

3η εργαστηριακή άσκηση: Πείραμα κάμψης

Σκοπός του πειράματος της κάμψης είναι

- ο προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων (π.χ. όριο διαρροής σ_{bF} και όριο αντοχής σ_{bB} σε κάμψη) του υλικού του δοκιμίου και
- η μέτρηση του βέλους κάμψης του δοκιμίου

Γενικές έννοιες

Κάμψη ονομάζεται η καταπόνηση κατά την οποία το διάνυσμα της αναπτυσσόμενης ροπής είναι κάθετο στον επιμήκη άξονα της δοκού. Η καμπτική καταπόνηση μπορεί να δημιουργηθεί είτε από συγκεντρωμένο φορτίο σε κάποια θέση x κατά μήκος της δοκού είτε από ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία, όταν η δοκός στηρίζεται αμφιέριστα.

Η μελέτη της κάμψης απαιτεί τις παρακάτω παραδοχές που οφείλονται στον Bernoulli:

- κατά την κάμψη διατηρείται η επιπεδότητα των εγκαρσίων διατομών
- η δοκός αποτελείται από ανεξάρτητες διαμήκεις ίνες που παραμορφώνονται σαν να μην υπήρχαν οι υπόλοιπες.

Πρακτικά για τη μελέτη της παραμόρφωσης μιας καμπτόμενης δοκού μήκους l και ορθογωνικής διατομής $h \times b$ (ύψος \times πλάτος) πρέπει η μέγιστη μετατόπιση της δοκού να είναι πολύ μικρή συγκρινόμενη με το μήκος της l και να ισχύουν οι σχέσεις $10 \cdot h \leq l \leq 20 \cdot h$ και $h \leq 4 \cdot b$ ανάμεσα στα γεωμετρικά της μεγέθη.

Υπολογισμός ορθής τάσης κατά την κάμψη

Κατά την εφαρμογή των καμπτικών φορτίων κάθε διατομή στρέφεται και η τομή της παλαιάς με την νέα θέση της είναι μια ευθεία που καλείται *ουδέτερη γραμμή*. Οι ουδέτερες γραμμές όλων των διατομών αποτελούν την *ουδέτερη επιφάνεια* της δοκού. Η ουδέτερη επιφάνεια χωρίζει τις περιοχές της δοκού που θλίβονται από αυτές που εφελκύνονται.

Στο διπλανό σχήμα η ουδέτερη γραμμή είναι η γραμμή ΑΔ και η ουδέτερη επιφάνεια είναι η επιφάνεια ΚΛΜΝ. Η εφαρμογή της ροπής M οδηγεί σε εφελκυσμό των κάτω ινών της δοκού και θλίψη των άνω ινών και η κατανομή των τάσεων αυτών είναι γραμμική.

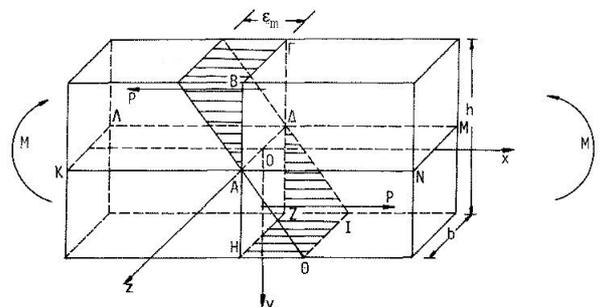
Στην περίπτωση της ελαστικής κάμψης η τάση και η παραμόρφωση μεταβάλλονται γραμμικά με το ύψος h της δοκού.

Η ορθή τάση λόγω κάμψης σ_b εξαρτάται από την καμπτική ροπή M_b σύμφωνα με τη σχέση:

$\sigma_b = \frac{M_b}{I_z} \cdot y$, όπου I_z η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας της διατομής ως προς τον άξονα z και y η τεταγμένη του σημείου στο οποίο υπολογίζεται η ορθή τάση, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Η μέγιστη ορθή τάση αναπτύσσεται στις εξωτερικές ζώνες της δοκού $\sigma_{bmax} = \pm \frac{M_b}{I_z} \cdot \frac{h}{2} = \pm \frac{M_b}{W_z}$, όπου W_z είναι η ροπή αντίστασης της

διατομής που εξαρτάται αποκλειστικά από τη γεωμετρική μορφή της διατομής του δοκιμίου. Για $y=0$ φαίνεται, από τη σχέση υπολογισμού της ορθής τάσης, ότι $\sigma_b=0$ δηλαδή η ουδέτερη επιφάνεια είναι αφόρτιστη.

Για τα όλκιμα υλικά, ορίζεται το *όριο διαρροής* $\sigma_{bF} = \frac{M_{bF}}{W_z}$ όπου M_{bF} είναι η ροπή στην οποία μετρήθηκε η πρώτη μόνιμη παραμόρφωση του δοκιμίου. Στα υλικά αυτά το πείραμα κάμψης τελειώνει σε αυτό το σημείο γιατί το βέλος κάμψης μπορεί να γίνει τόσο μεγάλο ώστε το δοκίμιο να ξεφύγει από τις στηρίξεις του. Τα



ψαθυρά υλικά μετά από μικρή παραμόρφωση θραύονται, οπότε σα χαρακτηριστική τιμή δίνεται το όριο θραύσης ή αντοχή σε κάμψη δηλαδή η μέγιστη τάση στην οποία το δοκίμιο θραύεται κάτω από κάμψη

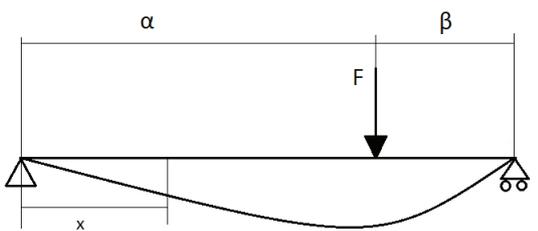
$$\sigma_{bB} = \frac{M_{bB}}{W}$$

Θεωρητικός υπολογισμός βέλους κάμψης

Υπάρχουν τρεις βασικοί τρόποι θεωρητικού υπολογισμού του βέλους κάμψης μιας δοκού, η εξίσωσης της ελαστικής γραμμής, το θεώρημα Castigliano και η ελαστική γραμμή κατά Mohr. Στα πλαίσια του παρόντος μαθήματος θα αναλυθεί ο πρώτος τρόπος, αυτός της εξίσωσης της ελαστικής γραμμής.

Εξίσωση ελαστικής γραμμής

Υπό την επίδραση μιας δύναμης F η αμφιέριστη δοκός (στηριγμένη με άρθρωση - κύλιση), που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, παραμορφώνεται και ο ευθύγραμμος άξονάς της μετατρέπεται σε καμπύλη, η οποία ονομάζεται *ελαστική γραμμή*.



Το βέλος κάμψης ή *βύθιση* y , που είναι η κατακόρυφη μετατόπιση ενός σημείου από την αρχική του θέση, εξαρτάται από τη θέση x στην οποία υπολογίζεται και η τιμή του αυξάνει γραμμικά με την τιμή της εφαρμοζόμενης ροπής κάμψης. Το βέλος κάμψης y στο μέσον αμφιέριστης δοκού που καταπονείται από

$$y = \frac{1}{48} \frac{F \cdot L^3}{E \cdot I_y}$$

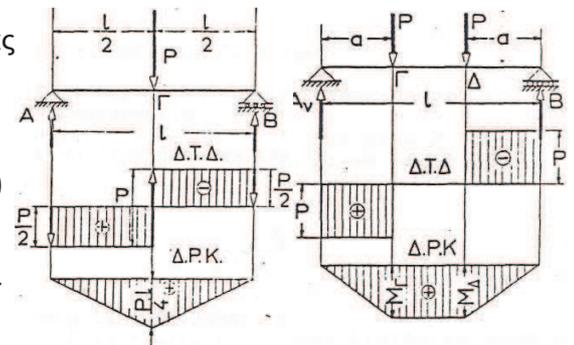
συγκεντρωμένο φορτίο F σε αυτό το σημείο έχει την τιμή

Για τη συνάρτηση $y(x)$ ισχύει η διαφορική εξίσωση $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_z(x)}{E \cdot I_y}$ ή $E \cdot I_y \cdot y''(x) = -M_z(x)$ η οποία ονομάζεται *διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής*. Το γινόμενο $E \cdot I_y$ ονομάζεται *μέτρο δυσκαμψίας*.

Γενικά ο προσδιορισμός της ελαστικής γραμμής έχει μεγάλη σημασία, διότι σε όλες σχεδόν τις τεχνικές κατασκευές προβλέπονται τα μέγιστα βέλη κάμψης.

Γενικά, τα μεγέθη που υπολογίζονται σε τυχαία θέση x μιας καμπτόμενης δοκού είναι:

- ο το βέλος κάμψης $y(x)$
- η κλίση της ελαστικής γραμμής $\theta_y(x) = \frac{dy(x)}{dx} = y'(x)$
- η ροπή κάμψης $M_z(x) = \frac{E \cdot I_z \cdot d^2 y(x)}{dx} = E \cdot I_z \cdot y''(x)$ και
- η τέμνουσα δύναμη $Q_y(x) = \frac{dM_x}{dx} = E \cdot I_z \cdot y'''(x)$.



Η τέμνουσα δύναμη $Q_y(x)$ προκαλεί την ανάπτυξη διατμητικής τάσης στη δοκό η κατανομή της οποίας δεν είναι σταθερή στη διατομή αλλά μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την απόσταση από την ουδέτερη γραμμή.

Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι φορτίσεις και τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (Δ.Τ.Δ) και ροπών κάμψης (Δ.Π.Κ) σε αμφιέριστη δοκό για δύο περιπτώσεις φόρτισης (α) ένα συγκεντρωμένο φορτίο P στο μέσο και (β) δύο συγκεντρωμένα φορτία P σε ίσες αποστάσεις από τις στηρίξεις.

Στον παρακάτω πίνακα με 0 σημειώνονται τα μεγέθη που δε μεταβάλλονται, για κάθε είδος στήριξης.

	Κύλιση	Άρθρωση	Πάκτωση	Ελεύθερο άκρο
Βέλος	0	0	0	

Κλίση			0	
Ροπή		0		0
Τέμνουσα				0

Πείραμα κάμψης

Διαδικασία διεξαγωγής του πειράματος

Με την εκκίνηση της φόρτισης με τη μετακίνηση του μοχλοβραχίονα του πνευματικού συμπιεστή επιτυγχάνεται η ανύψωση της διάταξης του εμβόλου με συνεργαζόμενους οδηγούς. Το ένα άκρο του δοκιμίου συγκρατείται μέσω κοχλία σύσφιξης στο άνω μέρος του ανυψωμένου εμβόλου, ενώ το άλλο του άκρο είναι πακτωμένο στο σασί της πειραματικής διάταξης. Παράλληλα, ο μηχανισμός ανύψωσης επιτρέπει και την οριζόντια μετατόπιση, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα φόρτισης σε διαφορετικά σημεία κατά μήκος της διαδρομής της δοκού.



Επεξεργασία μετρήσεων

Καταγραφή των γεωμετρικών μεγεθών της δοκού του πειράματος.

Υπολογισμός του εμβαδού διατομής της δοκού και της ροπής αδράνειάς της.

Καταγραφή του τελικού πειραματικού βέλους κάμψης και της αντίστοιχης πίεσης που οδήγησε σε αυτό.

Να υπολογιστεί θεωρητικά το βέλος κάμψης κατά την εφαρμογή της ίδιας φόρτισης.