

6^η εργαστηριακή άσκηση: Πείραμα λυγισμού

Σκοπός του πειράματος

Σκοπός της δοκιμής του λυγισμού είναι ο πειραματικός προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού $P_{κρ}$ σε μια δοκό σταθερής διατομής, η οποία καταπονείται από σημειακή δύναμη προοδευτικά αυξανόμενου μέτρου. Στη συνέχεια, πρέπει να ελεγχθεί, μέσω της λυγηρότητας, αν το δοκίμιο να βρίσκεται στην ελαστική περιοχή καταπόνησής του, δηλαδή αν ισχύει ο τύπος του Euler. Τέλος, πρέπει να προσδιοριστεί η απόκλιση που εμφανίζει η πειραματική τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού $P_{κρ,π}$ από τη θεωρητικά υπολογιζόμενη μέσω του τύπου του Euler $P_{κρ,θ}$.

Γενικές έννοιες - θεωρία

Λυγισμός ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο μια ελαστική ράβδος με ευθύγραμμο άξονα, που υποβάλλεται σε κεντρική θλίψη με συνεχώς αυξανόμενη τιμή φορτίου, μεταπίπτει, μετά από μια οριακή τιμή φορτίου, σε κατάσταση ασταθούς ισορροπίας. Η ισορροπία χαρακτηρίζεται ως *ασταθής* διότι στην παραμικρή διαταραχή (επίδραση φορτίου κατά την εγκάρσια κατεύθυνση) επέρχεται κατάρρευση. Η διαταραχή στην πράξη δεν προκαλείται με πρόθεση αλλά αυθόρμητα λόγω μικροατελειών που υφίστανται στην κατασκευή και λόγω της όχι απόλυτα αξονικής φόρτισης. Η μορφή της παραμορφωμένης ράβδου είναι παρόμοια με αυτή μιας δοκού που δέχεται καμπτικό φορτίο στο μέσο της. Γενικά, το φαινόμενο του λυγισμού μίας ράβδου επηρεάζεται από (α) τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού της, (β) το σχήμα της διατομής της και (γ) τον τρόπο στήριξης των άκρων της.

Τη στιγμή εμφάνισης του φαινομένου του λυγισμού, η κατασκευή αντέχει μικρότερη τιμή φορτίου από αυτήν που άντεχε μέχρι την έναρξη του φαινομένου. Η μειωμένη αντοχή οφείλεται στην αλλαγή της τοπολογίας, δηλαδή στο γεγονός ότι η ράβδος έχει ξεφύγει από την ευθύγραμμη κατάσταση συνεπώς το θλιπτικό φορτίο πάνω στις εγκάρσιες διατομές ασκείται πλέον έκκεντρα με αποτέλεσμα στη ράβδο να αναπτύσσεται και ροπή κάμψης η οποία αυξάνει περαιτέρω την εκκεντρότητα, που με την σειρά της επιδρά στη ροπή κάμψης κ.ο.κ οπότε γρήγορα δημιουργείται μεγάλη καμπυλότητα, το υλικό αναπτύσσει πλαστική παραμόρφωση και τέλος αστοχεί.

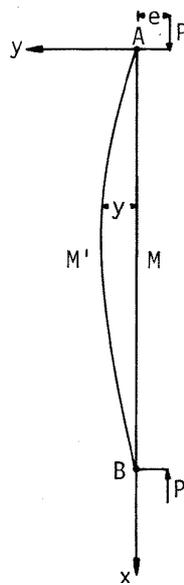
Συνήθεις αιτίες της δημιουργίας ασταθούς ισορροπίας είναι: (α) η “από κατασκευής” ελαφρά καμπυλότητα της ράβδου, (β) η, επίσης, “από κατασκευής”, αδυναμία μετάδοσης της θλιπτικής δύναμης απόλυτα κεντρικά, δηλαδή κατά τον ιδεατό επιμήκη άξονα της ράβδου, (γ) η ανομοιόμορφη κατανομή της τάσης στις εγκάρσιες διατομές της ράβδου, (δ) η μη απόλυτη ομοιογένεια του υλικού ως προς τη μηχανική του συμπεριφορά και (ε) οι εξωτερικές δυνάμεις που μπορεί να επενεργήσουν κάθετα προς τον άξονα της ράβδου και δεν μπορούν να προβλεφθούν ούτε να υπολογιστούν εκ των προτέρων.

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού $P_{κρ}$ ονομάζεται το θλιπτικό φορτίο που βάζει ένα σαφές διαχωριστικό όριο μεταξύ της ευσταθούς ισορροπίας στην κατάσταση της απλής θλίψης και της ασταθούς ισορροπίας στην κατάσταση του λυγισμού.

Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου λυγισμού αμφιαρθρωτής ράβδου

Έστω η αμφιαρθρωτή ράβδος του διπλανού σχήματος, στην οποία ασκείται θλιπτικό φορτίο P κεντρικά. Για τον υπολογισμό της κρίσιμης τιμής του θεωρείται σύστημα συντεταγμένων (x,y) που διέρχεται από την άρθρωση A της ράβδου. Η ροπή κάμψης που αναπτύσσεται σε κάθε διατομή της ράβδου που απέχει x από το σημείο A δίνεται από τη σχέση: $M(x)=P \cdot y(x)$, ενώ η ροπή κάμψης συνδέεται με το βέλος κάμψης με τη σχέση $E \cdot I_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$. Τελικά, η διαφορική εξίσωση της

ελαστικής γραμμής δίνει $E \cdot I_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \cdot y(x)$. Αν οριστεί το μέγεθος $k^2 = \frac{P}{E \cdot I_z}$ τότε η παραπάνω



διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως $\frac{d^2 y}{dx^2} + \kappa^2 \cdot y(x) = 0$ και η γενική της λύση είναι της μορφής: $y = C_1 \cdot \sin(\kappa x) + C_2 \cdot \cos(\kappa x)$, όπου C_1, C_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης που υπολογίζονται μέσω των οριακών συνθηκών.

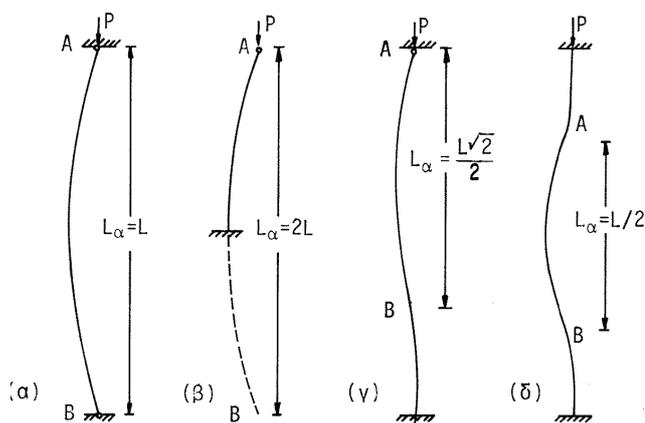
Έτσι, για το σημείο A με $(x=0, y=0)$, προκύπτει ότι $C_2=0$, ενώ για το σημείο B με $(x=L, y=0)$ προκύπτει $C_1=0$ ή $\sin(\kappa L)=0$. Στην πρώτη περίπτωση η ράβδος ισορροπεί κατακόρυφα, ενώ στη δεύτερη περίπτωση ισχύει: $\kappa \cdot L = n \cdot \pi$, όπου n ακέραιος αριθμός. Αν $n=1$ τότε λαμβάνεται η μικρότερη τιμή του φορτίου P , δηλαδή το κρίσιμο φορτίο $P_{κρ}$, για το οποίο, βάσει του ορισμού του κ που προηγήθηκε, ισχύει $P_{κρ} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2}$. Αυτή η σχέση αποτελεί τον τύπο του Euler για λεπτή ορθή ράβδο.

Η διερεύνηση του κρίσιμου φορτίου οδηγεί σε τρεις περιπτώσεις: $P < P_{κρ}$, $P = P_{κρ}$ και $P > P_{κρ}$. Στην πρώτη περίπτωση το βέλος κάμψης είναι πάντα μηδενικό οπότε επικρατεί ισορροπία που χαρακτηρίζεται ως *ευσταθής*, δηλαδή αν η ράβδος ωθηθεί προς τα πλάγια (με μικρό φορτίο) και έπειτα αφεθεί ελεύθερη, αυτή θα επανέλθει στην αρχική της θέση. Στη δεύτερη περίπτωση, διατηρείται η ισορροπία με μικρές τιμές του βέλους κάμψης, παίρνοντας το χαρακτηρισμό *αδιάφορης* ή *ουδέτερης*. Συνεπώς, αν η ράβδος ωθηθεί προς τα πλάγια και αφεθεί τότε αυτή θα διατηρήσει μια μικρή απόκλιση. Τέλος, στην τρίτη περίπτωση αν ασκηθεί στη ράβδο μια οποιαδήποτε ώθηση προς τα πλάγια, θα έχει ως συνέπεια, την απροσδιόριστη αύξηση της απόκλισης, οπότε η ισορροπία αυτή χαρακτηρίζεται *ασταθής*.

Κρίσιμο φορτίο και άλλες στηρίξεις

Γενικά, υπάρχουν τέσσερις τρόποι στήριξης μιας δοκού, οι οποίοι επηρεάζουν το φαινόμενο του λυγισμού. Σε κάθε περίπτωση ορίζεται το *ελεύθερο* ή *ανηγμένο μήκος λυγισμού* L_a ως η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων καμψής της συνάρτησης του βέλους κάμψης το οποίο αναπτύσσεται με την έναρξη του λυγισμού. Τα σημεία καμψής, και για τις τέσσερις περιπτώσεις στήριξης του ακόλουθου σχήματος, είναι τα A και B ενώ L είναι το πραγματικό μήκος της ράβδου σε κάθε περίπτωση.

Αμφιαρθρωτή στήριξη (άρθρωση και στα δύο άκρα): Τα άκρα του δοκιμίου μπορούν να περιστρέφονται ελεύθερα και μπορούν να μετακινηθούν μόνο κατά την αρχική διεύθυνση του επιμήκους άξονα του δοκιμίου.



Αυτή η περίπτωση είναι θεμελιώδης και είναι εκείνη που συναντούμε συχνότερα στις δομικές κατασκευές.

Ελεύθερο το ένα άκρο και πακτωμένο το άλλο.

Πάκτωση στο ένα άκρο και άρθρωση στο άλλο.

Αμφίπακτη στήριξη (πάκτωση και στα δύο άκρα): Τα δύο άκρα της δοκού μπορούν να κινηθούν το καθένα προς το μέρος του άλλου, κατά τη διεύθυνση του αρχικού επιμήκους άξονα του δοκιμίου, χωρίς να έχουν τη δυνατότητα περιστροφής.

Το ανηγμένο μήκος λυγισμού είναι το μήκος που αντιστοιχεί στην περίπτωση αμφιαρθρωτής στήριξης και η

σχέση υπολογισμού του είναι $P_{κρ} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_a^2}$. Αντίστοιχα, ορίζεται η *κρίσιμη τάση λυγισμού*, $\sigma_{κ}$, η οποία υπολογίζεται ως $\sigma_{κ} = \frac{P_{κρ}}{S} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_a^2 \cdot S}$, όπου S το εμβαδόν της διατομής της ράβδου.

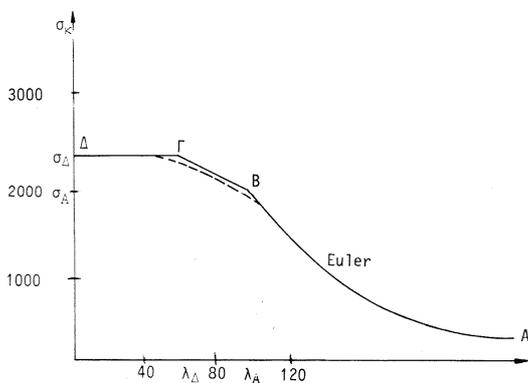
Στον υπολογισμό της κρίσιμης τάσης $\sigma_{κ}$ είναι φανερό ότι πρέπει να επιλεγεί η ελάχιστη τιμή της ροπής αδράνειας I της διατομής ως προς διάφορους κεντρικούς άξονες της διότι αυτή αντιστοιχεί στη δυσμενέστερη περίπτωση για το ενδεχόμενο του λυγισμού. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η τάση λυγισμού εξαρτάται από

το υλικό (E) και από γεωμετρικά χαρακτηριστικά τόσο της διατομής ($\frac{I}{S}$) όσο και του ανηγμένου μήκους (L_a).

Ως *λυγιρότητα* ορίζεται το μέγεθος $\lambda = \frac{L_a}{i_{min}}$, όπου $i_{min}^2 = \frac{I}{S}$ και παρέχει ένα μέτρο της ευαισθησίας της ράβδου σε λυγισμό. Ανάλογα με την τιμή της λυγιρότητάς τους οι ράβδοι διακρίνονται σε τρεις τύπους, σε *μακρές ή λεπτές* για $\lambda \geq 100$, *μέσες* για $60 < \lambda < 100$ και *βραχείες* για $\lambda \leq 60$. Η θεωρία του Euler εφαρμόζεται στις λεπτές ράβδους. Αντικαθιστώντας τη λυγιρότητα στον τύπο υπολογισμού της κρίσιμης τάσης λαμβάνεται η σχέση $\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$, η τιμή αυτή αποκτά σημασία μόνον όταν είναι μικρότερη της τάσης αναλογίας σε θλίψη, διότι ο τύπος του Euler προϋποθέτει γραμμικό ελαστικό υλικό. Συνεπώς, οριακά, μπορεί να λάβει την τιμή της τάσης αναλογίας σ_a . Αντικαθιστώντας την σ_k με την σ_a και λύνοντας ως προς τη λυγιρότητα λαμβάνεται η κρίσιμη τιμή λυγιρότητας $\lambda_{kp} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_a}}$. Η τιμή αυτή όπως φαίνεται εξαρτάται αποκλειστικά από τα χαρακτηριστικά του υλικού. Η θεωρία του Euler έχει εφαρμογή όσο η αναπτυσσόμενη τάση είναι μικρότερη από την τάση αναλογίας του υλικού.

Καμπύλη Euler

Η τάση συναρτήσεται της λυγιρότητας, $\sigma_k = f(\lambda)$, υπολογίζεται ως $\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$ και αποτελεί την καμπύλη Euler, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στην καμπύλη του Euler φαίνεται ότι η τάση λυγισμού αυξάνεται όσο μειώνεται η λυγιρότητα. Από το διπλανό διάγραμμα, το οποίο αναφέρεται σε συγκεκριμένο υλικό, αλλά η μορφή του είναι γενική, δίνεται για κάθε τιμή της λυγιρότητας η τάση αστοχίας της ράβδου, είτε η ράβδος αστοχεί λόγω διαρροής είτε λόγω λυγισμού είτε με συνδυασμό και των δύο.



Στην καμπύλη Euler διακρίνονται τρεις περιοχές. Αρχικά, εμφανίζεται η *περιοχή του ελαστικού λυγισμού AB* όπου ισχύει ότι $\sigma_k \leq \sigma_a$ και $\lambda \geq \lambda_A$. Σε αυτή την περιοχή ισχύει ο τύπος του Euler. Η περιοχή ΒΓ αντιστοιχεί στον *ελαστοπλαστικό λυγισμό* και γι' αυτόν έχουν διατυπωθεί μέχρι σήμερα τρεις θεωρίες αυτή του Engesser, του Karman και του Tetmajer. Τέλος, στην περιοχή ΓΔ της καμπύλης η ράβδος αστοχεί εξαιτίας διαρροής, πριν την εμφάνιση του φαινομένου

του λυγισμού. Για ενδιάμεσες τιμές λυγιρότητας $\lambda_A < \lambda < \lambda_A$ η καμπύλη του Euler μπορεί να συμπληρωθεί είτε από την ευθεία ΒΓ είτε από κάποια άλλη καμπύλη (διακεκομμένη καμπύλη του παραπάνω σχήματος), αλλά αυτό δεν παίζει ουσιαστικό ρόλο δεδομένου ότι οι διαφορές $\sigma_{\Delta} - \sigma_A$ είναι εν γένει μικρές.

Πειραματικό μέρος

Οι εργαστηριακές δοκιμές λυγισμού πραγματοποιούνται σε θλιπτικές μηχανές οι οποίες μπορούν επιβάλλουν θλιπτικό φορτίο με σταθερή ταχύτητα, ενώ είναι εφοδιασμένες με ειδικές "υποδοχές" ώστε να μπορεί να στηριχθεί το δοκίμιο αμφιαρθρωτά, αμφίπακτα ή με άρθρωση και πάκτωση, ανάλογα με τις απαιτήσεις της δοκιμής. Όταν πρόκειται για μεταλλικά δοκίμια, συνήθως αυτά διαμορφώνονται σε σχήμα "γωνιάς". Για τα δοκίμια αυτής της μορφής, στις υποδοχές έχουν χαραχθεί έκκεντρα δύο κάθετες μεταξύ τους "αυλακώσεις" έτσι ώστε τοποθετώντας σε αυτές τις ακραίες διατομές της γωνιάς, να εξασφαλίζεται η κεντροβαρική επιβολή του φορτίου στο δοκίμιο.

Πειραματικά, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού προσδιορίζεται πολύ εύκολα. Καθώς το δοκίμιο καταπονείται σε θλίψη, την στιγμή που εμφανίζεται λυγισμός, ο δείκτης φορτίου της μηχανής υποχωρεί, χαρακτηριστικό του

ότι το υλικό αστόχησε και δεν επιδέχεται παραπέρα φόρτιση, οπότε η τελική μεγίστη ένδειξη του φορτίου καθορίζει πειραματικά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Βιβλιογραφία

1. Δρ. Π. Α. Βουθούνης - Τεχνική Μηχανική αντοχή των υλικών, Αθήνα 1993
2. Ν. Ανδριανόπουλος, Ε. Κυριαζή, Κ. Λιακόπουλος, Πειραματική Αντοχή Υλικών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1991
3. Θ. Κερμανίδης - Εργαστήριο τεχνολογίας & αντοχής υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών.
4. <http://egnatia.ee.auth.gr/~achrono/pay/mt3005.html>
5. Δρ. Π. Α. Βουθούνης - Τεχνική Μηχανική αντοχή των υλικών, Αθήνα 1993
6. Θ. Κερμανίδης - Αντοχή των υλικών, Πάτρα 1995
7. Θ. Κερμανίδης - Εργαστήριο τεχνολογίας & αντοχής υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
8. F. Beer, Mechanics of materials, McGraw Hill, 2006
9. Κ. Ζαφείρης: Σημειώσεις Μεταλλικές Κατασκευές (Ε), Χαλκίδα, 2010
10. http://en.wikipedia.org/wiki/Stress%E2%80%93strain_curve
11. Δρ. Π. Α. Βουθούνης - Τεχνική Μηχανική αντοχή των υλικών, Αθήνα 1993
12. Ν. Ανδριανόπουλος, Ε. Κυριαζή, Κ. Λιακόπουλος, Πειραματική Αντοχή Υλικών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1991
13. Θ. Κερμανίδης - Εργαστήριο τεχνολογίας & αντοχής υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών.
14. <http://egnatia.ee.auth.gr/~achrono/pay/mt3005.html>
15. http://www.thefullwiki.org/Strength_of_materials/Lesson_2
- 16.