αποτέλεσμα είναι $+2$.

- Επίσης το σύμβολο του πλήν (-) έχει την έννοια του αντίθετου. Άρα ένας δεύτερος τρόπος για να το ερμηνεύω κάθε φορά που το βρίσκω μπροστά μου είναι αυτός.Δηλαδή όταν βλέπω -3 να έχω στο μυαλό μου οτι,αν με βολεύει, μπορώ να το ερμηνεύσω σαν ''ο αντίθετος του 3''.

Θυμηθήτε το όταν θα βρούμε μπροστά μας παράδειγμα $-x$. Τότε σημαίνει οτι έχω τον αντίθετο του x ,όποιος και να είναι αυτός ο x.

(Η **ΛΑΘΟΣ** ερμηνεία θα είναι να σκεφτώ οτι ο χ είναι αρνητικός.)

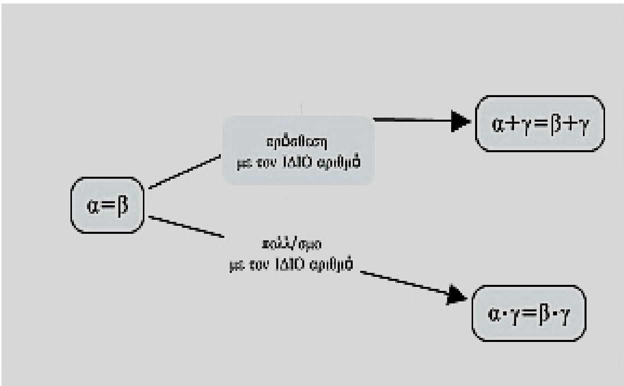
- Η διαίρεση επίσης δεν είναι ξεχωριστή πράξη αλλά ένας πολλαπλασιασμός.

  Παράδειγμα: $5:3=\frac{5}{3}=5\cdot\frac{1}{3}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ

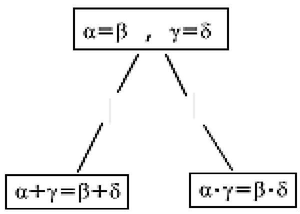
Εδώ θα εξετάσουμε τί ''αλλαγές'' μπορώ να κάνω σε **ΜΙΑ** ισότητα ή πως μπορώ να ''μπλέξω'' **ΔΥΟ** ισότητες μεταξύ τους.

Όταν ''αλλάζω'' **ΜΙΑ** ισότητα με τον ίδιο τρόπο που ''πειράζω'' το α' μέλος της ισότητας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ''πειράζω'' και το β' μέλος.Οι ''αλλαγές'' που δικαιούμαι να κάνω είναι με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.



Πώς μπορώ όμως να ''μπλέξω'' δυο (ή και περισσότερες) ισότητες μεταξύ τους;

Δικαιούμαι να προσθέσω και να πολλαπλασιάσω δυο ισότητες κατα μέλη.



Έχουμε και μια ακόμη ιδιότητα των ισοτήτων που την είδαμε στο εισαγωγικό κεφάλαιο και θα την ξαναθυμηθούμε εδώ.

Όταν έχω $\boxed{a\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \beta=0}$ (η ίδια ισχύει και για περισσότερους απο δυο παράγοντες) όταν δηλαδή έχω πολλαπλασιασμό να είναι ίσο με το **μηδέν** τότε ''σπάω'' και εξισώνω κάθε παράγοντα με το μηδέν. (όταν το γινόμενό μου είναι ίσο με οποιονδήποτε άλλο αριθμό εκτός απο το μηδέν ΔΕΝ μπορώ να εφαρμόσω την ιδιότητα αυτήν)

Συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι και η εξής ιδιότητα:
αν $\alpha\cdot\beta\neq 0$ τότε $\Leftrightarrow$ $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$(όπως και πρίν η ιδιότητα αυτήν έχει εφαρμογή μόνο οταν το 1ο μέλος ειναι παραγοντοποιημένο και είναι διάφορο απο το μηδέν)

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

$$\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}_{\nu-\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$$

Ιδιότητες δυνάμεων

$a^{\kappa}\cdot a^{\nu}=a^{\kappa+\nu}$ πολλαπλασιασμός δυνάμεων με την ίδια βάση

$a^{\kappa}:a^{\nu}=\dfrac{a^{\kappa}}{a^{\nu}}=a^{\kappa-\nu}$ διαίρεση δυνάμεων με την ίδια βάση

$a^{\nu}\cdot\beta^{\nu}=(a\cdot\beta)^{\nu}$ πολλαπλασιασμός δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη

$a^{\nu}:\beta^{\nu}=\dfrac{a^{\nu}}{\beta^{\nu}}=\left(\dfrac{a}{\beta}\right)^{\nu}=(a:\beta)^{\nu}$ διαίρεση δυνάμεων με τον ιδιο εκθέτη

$\left(a^{\kappa}\right)^{\nu}=a^{\kappa\cdot\nu}$ δύναμη υψωμένη σε άλλη δύναμη

$a^{-\nu}=\dfrac{1}{a^{\nu}}=\dfrac{1^{\nu}}{a^{\nu}}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\nu}$ αλλαγή προσήμου στον εκθέτη

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$$

$$\alpha^{0}=1,\alpha^{1}=\alpha,\alpha^{2}=\alpha\cdot\alpha,\ldots$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- $(a+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(a-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(a+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- $(a-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = a^2 - \beta^2$
- $(\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$
- $(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$

<u>Αποδείξεις</u>(όλες αποδεικνύονται με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας)

παράδειγμα

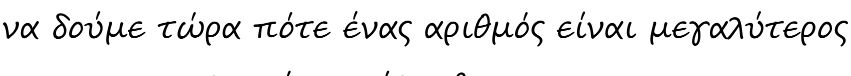
$$(a+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha\cdot\alpha + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta\cdot\beta = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(a-\beta)^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha\cdot\alpha - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta\cdot\beta = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

<u>ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ</u>

Θέλουμε τους πραγματικούς αριθμούς να τους διατάξουμε , δηλαδή να ξέρουμε πότε μια ποσότητα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη απο μια άλλη και τι ιδιότητες έχει αυτή η διάταξη.

Στο Γυμνάσιο διατάξαμε τους πραγματικούς αριθμούς γεωμετρικά. Είπαμε δηλαδή οτι όσο πιο δεξιά ′′βαδίζω′′ στον άξονα των πραγματικών αριθμών τόσο μεγαλύτερους αριθμούς βρίσκω και βγάλαμε αρκετά συμπεράσματα απο αυτό το δεδομένο.



Για να δούμε τώρα πότε ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος απο έναν άλλον απο την πλευρά της άλγεβρας.

Ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος απο έναν άλλον αριθμό β όταν η διαφορά $\alpha-\beta>0$.

$$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0$$

Έτσι τώρα μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τους αριθμούς.

- ✓ Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος απο το μηδέν
- ✓ Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος απο το μηδέν

Πολύ σημαντικές σχέσεις που προκύπτουν απο τη διάταξη των αριθμών είναι οι εξής:

$\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

(Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)

$$\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ και } \beta=0$$

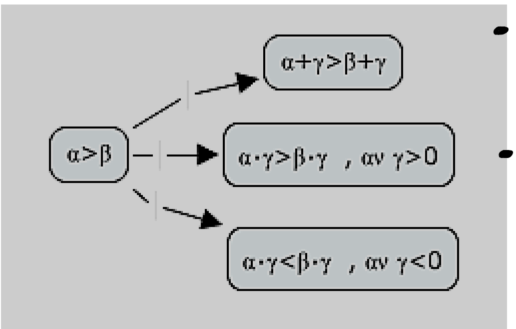
$$\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0 \text{ ή } \beta\neq 0$$

Τώρα θα ασχοληθούμε με το σύμβολο των ανισοτήτων και τι παρεμβάσεις δικαιούμαι να κάνω σε μια ανισοτική σχέση.

Θα ξεκινήσουμε με ένα λογικό συμπέρασμα:

αν $\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma \Rightarrow \alpha>\gamma$ (αν εγώ είμαι μεγαλύτερος απο εσένα και εσύ είσαι μεγαλύτερος απο τον Κώστα τότε εγώ είμαι μεγαλύτερος απο τον Κώστα)

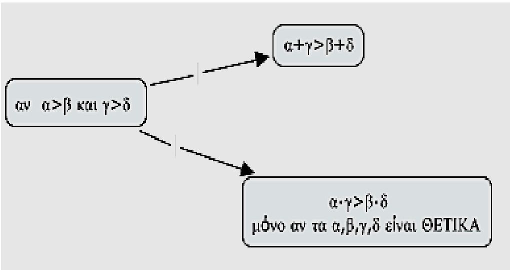
Τώρα όταν έχω **ΜΙΑ** ανισότητα $\alpha>\beta$ τι παρεμβάσεις δικαιούμαι να κάνω;



- μπορώ να προσθέσω **ΚΑΙ ΣΤΑ ΔΥΟ ΜΕΛΗ ΤΟΝ ΙΔΙΟ** αριθμό.
- μπορώ να πολλαπλασιάσω **ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΜΕΛΗ ΜΕ ΤΟΝ ΙΔΙΟ ΑΡΙΘΜΟ** αλλά με ενδιαφέρει το πρόσημο του αριθμού αυτού.Αν πολλαπλασιάσω με θετικό η φορά παραμένει όπως είναι ενώ αν

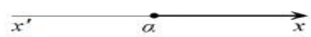
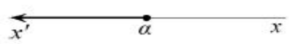
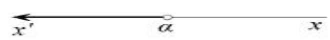
πολλαπλασιάσω με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

Όταν έχω **ΔΥΟ** (ή και περισσότερες) ανισότητες **ΤΗΣ ΙΔΙΑΣ ΦΟΡΑΣ** πως μπορώ να τις ''μπλέξω'' μεταξύ τους;



Τέλος για **θετικούς** αριθμούς α,β και **θετικό ακέραιο** ν ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha > \beta \iff \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$

Διαστήματα

καθημερινή ζωή	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**		
	ΑΝΙΣΩΤΗΤΕΣ	**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ**	**ΔΙΑΣΤΗΜΑ**
στην τσέπη μου έχω απο 10 έως 20 ευρώ	$10 \le x \le 20$	$[10,20]$	
περισσότερα απο 10 αλλά μέχρι 20 ευρώ	$10 < x \le 20$	$(10,20]$	
θα χρειαστώ τουλάχιστον 10 αλλά λιγότερα απο 20 ευρώ	$10 \le x < 20$	$[10,20)$	
περισσότερα απο 10 αλλά λιγότερα απο 20 ευρώ	$10 < x < 20$	$(10,20)$	
τουλάχιστον 5,2 ευρώ	$x \ge 5,2$	$[5,2\ ,\ +\infty)$	
περισσότερα απο 3,5 ευρώ	$x > 3,5$	$(3,5\ ,\ +\infty)$	
στο λογαριασμό μου στην τράπεζα εχω το πολύ 3 ευρώ	$x \le 3$	$(-\infty,3]$	
στο λογαριασμό μου στην τράπεζα έχω λιγότερα απο 3 ευρώ	$x < 3$	$(-\infty,3)$	

Πως τα διαβάζω;

$[10,20]$: κλειστό 10 , 20 κλειστό

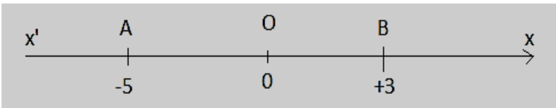
$(3,5\ ,\ +\infty)$: ανοιχτό 3,5 , $+\infty$ (στα σύμβολα $\pm\infty$ δεν διευκρινίζω γιατί μπαίνουν ΠΑΝΤΑ ανοιχτά)

με την ίδια λογική και τα υπόλοιπα δηλαδή [-κλειστό
(-ανοιχτό

Η αγκύλη σημαίνει οτι ′′ακουμπάω′′ το άκρο του διαστήματος ενώ η παρένθεση σημαίνει οτι ′′φτάνω′′ όσο κοντά του θέλω χωρίς όμως να το ′′ακουμπάω′′.

<u>ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ</u>

Στο γυμνάσιο γνωρίσαμε την απόλυτη τιμή με τη βοήθεια της γεωμετρίας.Έτσι έχω τον άξονα x'x τα σημεία του οποίου συμβολίζονται με κεφαλαία ελληνικά γράμματα και στο κάθε ένα απο αυτά αντιστοιχεί



η τετμημένη του.Η απόσταση π.χ του Α απο την αρχή Ο του άξονα είναι η απόλυτη τιμή του -5.Άρα $|-5|=5$, ενώ $|+3|=3$

Για να δούμε τώρα την απόλυτη τιμή απο την πλευρά της άλγεβρας. Δηλαδή η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α| και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

είναι ο ίδιος ο αριθμός
ενώ η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

Συμπεράσματα που μπορώ να βγάλω απο τον ορισμό της απόλυτης τιμής:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$

  αφού εκφράζει απόσταση

- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν θ>0, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

  θυμήσου το στις εξισώσεις όταν θα πρέπει να ξεμπλέξεις με το απόλυτο

- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Ιδιότητες απόλυτης τιμής

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

   Μόνο στον πολλαπλασιασμό και στην διαίρεση μπορώ να σπάσω και οι ποσότητες να είναι ίσες

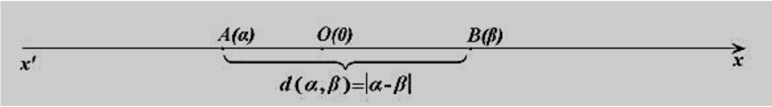
2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

   ενω στην πρόσθεση σπάω αλλα οι ποσότητες δεν είναι υποχρεωτικά ίσες

ισχύουν και για περισσότερους απο δυο

<u>Απόσταση δυο αριθμών</u>

Αφού η $|\alpha|$ εκφράζει την απόσταση απόσταση του α απο το Ο είναι λογικό να σκεφτώ μήπως με την απόλυτη τιμη μπορώ να εκφράσω και την απόσταση δυο τυχαίων αριθμών.Έτσι:



$$\boxed{d\ (\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|}$$

Παρατηρήσεις:

- Ο αριθμός $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ αντιστοιχεί στο μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και λέγεται κέντρο του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.
- Ο αριθμός $\rho = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ λέγεται ακτίνα του $[\alpha, \beta]$.

<u>Θα ασχοληθούμε τώρα με τις **αποστάσεις** και τις **ανισότητες**</u>

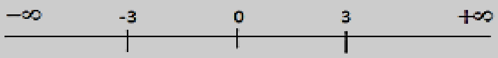
(την απόλυτη τιμή , όπως και πολλές άλλες μαθηματικές έννοιες, μπορώ να την ′′δω′′ με δυο τρόπουςς.Έναν αλγεβρικό και έναν γεωμετρικό.)

<u>αλγεβρική ματια</u>

Όπως είδαμε απο τις ιδιότητες του ορισμού της απόλυτης τιμής όταν έχω : π.χ $|x|=3$ τότε λύνω (διώχνω την απόλυτη τιμή) ως εξής: $x=3$ ή $x=-3$

<u>γεωμετρική ματιά</u>

Για να δώ την ισότητα $|x|=3$ με τα μάτια της γεωμετρίας τώρα. Είπαμε οτι η απόλυτη τιμή εκφράζει απόσταση.Έτσι η $|x|$ εκφράζει την απόσταση του αγνώστου x απο το 0 (μηδέν).Οπότε η ισότητα $|x|=3$ δηλώνει οτι η απόσταση του αγνώστου x απο το 0 (μηδέν) πρέπει να είναι 3 μονάδες. Έτσι ... βγάζω το συμπέρασμα οτι το $x=3$ ή $x=-3$ αφου το 3 και το -3 απέχουν 3 μονάδες απο το 0 (μηδέν).



Ας παίξω τώρα με τους δυο τρόπους για την ισότητα $|x-4|=2$

<u>αλγεβρική ματιά</u>

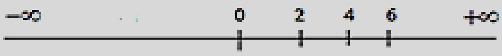
$|x-4|=2$

$\Leftrightarrow x-4=2 \text{ ή } x-4=-2$

$\Leftrightarrow x=6 \quad \text{ή} \quad x=2$

<u>γεωμετρική ματιά</u>

Θέλω το x να απέχει απο το 4 απόσταση ίση με 2 μονάδες. Οπότε το x θα είναι ή το 2 ή το 6 γιατι αυτοί οι δυο απέχουν απο το 4 απόσταση ίση με 2 μονάδες.



Θα γενικεύσω τώρα για να δώ τι γίνεται στην περίπτωση που έχω (αντί για ισότητες) ανισότητες.

Έχω την ανισότητα $|x|<3$.

<u>αλγεβρικά</u>

$$|x|<3$$

$$\Leftrightarrow -3<x<3$$

<u>γεωμετρικά</u>

η ανισότητα $|x|<3$ σημαίνει γεωμετρικά

ότι το x απέχει απο το Ο (μηδέν)

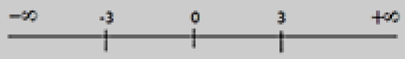
απόσταση μικρότερη απο 3 μονάδες.

Άρα το x θα κινείται στην περιοχή $(-3,3)$

γιατι εκεί η απόσταση απο το Ο (μηδέν)

είναι μικρότερη απο 3 μονάδες.

Δηλαδή $-3<x<3$.



Αν είχα $|x|\le 3$ σε οτι έκανα πρίν

θα έβαζα $\le$ και το διάστημα θα ήταν $[-3,3]$.

Με την ίδια λογική αν είχα $|x|>3$ θα έλυνα:

<u>αλγεβρικά</u>

$$|x|>3$$

$$\Leftrightarrow x>3 \quad ή \quad x<-3$$

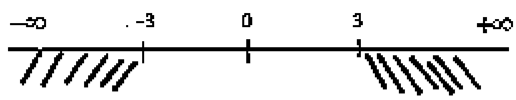
<u>γεωμετρικά</u>

Θέλω η απόσταση του x απο το Ο (μηδέν)

να είναι μεγαλύτερη απο 3 μονάδες.

Άρα το x θα βρίσκεται ή πριν απο το -3

ή μετά απο το 3.Δηλαδή $x>3$ ή $x<-3$.



(αν είχα $\ge$ απλά σε όλες τις ανισότητες θα έβαζα και το ίσον).

Και φτάνουμε έτσι στην τελευταία γενίκευση

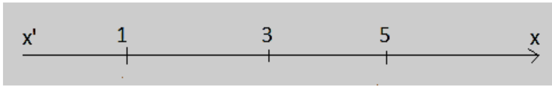
Θέλω να λύσω την ανίσωση $|x-3|<2$

<u>αλγεβρικά</u>

$$|x-3|<2$$
$$-2<x-3<2$$
$$-2+3<x<2+3$$
$$1<x<5$$

<u>γεωμετρικά</u>

Θέλω η απόσταση του x απο το 3 να είναι μικρότερη απο 2 μονάδες.Άρα τα άκρα του διαστήματός μου θα είναι το 1 και το 5(χωρίς να τα ΄΄ακουμπάω΄΄) που απέχουν απόσταση 2 απο το3.



Τί αλλαγές θα υπήρχαν αν είχα $|x-3|>2$;

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Την έννοια της ρίζας την διαπραγματευόμαστε στη μαθηματική μας ζωή απο τη β΄ γυμνασίου.Ο ορισμός της ρίζας απο τη β΄ γυμνασίου μέχρι τώρα είναι (περίπου) ο ίδιος.Το πρώτο που πρέπει να θυμάμαι είναι οτι τόσο η υπόριζη ποσότητα όσο και το αποτέλεσμα της ρίζας είναι μη αρνητικός αριθμός (≥ 0).

Ορισμός:Τετραγωνική ρίζα ενός **μη αρνητικού** αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{a}$ και είναι ο **μη αρνητικός** αριθμός που,όταν υψωθεί στο τετράγωνο , δίνει τον α.

Ιδιότητες τετραγωνικής ρίζας

$\sqrt{a^2} = |a|$ Όταν τετράγωνο και ρίζα ΄΄φεύγει΄΄ μπαινει απόλυτο!!!΄΄).

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ Σπάω΄΄ με **ίσον** μόνο σε πολλαπλασιασμό ή διαίρεση

(**ΠΟΤΕ ΣΕ ΠΡΟΣΘΕΣΗ-ΑΦΑΙΡΕΣΗ**

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Γενικεύουμε τώρα τηντετραγωνική ρίζα και έχουμε την νιοστής τάξης ρίζα$\sqrt[\nu]{\alpha}$

Προσέξτε οτι πάλι παίζω με μη αρνητική υπόριζη ποσότητα και μη αρνητικό αποτέλεσμα.

Ορισμός: (Για κάθε θετικό ακέραιο ν) Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που όταν υψωθεί στην ν , δίνει α.

Επίσης γράφουμε $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$ και $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$.

Ιδιότητες ριζών(ουσιαστικά γενικεύουμε τις προηγούμενες ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας)

1. Αν $\alpha \geq 0$ τότε: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha$ και $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$
2. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος τότε: $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$
3. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε:
   i. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$
   ii. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$
   iii. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$
   iv. $\sqrt[\nu \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Ορισμός: Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος τότε ορίζουμε : $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

Ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$ όταν μ,ν θετικοί ακέραιοι.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ $(ax+\beta=0)$

Η γενική μορφή της εξίσωσης 1^{ου} βαθμού είναι: $ax+\beta=0$

Για να θυμηθούμε πως την λύνουμε:

$\alpha x+\beta=0$ Χωρίζω γνωστούς απο αγνώστους.

Η εξίσωση είναι μια ισότητα έτσι οτι πράξεις κάνω σε αυτήν υπακούουν στις ιδιότητες των ισοτήτων.Άρα για να χωρίσω γνωστούς απο αγνώστους πρέπει να προσθέσω στα δυο μέλη το $-\beta$

$\Leftrightarrow ax+\beta-\beta=-\beta$

$\Leftrightarrow \alpha x=-\beta$

Τώρα πρέπει να διαιρέσω και τα δυο μέλη με το α
αλλά δεν ξέρω τι αριθμός είναι ο α και γιαυτό διακρίνω περιπτώσεις

- Αν $\alpha\neq 0$ τότε μπορώ να διαιρέσω τα δυο μέλη της εξίσωσης με το $\alpha(\neq 0)$ και η εξίσωση γίνεται $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$
- Αν $\alpha=0$ τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=-\beta$ οπότε δεν μπορώ να διαιρέσω με το συντελεστή του αγνώστου (γιατί αυτός είναι μηδέν) και ασχολούμαι με το β
    I. αν είναι $\beta\neq 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση και ονομάζεται αδύνατη
    II. αν είναι $\beta=0$ τότε κάθε τιμή του x είναι λύση της εξίσωσης είναι δηλαδή ταυτότητα.

Επίλυση εξίσωσης 1^{ου} βαθμού

Εξισώσεις ά βαθμού	$\frac{3(x-1)}{2}+\frac{4x-1}{3}-\frac{5x-1}{4}=2(x-1)$
1.Απαλοιφή παρενθέσεων	$\frac{3x-3}{2}+\frac{4x-1}{3}-\frac{5x-1}{4}=2x-2$
2.Απαλοιφή παρονομαστών (Ε.Κ.Π(2,3,4)=12	$12\frac{3x-3}{2}+12\frac{4x-1}{3}-12\frac{5x-1}{4}=12\cdot 2x-12\cdot 2$
	$6(3x-3)+4(4x-1)-3(5x-1)=24x-24$
3.Απαλοιφή παρενθέσεων	$18x-18+16x-4-15x+3=24x-24$
4.χωρίζω γνωστούς απο αγνώστους	$18x+16x-15x-24x=18+4-3-24$
5.Αναγωγή ομοίων όρων	$-5x=-5$
6.διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου	$x=1$

Τα πρώτα 3 βήματα στη λύση μιας εξίσωσης μπορώ να τα περιγράψω ως ''ελευθερώνω τους όρους μου''

αν μετά το 5^{ο} βήμα κατέληγα σε

- $0x=-5$ αδύνατη (δηλαδή ότι τιμή και να βάλω στη θέση του x η ισότητα δεν θα μου λέει αλήθεια)
- $0x=0$ ταυτότητα (δηλαδή ότι τιμή και να βάλω στη θέση του x η ισότητα μου λέει πάντα αλήθεια)

Παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού

Όταν κάποιος απο τους συντελεστές α,β εκφράζεται με τη βοήθεια γράμματος τότε αυτό το γράμμα ονομάζεται παράμετρος και η εξίσωση ονομάζεται παραμετρική.Η εργασία που κάνουμε για τη λύση αυτής ονομάζεται διερεύνηση και αποτελείται απο τα βήματα με τα οποία περιγράψαμε την λύση της γενικής εξίσωσης 1ου βαθμού $\alpha x+\beta=0$

Παράδειγμα παραμετρικής:

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση

$\left(\lambda^2-1\right)x-\lambda+1=0, \lambda\in\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

$$\left(\lambda^2-1\right)x=\lambda-1$$
$$\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda+1)x=\lambda-1$$

Διερεύνηση:

- αν $(\lambda-1)(\lambda+1)\neq 0$
  $\Leftrightarrow\lambda-1\neq 0$ και $\lambda+1\neq 0$
  $\Leftrightarrow\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x=\frac{\lambda-1}{(\lambda-1)(\lambda+1)}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\lambda+1}$$

- Για $\lambda=1$η εξίσωση γίνεται: $0x=0$ ταυτότητα
- Για $\lambda=-1$η εξίσωση γίνεται : $0x=-2$ αδύνατη

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

Παράδειγμα 1 (κλασματική)

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{1}{x^2-x}+\frac{2}{x^2-1}=-\frac{1}{x^2+x}$.

Λύση

Όταν έχω κλασματική εξίσωση πρέπει να βρώ
για ποιες τιμές της μεταβλητής ορίζεται(ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ)
Για να βρώ πιο εύκολα τους περιορισμούς θα ασχοληθώ με αυτούς μόλις βρώ το Ε.Κ.Π των παρονομαστών

- Βρίσκω Ε.Κ.Π παρονομαστών

  Για να το βρώ πρέπει να παραγοντοποιήσω τους παρονομαστές

$$\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{x(x+1)}$$

Ε.Κ.Π: $x(x-1)(x+1)\neq 0$,

$\Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq 1$ και $x\neq -1$

$$x(x-1)(x+1)\frac{1}{x(x-1)}+x(x-1)(x+1)\frac{2}{(x-1)(x+1)}=-x(x-1)(x+1)\frac{1}{x(x+1)}$$

$\Rightarrow x+1+2x=-(x-1)$

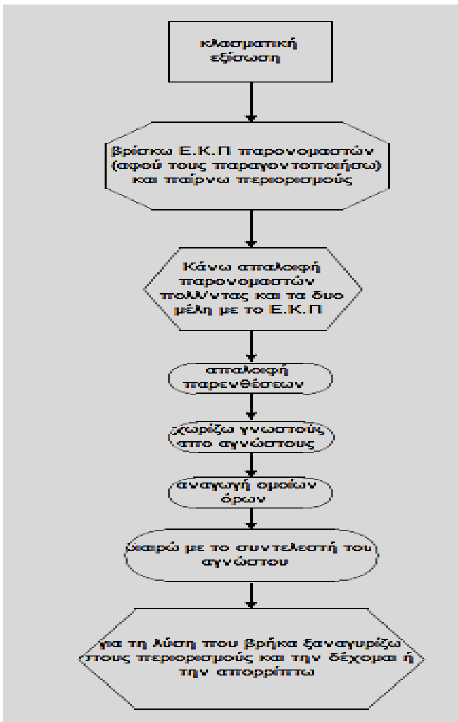
$\Rightarrow x+1+2x=-x+1$

$\Rightarrow x+2x+x=1-1$

$\Rightarrow 4x=0$

$\Rightarrow \frac{4x}{4}=\frac{0}{4}\Rightarrow x=0$ απορρίπτεται

αφού πρέπει $x\neq 0$



Παράδειγμα 2 (με απόλυτα)

Να λυθεί η εξίσωση $|2x-1|=|x+3|$

Λύση

$$|2x-1|=|x+3|$$

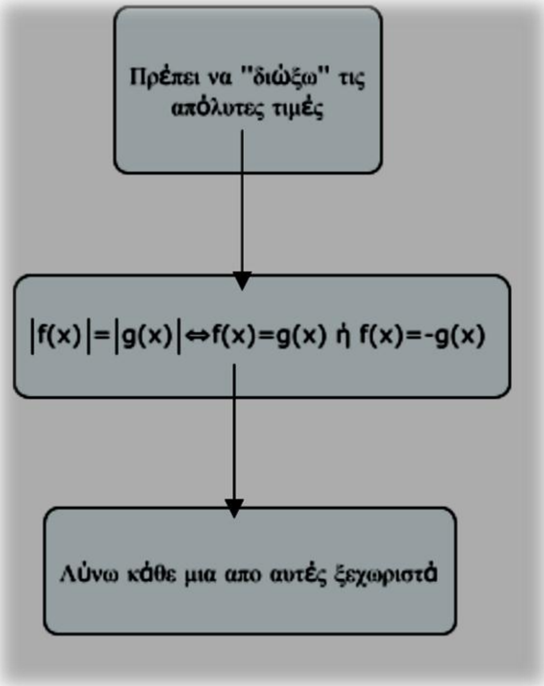
$$\Rightarrow 2x-1=x+3 \text{ ή } 2x-1=-(x+3)$$

$$\Rightarrow 2x-x=1+3 \text{ ή } 2x-1=-x-3$$

$$\Rightarrow x=4 \text{ ή } 2x+x=1-3$$

$$\Rightarrow x=4 \text{ ή } 3x=-2$$

$$\Rightarrow x=4 \text{ ή } x=-\frac{2}{3}$$



Παράδειγμα 3 (με απόλυτα)

Να λυθεί η εξίσωση $|2x-3|=3x-2$

Λύση

Πρέπει $3x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{2}{3}$

Με αυτόν τον περιορισμό θα λύσω την εξίσωση

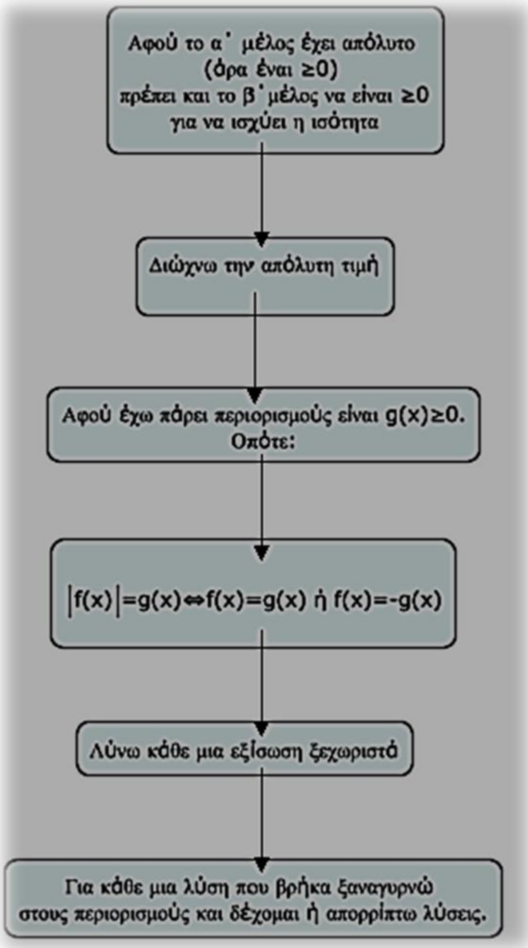
$$|2x-3|=3x-2$$

$$\Rightarrow 2x-3=3x-2 \text{ ή } 2x-3=-3x+2$$

$$\Rightarrow 2x-3x=3-2 \text{ ή } 2x+3x=3+2$$

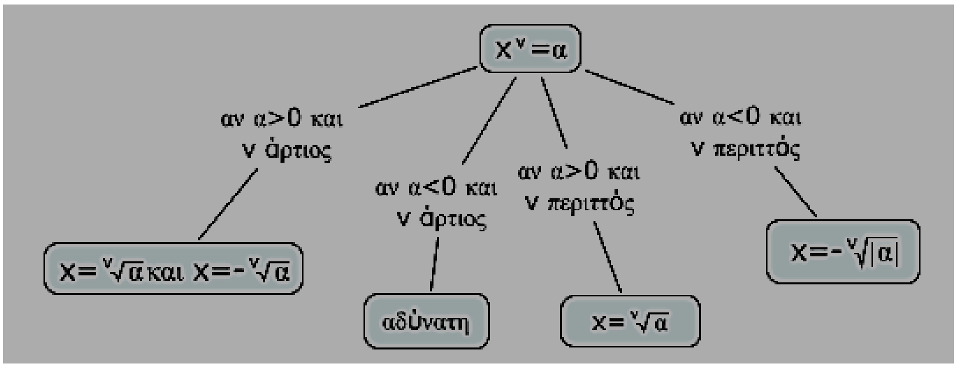
$$\Rightarrow -x=1 \text{ ή } 5x=5$$

$$\Rightarrow x=-1 \text{ απορρίπτεται ή } x=1 \text{ δεκτή}$$



<u>Η εξίσωση</u> $x^{\nu} = a$

Διακρίνω περιπτώσεις για το **ν** και για το **α**:



Παραδείγματα:

1. $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{16}$ ή $x = -\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$

2. $x^2 = -5$ αδύνατη

3. $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$

4. $x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-8|} \Leftrightarrow x = -2$

<u>ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου βαθμού</u>

Έστω εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.

Βρίσκω τη διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Τότε

- αν $\Delta > 0$ η εξίσωση έχει στους πραγματικούς αριθμούς δυο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει στους πραγματικούς αριθμούς μια διπλή ρίζα την $x_{1,2} = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.
- αν $\Delta < 0$ η εξίσωση δεν έχει ρίζες (είναι αδύνατη) στους πραγματικούς αριθμούς.

Βασικές εφαρμογές:

1. $4x^2-3x-1=0$

Είναι $a=4, \beta=-3, \gamma=-1$

Οπότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot4\cdot(-1)=9+16=25>0$

Η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες τις

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot4}=\frac{3\pm5}{8}=\begin{cases} x_1=\frac{8}{8}=1 \\ x_2=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

2. $x^2-4x+4=0$

Είναι $a=1, \beta=-4, \gamma=4$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=16-16=0$

Οπότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα $x_{1,2}=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-(-4)}{2\cdot1}=\frac{4}{2}=2$

Εναλλακτικά όταν $\Delta=0$ μπορώ να λύσω με τη χρήση ταυτοτήτων.

$$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x^2-2\cdot2\cdot x+2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

3. $x^2-2x+5=0$

$a=1, \beta=-2, \gamma=5$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot5=4-20=-16<0$

Η εξίσωση είναι αδύνατη (δεν έχει ρίζες) στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Όταν η εξίσωση 2ου βαθμού είναι ελλειπής (λείπει ο πρωτοβάθμιος ή ο σταθερός όρος δεν είναι απαραίτητο να τη λύσω μέσω της Διακρίνουσας αλλά μπορώ να πάω με εναλλακτικούς τρόπους:

π.χ

$$4x^2-2x=0 \Leftrightarrow 2x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \acute{\eta} \ x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \ \acute{\eta} \ x=2$$

π.χ

$$3x^2-27=0 \Leftrightarrow 3\left(x^2-9\right)=0 \Leftrightarrow 3(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \; ή \;\; x+3=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \quad ή \;\; x=-3$$

Εναλλακτικά:

$$3x^2-27=0 \Leftrightarrow 3x^2=27 \Leftrightarrow x^2=\frac{27}{3} \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{9} \Leftrightarrow |x|=3 \Leftrightarrow x=\pm 3$$

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	**Η εξίσωση** $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$
$\Delta>0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
$\Delta=0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $-\frac{\beta}{2\alpha}$.
$\Delta<0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Τύποι Vieta

Έστω η εξίσωση 2ου βαθμού

$$ax^2+\beta x+\gamma=0 \;\;, \gamma\neq 0 \;\; \text{και} \; \Delta>0$$

Τότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες τις:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \;\; ή \;\; x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Ας βρώ το άθροισμα (S) και το γινόμενο (P) των ριζών

$$x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}=S$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{(-\beta)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-\left(\beta^2-4\alpha\gamma\right)}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}=P$$

Άρα $\boxed{S=-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P=\frac{\gamma}{\alpha}}$

Με τη βοήθεια των τύπων Vieta η εξίσωση 2ου βαθμού γίνεται:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha}x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$$

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

με απόλυτα

$(x+2)^2-6|x+2|+5=0$

$|x+2|^2-6|x+2|+5=0 \quad (1)$

Θέτω $|x+2|=\omega\geq 0 \quad (2)$

Η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$\omega^2-6\omega+5=0$

Λύνοντας την τελευταία έχω

$\omega_1=1$ (δεκτή αφού $1\geq 0$) και $\omega_2=5$ (δεκτή αφού $5\geq 0$)

Η (2) για $\omega=1$ γίνεται:

$|x+2|=1 \Leftrightarrow x+2=1$ ή $x+2=-1$

$\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=-3$

Η (2) για $\omega=5$ γίνεται:

$|x+2|=5 \Leftrightarrow x+2=5$ ή $x+2=-5$

$\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-7$

κλασματική :

$\frac{x^2}{x-1}-8=\frac{1}{x-1}$

Περιορισμοί: Πρέπει

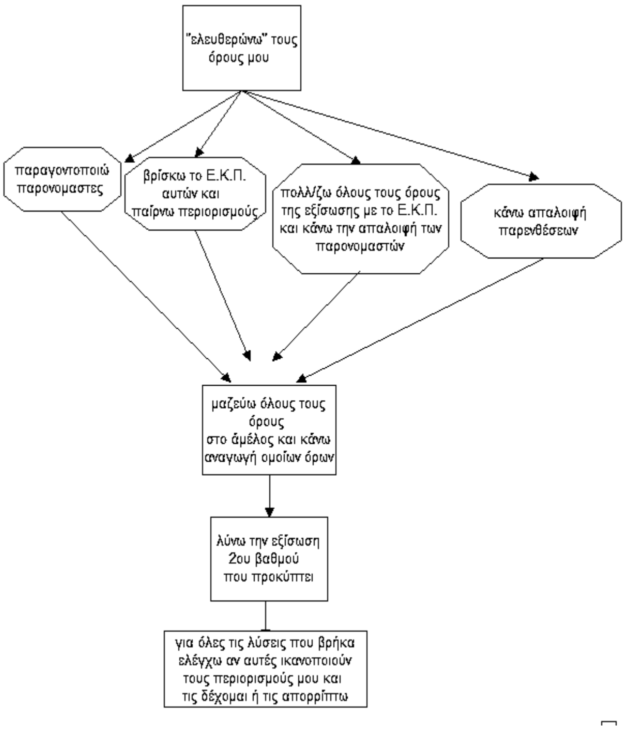
$x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

$\Leftrightarrow (x-1)\frac{x^2}{x-1}-8(x-1)=(x-1)\frac{1}{x-1}$

$\Leftrightarrow x^2-8x+8=1$

$\Leftrightarrow x^2-8x+7=0$

Είναι $\Delta=36>0$



Άρα η εξίσωση έχει

δυο ρίζες άνισες τις $x_1 = 7$ (δεκτή) και $x_2 = 1$ (απορρίπτεται)

διτετράγωνη

$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \quad (1)$

$\left(\Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 - 17x^2 + 16 = 0\right)$

Θέτω $x^2 = y \geq 0 \quad (2)$

Οπότε η (1) λόγω της (2) γίνεται:

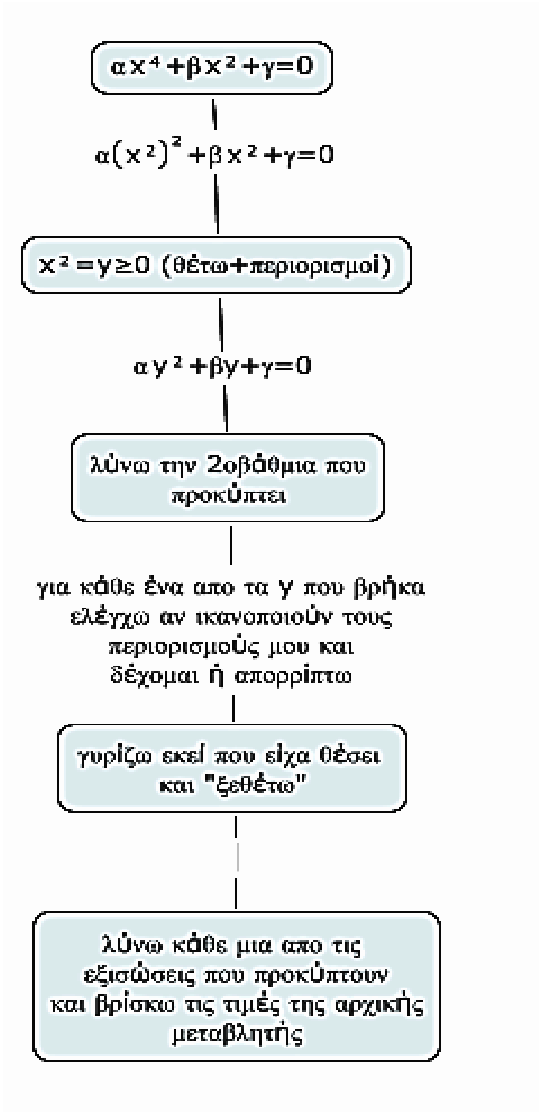
$y^2 - 17y + 16 = 0$

με $\Delta = 225 > 0$ άρα η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες τις:

$y_1 = 1$ (δεκτή) και $y_2 = 16$ (δεκτή)

Η (2) για $y = 1$ γίνεται: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Η (2) για $y = 16$ γίνεται: $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$



Ανισώσεις 1ου βαθμού

Οι ανισώσεις 1ου βαθμού έχουν μορφή

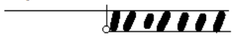
$ax + \beta > 0$ και $\alpha x + \beta < 0$

Τα βήματα με τα οποία τις λύνω είναι τα ίδια με τις εξισώσεις 1ου βαθμού.

Εξισώσεις και ανισώσεις 1ου βαθμού όμως έχουν ουσιαστικές διαφορές .

Παράδειγμα

(θα λύσω την εξίσωση $2 + \frac{8-3x}{4} = 5 - \frac{x}{4}$ και την ανίσωση $2 + \frac{8-3x}{4} < 5 - \frac{x}{4}$)

$2+\frac{8-3x}{4}=5-\frac{x}{4}$ $\Leftrightarrow 2\cdot 4+4\cdot\frac{8-3x}{4}=5\cdot 4-4\cdot\frac{x}{4}$ $\Leftrightarrow 8+8-3x=20-x$ $\Leftrightarrow -3x+x=20-16$ $\Leftrightarrow -2x=4$ $\Leftrightarrow \frac{-2x}{-2}=\frac{4}{-2}$ $\Leftrightarrow x=-2$	$2+\frac{8-3x}{4}<5-\frac{x}{4}$ $\Leftrightarrow 2\cdot 4+4\cdot\frac{8-3x}{4}<5\cdot 4-4\cdot\frac{x}{4}$ $\Leftrightarrow 8+8-3x<20-x$ $\Leftrightarrow -3x+x<20-16$ $\Leftrightarrow -2x<4$ $\Leftrightarrow \frac{-2x}{-2}>\frac{4}{-2}$ $\Leftrightarrow x>-2$ $-\infty$ -2 $+\infty$ 

Βήματα:

- ελευθερώνω τους όρους μου
  1. απαλοιφή παρονομαστών
     βρίσκω Ε.Κ.Π
     πολλ/ζω και τα δυο μέλη
  2. απαλοιφή παρενθέσεων
- χωρίζω γνωστούς απο αγνώστους
- αναγωγή ομοίων όρων
- διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου

διαφορές (στα βήματα):στις ανισώσεις όταν διαιρώ με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

Επίσης στις ανισώσεις συνεχίζω με τον άξονα των αριθμών.

Ουσιαστικές διαφορές:

- στις εξισώσεις βρίσκώ μια λύση ενώ στις ανισώσεις βρίσκω **άπειρες** λύσεις οι οποίες ικανοποιούν όλες μια ιδιότητα (στο παράδειγμα είναι όλες μεγαλύτερες του 2)
- στις ′′ειδικές′′ περιπτώσεις των εξισώσεων έχω ότι
  $0x=0$ ταυτότητα
  $0x=\beta$, $\beta\neq 0$ *αδύνατη*
  ενώ στις ′′ειδικές′′ περιπτώσεις των ανισώσεων (δηλαδή αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι μηδέν)
  πρέπει να σκεφτώ τι μου ′′λέει′′ η ανίσωση για να βγάλω συμπέρασμα αν είναι αδύνατη ή αν όλοι οι αριθμοί είναι λύση της.

Ανισώσεις με απόλυτα

Όταν η ανίσωσή μου έχει απόλυτη τιμή που περιέχει τη μεταβλητή μου τότε πρέπει να κάνω όλες τις απαραίτητες εκείνες ιδιότητες των ανισοτήτων οι οποίες θα φέρουνε την ανίσωσή μου στη μορφή π.χ $|...|\leq ....$ και στη συνέχεια να απαλλαγώ απο το απόλυτο.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η ανίσωση $|x+4|\le 2$

Λύση

Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχω οτι

αν $|x|\le \theta$ με $\theta>0 \Leftrightarrow -\theta\le x\le \theta$

Άρα $|x+4|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x+4\le 2 \Leftrightarrow -2-4\le x\le 2-4 \Leftrightarrow -6\le x\le -2$

Δηλαδή η ανίσωση αληθεύει για $x\in[-6,-2]$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η ανίσωση $|3x-4|>1$

Λύση

Απο τις ιδιότητες των απολύτων τιμών εχω οτι:

αν $|x|>\theta$ με $\theta>0 \Leftrightarrow x<-\theta$ ή $x>\theta$

Άρα $|3x-4|>1$

$$\Leftrightarrow 3x-4<-1 \text{ ή } 3x-4>1$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x<3 \quad \text{ή } 3x>5$$
$$\Leftrightarrow \quad x<1 \quad \text{ή } x>\frac{5}{3}$$

Δηλαδή η ανίσωση αληθεύει για $x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$

Παράδειγμα 3 (γενικό)

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{|x-2|}{3}-|-2x+4|\le -\frac{7}{6}-\left|-\frac{x}{2}+1\right|$

Λύση

Για να μπορέσω να φτάσω την ανίσωση στο σημείο που μου δόθηκαν οι ανισώσεις στα προηγούμενα παραδείγματα πρέπει πρώτα απ'ολα όπου εμφανίζεται απόλυτη τιμή
να έχω την ίδια ποσότητα μέσα της.Έτσι

$$|-2x+4|=|-2(x-2)|=|-2|\cdot|x-2|=2\cdot|x-2|$$

$$\left|-\frac{x}{2}+1\right|=\left|-\frac{x}{2}+\frac{2}{2}\right|=\left|\frac{-x+2}{2}\right|=\left|-\frac{x-2}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\cdot(x-2)\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|\cdot|x-2|=\frac{1}{2}|x-2|=\frac{|x-2|}{2}$$

Οπότε η αρχική ανίσωση γίνεται:

$$\frac{|x-2|}{3}-2|x-2|\le -\frac{7}{6}-\frac{|x-2|}{2}$$ Απαλοιφή παρονομαστών με Ε.Κ.Π(2,3,6)=6

$$6\frac{|x-2|}{3}-6\cdot 2|x-2|\le -6\cdot\frac{7}{6}-6\frac{|x-2|}{2}$$

$$2|x-2|-12|x-2|\le -7-3|x-2|$$ Χωρίζω γνωστούς απο αγνώστους

$$2|x-2|-12|x-2|+3|x-2|\le -7$$ Αναγωγή ομοίων όρων

$$-7|x-2|\le -7$$ Διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου (είναι αρνητικός άρα θα αλλάξει η φορά)

$$|x-2|\ge 1$$ και τελικά όπως στα προηγούμενα παραδείγματα για να απαλλαγώ απο την απόλυτη τιμη

$$x-2\le -1 \text{ ή } x-2\ge 1$$

$$x\le 1 \text{ ή } x\ge 3$$

Δηλαδή $x\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

<u>Ανισώσεις 2ου βαθμού</u>

Η παράσταση $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\alpha\ne 0$ λέγεται τριώνυμο 2ου βαθμού και αναλόγως τη διακρίνουσά του παραγοντοποιείται και γίνεται:

- αν $\Delta>0$ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$
- αν $\Delta=0$ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
- αν $\Delta<0$ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$

Είτε θέλω να βρώ το πρόσημο ενός τριωνύμου είτε θέλω να λύσω μια ανίσωση 2ου βαθμου π.χ $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0,\alpha\ne 0$ ακολουθώ τους παρακάτω πίνακες (αναλόγως τη Διακρίνουσα του τριωνύμου).

αν Δ>0

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α	ετερόσημο του α	ομόσημο του α

αν Δ=0

x	$-\infty$ $x_{1,2}$	$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α	ομόσημο του α

αν Δ<0

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α

Παράδειγμα

Να συναληθεύσετε τις ανισώσεις

$-x^2+7x-6>0$ και $3x^2-8x-3<0$

Λύση

Θα λύσω την κάθε μια ανίσωση χωριστά και στο τέλος θα κάνω συναλήθευση

$-x^2+7x-6>0$

Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=7^2-4(-1)(-6)=49-24=25>0$

Άρα $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-7\pm5}{2(-1)}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-7+5}{-2}=1 \\ x_2=\dfrac{-7-5}{-2}=6 \end{cases}$

x	$-\infty$	1		6	$+\infty$
$-x^2+7x-6$	-	0	+	0	-

Εγώ θέλω $-x^2+7x-6>0$ άρα $x\in(1,6)$

για την ανίσωση $3x^2-8x-3<0$

Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot3(-3)=64+36=100>0$

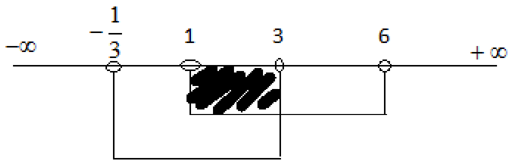
Άρα $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-8) \pm 10}{2 \cdot 3} =$ $\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{8+10}{6} = 3 \\ x_2 = \dfrac{8-10}{6} = -\dfrac{1}{3} \end{array}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3x^2-8x-3$	+	0	-	0	+	

Άρα $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, 3\right)$

$-\infty$ $+\infty$ $-\frac{1}{3}$

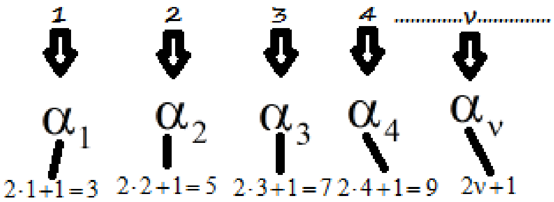
Συναλήθευση



Άρα οι κοινές λύσεις είναι εκείνα τα $x \in (1,3)$

Αριθμητική-Γεωμετρική πρόοδος

Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών (1,2,3,…,ν,…) στους πραγματικούς.



Ο α_1 είναι ο 1ος όρος της ακολουθίας

ο α_2 ο 2ος

ο α_ν ο ν-οστός όρος της ακολουθίας.

Σε μια ακολουθία αν ξέρω τον ν-οστό όρο της τότε μπορώ να βρώ όλους τους όρους της βάζοντας στη θέση του ν τιμές.

Υπάρχουν όμως ακολουθίες για τις οποίες είναι δύσκολο να βρω μαθηματικό τύπο για τον ν-οστό όρο.

<u>Ένας ακόμη τρόπος</u> για να ορίσω μια ακολουθία είναι με τον **αναδρομικό τύπο**.

π.χ (ακολουθία Fibonacci)
Έστω η ακολουθία αριθμών η οποία έχει για 1ο της όρο το 1 για 2ο πάλι το 1 και απο εκεί και πέρα είναι ίσος με το άθροισμα των δυο προηγούμενων όρων.
Δηλαδή $\alpha_1=1, \alpha_2=1$, $\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$
Έτσι εχω ορίσει την ακολουθία αναδρομικά δηλαδή εχω όσους αρχικούς όρους χρειάζομαι για να αρχίσει ο αναδρομικός τύπος να δουλεύει.Δηλαδή ο τύπος $\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$ για $\nu=1$ δίνει:
$\alpha_3=\alpha_2+\alpha_1=1+1=2$, για $\nu=2$…

Αριθμητική πρόοδος

Μια ακολουθία στην οποία κάθε όρος προκύπτει απο τον προηγούμενο με την πρόσθεση πάντοτε του ίδιου αριθμού ονομάζεται **αριθμητική πρόοδος.**

Τον αριθμό αυτόν τον ονομάζουμε διαφορά της προόδου και τον συμβολίζουμε με ω.

Άρα μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος αν και μόνο αν

$$\boxed{\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega}$$

- ***Ο ν-οστός*** όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω: $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$
- Τρείς αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$.

  Ο **β** λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α,γ.
- **Άθροισμα** των πρώτων **ν όρων** αριθμητικής προόδου

  $S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ ή $S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]$

Γεωμετρική πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος αν κάθε όρος της προκύπτει απο τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επι τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτόν τον λέμε λόγο της προόδου και τον συμβολίζουμε με λ.

Μια ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot\lambda} \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\lambda}$$

- Ο ν-οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$
- Τρείς μη μηδενικοί αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$
- Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

Σημειώσεις στις συναρτήσεις

Συνάρτηση ειναι μια έννοια η οποία εκτός απο τη μαθηματική μας ζωή χρησιμοποιείται συχνά και στην καθημερινότητά μας.

Παράδειγμα

Έχω 5 φίλους.

Τον Αριστομένη, τον Κλέαρχο, την Εμέλεια, τον Θρασύβουλο και την Εφτέρπη!

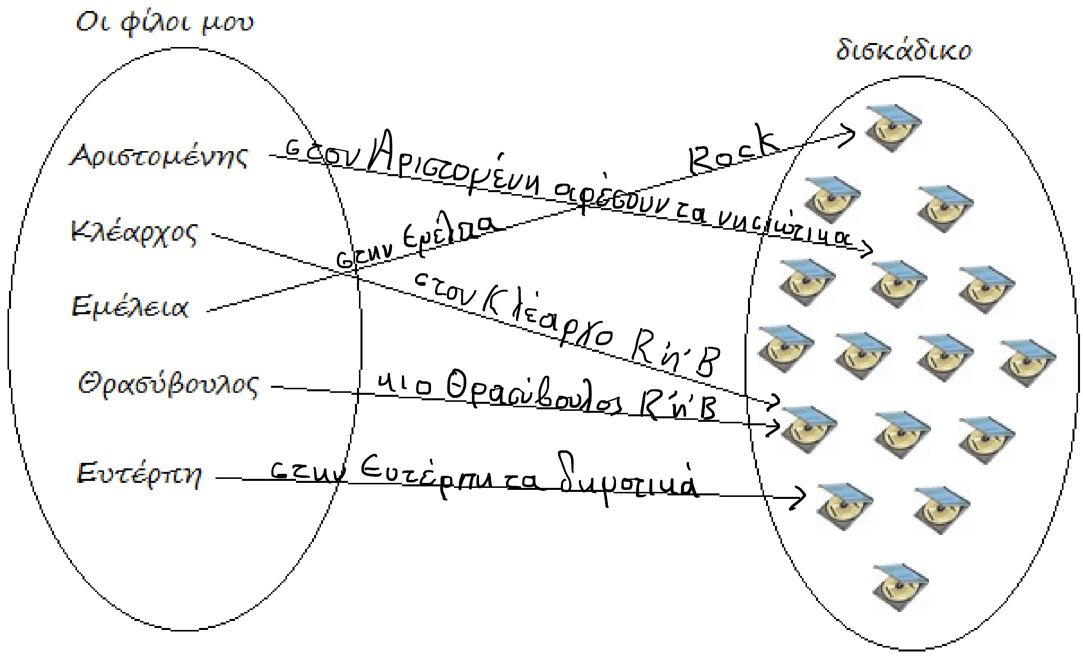
Τους αρέσει πολύ η μουσική οπότε σκέφτομαι να τους κάνω δώρο απο ΕΝΑ CD (τονίζω το ΕΝΑ γιατι όπως θα δούμε παρακάτω είναι πολύ σημαντικό στην έννοια της συνάρτησης).

Πηγαίνω λοιπόν σε ένα δισκάδικο να διαλέξω τα δώρα μου.

Θυμηθήτε τρία πράγματα:

1. ΌΛΟΙ οι φίλοι μου πρέπει να πάρουν δώρο.
2. ΌΛΟΙ οι φίλοι μου πρέπει να πάρουν απο ΕΝΑ δώρο.
3. Αν θέλω μπορώ σε δυο ή και σε όλους τους φίλους μου να πάρω το ίδιο CD δώρο(το δισκάδικο έχει πολλά αντίγραφα απο κάθε CD).

Φυσικά κριτήριο για την επιλογή των CD θα είναι οι μουσικές προτιμήσεις καθενός απο τους φίλους μου.



Έτσι όλοι οι φίλοι μου έμειναν ικανοποιημένοι.

Ας κάνουμε όμως κάποιες παρατηρήσεις.

Είναι σημαντικό (για τα μαθηματικά) που δεν ξέχασα να πάρω δώρο σε κάποιον φίλο μου.

Είναι σημαντικό (για τα μαθηματικά) που δεν έκανα διακρίσεις και όλοι οι φίλοι μου πήραν απο ΕΝΑ δώρο.

Είναι σημαντικό (και πάλι για τα μαθηματικά) που την επιλογή του δώρου για κάθε φίλο μου δεν την έκανα τυχαία αλλά έβαλα εναν κανόνα (τις μουσικές προτιμήσεις των φίλων μου).

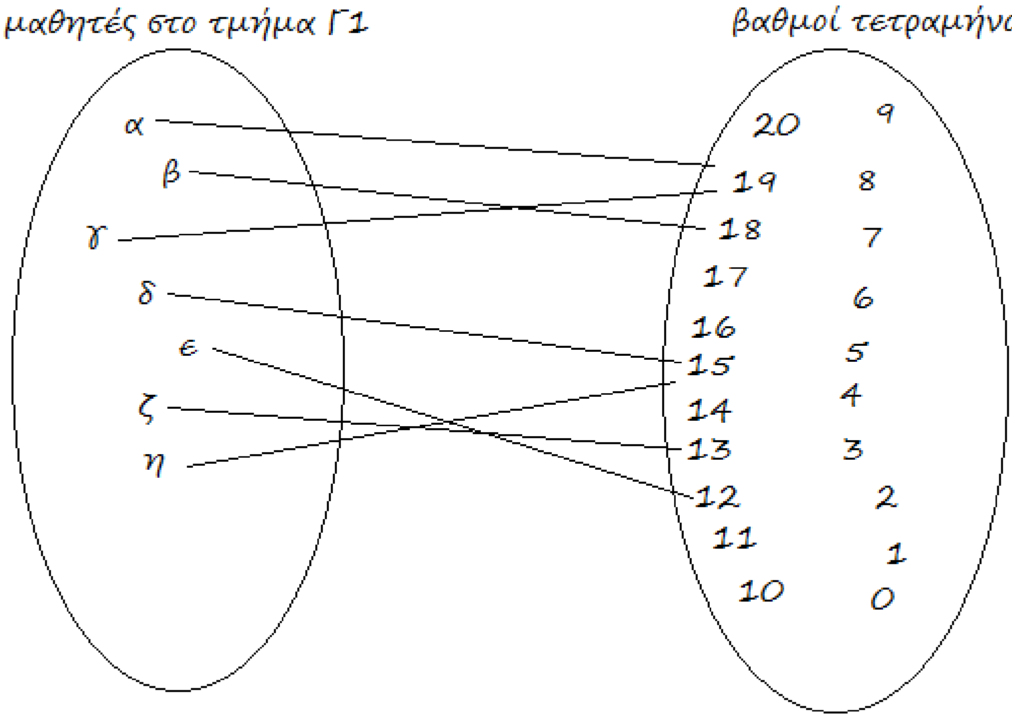
Ας έρθουμε όμως λίγο πιο κοντά στα μαθηματικά με ενα ακόμα

Παράδειγμα

Σε κάποιο σχολείο των Τρικάλων στο τμήμα Γ1 (εφτά ατόμων) ο καθηγητής των Μαθηματικών ετοιμάζεται να βάλει βαθμούς. Αποφασίζει οτι **η διαδικασία (κανόνας)** με την οποία θα βρεί τον βαθμό που πρέπει να βάλει σε κάθε μαθητή θε είναι η εξής:
θα πάρει τον βαθμό της γραπτής εξέτασης θα τον προσθέσει με τον βαθμό της προφορικής εξέτασης ,το άθροισμά τους θα το διαιρέσει δια 2 και το αποτέλεσμα (αν είναι δεκαδικό θα το στρογγυλοποιήσει στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο) θα είναι ο βαθμός του τετραμήνου.

Μαθητής	Γραπτά	Προφορικά	Τελικός βαθμός
α	18	19	19
β	16	19	18
γ	20	17	19
δ	10	20	15
ε	5	18	12
ζ	14	12	13
η	13	16	15

Έκανε λοιπόν την παρακάτω αντιστοίχιση.



Ξανά οι παρατηρήσεις μας.

Στην ομάδα (σύνολο) των μαθητών του Γ1 δεν επιτρέπεται να βάλω μαθητές που δεν ανήκουν στο τμήμα Γ1.

Όλοι οι μαθητές του Γ1 πρέπει να πάρουν βαθμό.

Δεν γίνεται σε έναν μαθητή να βάλω δυο βαθμούς.

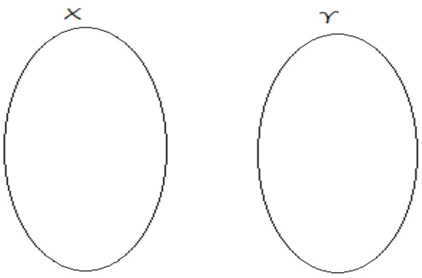
Μπορώ σε δυο ή περρισότερους μαθητές να βάλω τον ίδιο βαθμό.

Δεν μπορώ σε έναν μαθητή να βάλω βαθμό έξω απο την ομάδα (σύνολο) απο 0 εώς και 20.

Δεν με νοιάζει να χρησιμοποιήσω όλη την κλίμακα της βαθμολογίας.

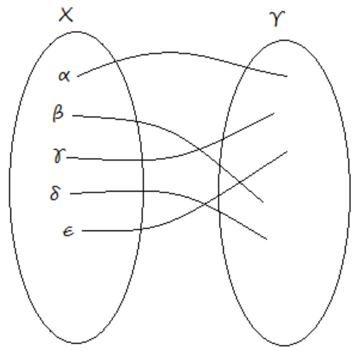
Για να βρώ τον βαθμό χρησιμοποιώ έναν κανόνα (μια διαδικασία) και δεν τους βάζω στην τύχη.

<u>για να οργανωθούμε λίγο τώρα</u>



Σε όλα τα παραδείγματα έχω δυο ομάδες **(στα μαθηματικά λέγονται σύνολα).**
το πρώτο ονομάζεται **πεδίο ορισμού(Χ)**
το δεύτερο ονομάζεται **πεδίο τιμών ή σύνολο τιμών (Υ).**

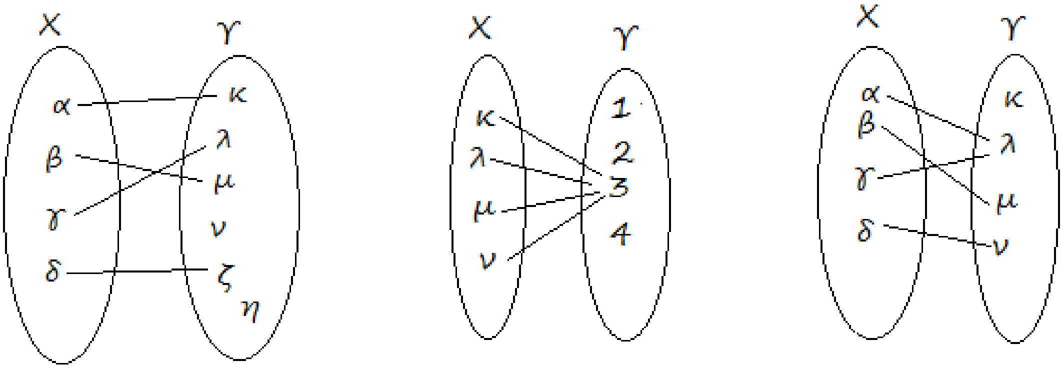
Τα στοιχεία του πεδίου ορισμού (1ο σύνολο) πρέπει να αντιστοιχίζονται **<u>ΌΛΑ</u>** σε **<u>ΈΝΑ ΜΟΝΟ</u>** στοιχείο του συνόλου τιμών(2ο σύνολο)
(δηλαδή αν κάποιο στοιχείο του συνόλου Χ δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του συνόλου Υ τότε έχω πρόβλημα).



Η αντιστοίχιση που κάνω πρέπει να γίνεται με κάποιον κανόνα (με κάποια διαδικασία) και όχι τυχαία.

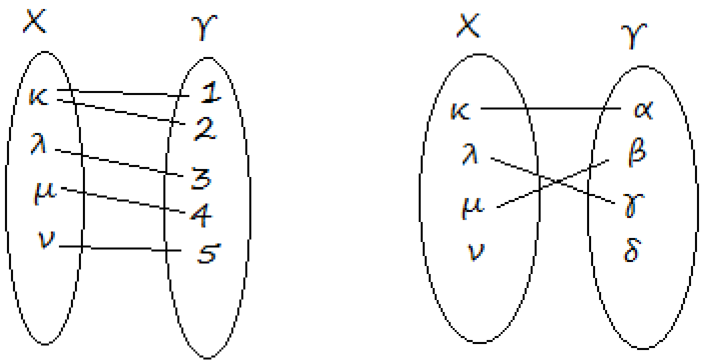
Όταν τηρούνται όλες οι παραπάνω προυποθέσεις τότε ο κανόνας (διαδικασία) αυτός με την βοήθεια του οποίου κάνω την αντιστοίχιση είναι μια συνάρτηση.

<u>Περιπτώσεις αντιστοίχισης πού έχω συνάρτηση</u>



δεν με νοιάζει(προς το παρών) αν τα Χ αντιστοιχίζονται σε διαφορετικά ή στο ίδιο Υ.Αυτό που θέλω είναι <u>όλα</u> τα Χ να αντιστοιχίζονται σε κάποιο Υ.

<u>Περιπτώσεις αντιστοίχισης που δέν έχω συνάρτηση</u>



Έχω πρόβλημα όταν κάποιο Χ αντιστοιχίζεται σε δυο διαφορετικά Υ

ή και αν κάποιο Χ δεν αντιστοιχίζεται πουθενά.

<u>Επιστροφή στα μαθηματικά τώρα</u>

Στα μαθηματικά παίζω με τους αριθμούς.Άρα τα σύνολα Χ(πεδίο ορισμού) και Υ(σύνολο τιμών) θα είναι σύνολα αριθμών.

Ορισμός συνάρτησης :Εστω Α ενα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f με την οποία κάθε στοιχείο $x \in \mathrm{A}$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y.Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Με την μαθηματική ορολογία εκφράζω τη διαδικασία αυτή ως εξής:

$f: A \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)$

δηλαδή παιρνω ενα x (έναν μαθητη απο το δεύτερο παράδειγμα της σελίδας 3) απο το πεδίο ορισμού Α(απο την ομάδα των μαθητών του τμήματος Γ1) και το αντιστοιχίζω με τον κανόνα της συνάρτησης f (του μέσου όρου του γραπτού και του προφορικού βαθμού) σε μια τιμή του συνόλου τιμών (της ομάδας της βαθμολογίας απο 0-20).

Δηλαδή κάθε φορά έχω τα δυο γνωστά μου (απο τα προηγούμενα παραδείγματα) σύνολα.Τι όνομα τους δίνω κάθε φορά (Χ και Υ, Α και Β, Α και ℝ ή οτιδήποτε άλλο) εξαρτάται απο την κάθε άσκηση.

<u>Ας μιλήσουμε λίγο για τους συμβολισμούς στις συναρτήσεις:</u>

- το γράμμα **x** που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του Α (1ο σύνολο) λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**
- το γράμμα **y** που συμβολίζει την τιμή του δεύτερου συνόλου (σύνολο τιμών) στην οποία αντιστοιχίζεται **το x μέσα απο τη συνάρτηση f** λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- **το πεδίο ορισμού Α** της συνάρτησης f συνήθως **συμβολίζεται με** D_f.
- το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές στις οποίες η f αντιστοιχίζει κάθε x που ανήκει στο Α λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με f(A). Είναι δηλαδή :

f(A)={y∈ ℝ/y=f(x) για κάποιο $x \in A$}

Σε αυτό το σημείο πρέπει να θέσουμε μια σημαντική ερώτηση:

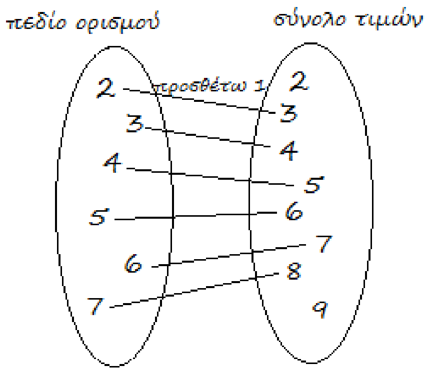
<u>**ΠΟΙΟΥΣ ΤΡΟΠΟΥΣ ΕΧΩ ΓΙΑ ΝΑ ΠΑΡΑΣΤΗΣΩ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ;**</u>

- ✓ με τη βοήθεια των δυο συνόλων (βλέπε αρχικά παραδείγματα)
- ✓ με τον τύπο της
- ✓ και με τη γραφική της παράσταση

Για να δούμε κάθε έναν απο αυτούς τους τρόπους με ένα παράδειγμα

<u>**Παράδειγμα 3**</u>

Έχω τη συνάρτηση f η οποία σε κάθε έναν φυσικό απο το 2 μέχρι το 7 (πεδίο ορισμού) προσθέτει μια μονάδα. Έτσι έχουμε:



1ος τρόπος(μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε απλές συναρτήσεις).Αν έκανα την αλλαγή και το πεδίο ορισμού αντί να έχει τους φυσικούς απο το 2 μέχρι το 7 ,είχε τους πραγματικούς απο το 2 μέχρι το 7 θα μπορούσα να τους γράψω όλους αυτούς στην πρώτη ομάδα;

2^{ος} τρόπος(με τη βοήθεια τύπου)

(αντί να πώ οτι η συνάρτηση f παίρνει κάθε έναν φυσικό αριθμό απο το 2 μέχρι το 7 και του προσθέτει μια μονάδα) λέω πολύ απλά στη μαθηματική γλώσσα :

$A=[2,7]\subseteq\mathbb{Z}$, Ονομάζω σύνολο Α το σύνολο που περιέχει τους φυσικούς απο το 2 μέχρι και το 7.

$f:A\rightarrow\mathbb{R}$, Ονομάζω τη συνάρτησή μου f και ονομάζω και τα δυο μου

$x\rightarrow f(x)$ σύνολα.Το προηγούμενο Α το πεδίο ορισμού και το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ σαν σύνολο τιμών.

$f(x)=x+1$, Ορίζω τη διαδικασία (κανόνα) με την οποία η f παίρνει κάθε x απο το πεδίο ορισμού A του προσθέτει μια μονάδα τον μεταμορφώνει σε f(x).

Αν θέλω να βρώ που αντιστοιχίζεται το x=3 πεδιού ορισμού πηγαίνω στον τύπο της f εξαφανίζω απο παντού το x και βάζω στη θέση του τον αριθμό 3.Έτσι έχω $\begin{matrix} f(3)=3+1 \\ \Leftrightarrow f(3)=4 \end{matrix}$.Δηλαδή το 3 του πρώτου συνόλου καλλίπτεται απο την ''μαγικη'' ιδιότητα της f και αντιστοιχίζεται στο 4 του δεύτερου συνόλου.

3^{ος} τρόπος (μέσω της γραφικής της παράστασης).

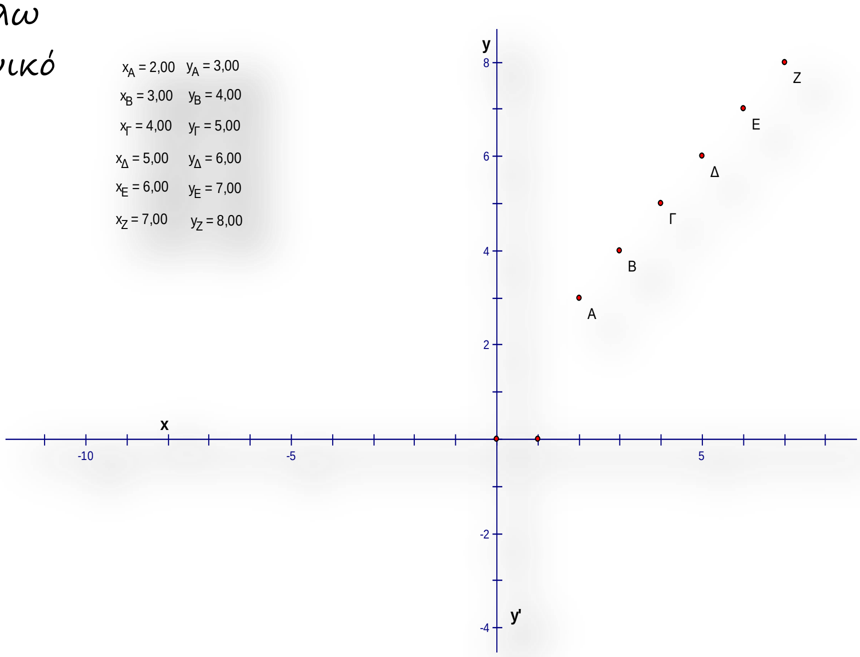
Αν για κάθε τιμή x του πεδίου ορισμού σχηματίσω τα ζευγάρια

(x,y) θεωρώντας οτι $f(x)=y$ τότε κάθε ένα ζευγάρι απο αυτά παριστάνει ένα σημείο σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.Αν ενώσω όλα αυτά τα σημεία που προκύπτουν τότε έχω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που τη συμβολίζω με C_f.

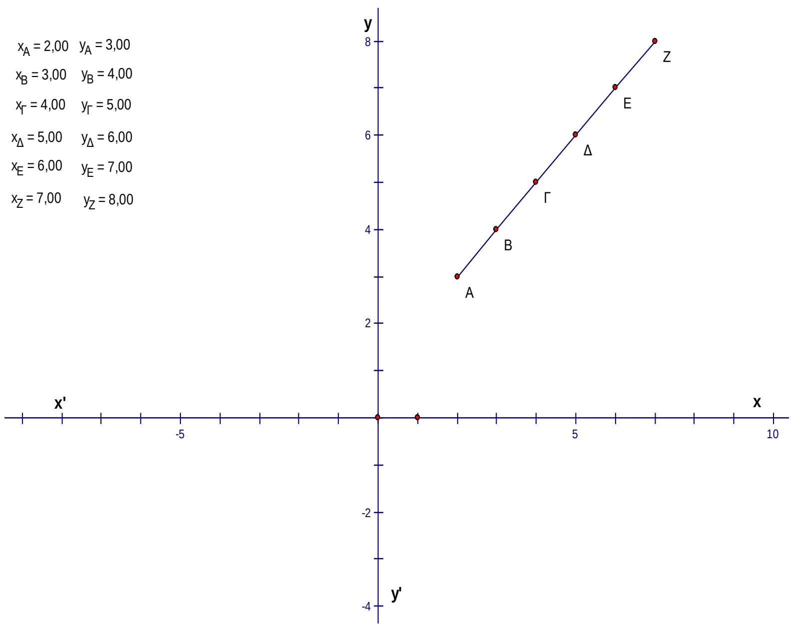
Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος(με την απαραίτητη αλλαγή οτι $A\subseteq\mathbb{R}$) έχω τα εξής ζευγάρια:
$(2,f(2)),(3,f(3)),(4,f(4)),(5,f(5)),(6,f(6)),(7,f(7))$

ή πιο απλά: $(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,8)$

Θα τα βάλω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων:



και στη συνέχεια θα τα ενώσω (η αλλαγή στο πεδίο ορισμού έγινε γιατί αν ήμουνα στους φυσικούς δεν θα μπορούσα να ενώσω τα σημεία αφού στα ενδιάμεσα σημεία δεν θα ορίζονταν η συνάρτησή μου!)



και έχω φτιάξει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = x+1$ με πεδίο ορισμού το $A = [2,7]$.

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τη συμβολίζω με C_f.

Αφού παρουσιάσαμε τους τρείς τρόπους με τους οποίους μπορεί να οριστεί μια συνάρτηση τώρα θα δούμε πιο λεπτομερώς τους δυο τελευταίους, δηλαδή τον ορισμό της συνάρτησης με τη βοήθεια του τύπου της και με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης και τελικά να διαπιστώσουμε οτι ο ένας συμπληρώνει τον άλλον.

<u>Ανάλυση στον τύπο συνάρτησης</u>

Το πρώτο στοιχείο που με ενδιαφέρει να γνώρίζω πάντα σε μια συνάρτηση είναι το πεδίο ορισμού της.

Το πεδίο ορισμού(που συνήθως δεν θα μου δίνεται και πρέπει να το βρίσκω) είναι το μεγαλύτερο δυνατό σύνολο στο οποίο η συνάρτηση έχει νόημα (ορίζεται).π.χ δεν εχει νόημα στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση $\sqrt{-1}$.

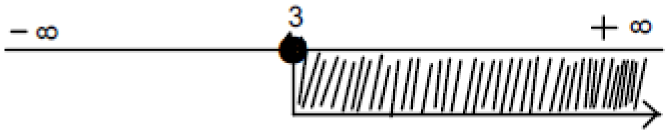
Οι παραστάσεις στις οποίες πρέπει να είμαι προσεκτικός ειναι:οι ρίζες,τα κλάσματα και οι λογάριθμοι.

- Οι ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς ορίζονται μόνο αν η υπόριζη ποσότητα είναι μή αρνητική.$\sqrt{a}, a \geq 0$.Άρα όταν η συνάρτησή μου περιέχει ρίζα πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι μεγαλύτερη ή και ίση με το μηδέν.

π.χ Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x+3}-5$

Η συνάρτηση f ορίζεται (έχει νόημα) για κάθε x για το οποίο ισχύει $x-3 \geq 0$.

Άρα για το πεδίο ορισμού πρέπει $x-3 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq 3$



- Τα κλάσματα ορίζονται μόνο αν ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν.Έτσι απαιτώ ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός.

π.χ Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2-4x-5}$

Για το πεδίο ορισμού: Πρέπει $x^2-4x-5\neq 0$

Λύνω την αντίστοιχη εξίσωση.Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=16+20=36>0$

και $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{4\pm 6}{2}=\left[\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=-1 \end{array}\right.$

Άρα για το πεδίο ορισμου πρέπει: $x\neq 5$ και $x\neq -1$.

Δηλαδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(-\infty,-1)\cup(-1,5)\cup(5,+\infty)$ ή $A=\mathbb{R}-\{-1,5\}$.

- Ο λογάριθμος ορίζεται μόνο αν η πόσοτητα που βρίσκεται μέσα του είναι θετική. Έτσι αν η συνάρτηση μου περιέχει λογάριθμο απαιτώ αυτό που περιέχεται στο λογάριθμο να είναι θετικό.

π.χ.Έστω η συνάρτηση: $f(x)=\ln\left(x^2-4\right)$

Για το πεδίο ορισμού πρέπει: $x^2-4>0 \Leftrightarrow$

$$x^2>4 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{x^2}>\sqrt{4} \Leftrightarrow$$
$$|x|>2 \Leftrightarrow$$
$$x>2 \text{ ή } x<-2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.