

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

2012


ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

- ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ
- ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

 **άμιλλα**
φροντιστήρια

ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το παραπάνω φυλλάδιο φτιάχτηκε για να προσφέρει λίγη βοήθεια κυρίως στους μαθητές της Α Λυκείου του  **άμιλλα** φροντιστήρια αφορούν την διδακτέα και εξεταστέα ύλη 2011-2012

- ❖ Στην ενότητα 1 δίνεται η δυνατότητα για μια καλή επανάληψη θεωρίας
- ❖ Στην ενότητα 2 οι ασκήσεις είναι καθαρά επαναληπτικού χαρακτήρα σε επίπεδο κυρίως Γ-Δ θέματος. (Δίπλα στο κάθε θέμα ο χαρακτηρισμός του)

ΠΗΓΕΣ

- ❖ Σχολικό Βιβλίο
- ❖ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (επαναληπτικά θέματα)

Υ.Γ.

Κάθε κριτική , σχόλιο , παρατήρηση ή διόρθωση είναι ευπρόσδεκτη.
Με εκτίμηση





1

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Να σημειώσετε στην κόλλα σας το γράμμα της κάθε πρότασης και δίπλα την λέξη "Σωστό" ή "Λάθος"

α) Αν $a < 0$ τότε $|a| = -a$

β) Ισχύει $|a + b| = |a| + |b|$

γ) Η εξίσωση $x^n = a$ με $a > 0$ και n άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $x = \sqrt[n]{a}$

δ) Η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ και $\Delta = 0$ έχει διπλή ρίζα την $x = -\frac{b}{2a}$

ε) Αν $|x| < 3$ τότε $-3 < x < 3$

στ) Αν $a > -3$ τότε $6 + 2a > 3 + a$

ζ) Αν $f(x) = x^3 + 1$ τότε $f(-2) = -7$

ΘΕΜΑ 2^ο

A₁. Να δώσετε τον ορισμό της απολύτου τιμής ενός πραγματικού αριθμού a .

A₂ Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a και β

α. Να αποδείξετε ότι $|a + \beta| \leq |a| + |\beta|$

β. Πότε στην παραπάνω σχέση ισχύει το ίσον;

A₃. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε πραγματικό αριθμό a , β και n θετικό ακέραιο ισχύει η σχέση:

$$\sqrt[n]{a \cdot \beta} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta}$$

β. Σε σύστημα αξόνων xOy το συμμετρικό του σημείου $M(a, \beta)$ ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $N(-\beta, -a)$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$

γ. Η εξίσωση $x^n = a$ με $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$ και n άρτιο θετικό ακέραιο έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $x = \sqrt[n]{a}$ και $x = -\sqrt[n]{a}$

δ. Η ευθεία $y = ax + \beta$ με a, β πραγματικούς αριθμούς και $a \neq 0$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω όπου $0 \leq \omega \leq 180^\circ$ η οποία είναι οξεία.

ε. Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με a, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $a \neq 0$ έχει διακρίνουσα Δ , τότε ισχύει η συνεπαγωγή: $a \cdot \gamma < 0 \Rightarrow \Delta > 0$

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$

α) Να γράψετε τους τύπους που δίνουν την διακρίνουσα Δ και τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης.

β) Να δείξετε ότι: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

ΘΕΜΑ 4^ο

A1. Να συμπληρώσετε κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις με ένα από τα σύμβολα " \geq ", " \leq " ή " $=$ ".

α. $|\alpha| \dots\dots 0$ β. $|\alpha + \beta| \dots\dots |\alpha| + |\beta|$ γ. $|\alpha|^2 \dots\dots \alpha^2$ δ. $|\alpha| \dots\dots \alpha$.

A2. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

α. $|- \alpha| = -|\alpha|$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

β. $\sqrt[\mu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$ όπου $\alpha \geq 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\mu, \nu > 1$.

γ. Η ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \beta)$.

δ. Το γινόμενο των ριζών x_1, x_2 μιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ δίνεται από τον τύπο $P = \frac{\gamma}{\alpha}$

A3. Να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 5^ο

A1. Να δώσετε τον ορισμό της εξίσωσης 2^{ου} βαθμού και στην περίπτωση που η διακρινουσα της είναι θετική

i. να γράψετε τον τύπο των ριζών της

ii. να υπολογίσετε το άθροισμα των ριζών της (Vieta)

A2. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

α) Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός.

β) Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει: $\sqrt{a^2} = a$.

γ) Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει: $a > -1 \Rightarrow a + 2 > 0$

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ αν και μόνο αν ισχύει η ισότητα: $f(x_0) = y_0$.

ε) Τα σημεία $A(1, \sqrt[3]{27})$ και $B(3, \sqrt[201]{1})$ είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο του a' και γ' τεταρτημορίου των αξόνων.

ΘΕΜΑ 6^ο

Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

i. Το σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ και $y < 0$ βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο.

ii. Η εξίσωση $x^v = \alpha$, με v περιττό και α αρνητικό είναι αδύνατη.

iii. Για οποιουδήποτε ομόσημους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

iv. Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ τότε ισχύει: $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$

v. Το πλήθος των ριζών μίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρινουσάς της.

ΘΕΜΑ 7^ο

A1. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε την ισότητα: $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$.

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με Σωστό ή Λάθος α.
Η απόσταση των αριθμών α και β ισούται με $|\alpha + \beta|$.

β. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ με $\Delta > 0$ και x_1, x_2 ρίζες, είναι ετερόσημο του α , μόνο για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

γ. Αν $\rho \in \mathbb{R}$ με $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho.$$

δ. Για κάθε πραγματικό αριθμό α και φυσικό αριθμό ν ισχύει: $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu \cdot \mu]{\alpha}$.

ε. Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 8^ο

A. Αν μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και ο πραγματικός αριθμός α είναι

θετικός ή μηδέν, να αποδείξετε ότι: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \nu]{\alpha}$.

B. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Αν $\alpha^2 = \beta$, τότε $\alpha = \sqrt{\beta}$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, τότε $\alpha > \beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

4. Αν $\alpha \beta \geq 0$, τότε $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

5. Αν $\alpha^2 = \alpha \beta$, τότε $\alpha = \beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 9^ο

A. Αν $\theta > 0$ να αποδείξετε ότι: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

B. Αν α αρνητικός αριθμός τότε η παράσταση $|a - 1|$ είναι ίση με:

1. $\alpha - 1$ 2. $\alpha + 1$ 3. $1 - \alpha$ 4. $-\alpha - 1$ 5. κανένα από τα προηγούμενα

Γ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

1. Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \dots$

2. Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha^{\mu \cdot \nu}} = \dots$

3. Αν $\beta \neq 0$ τότε $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \dots$

4. $\sqrt{\alpha^2} = \dots$

Δ. Να απαντήσετε αν είναι Σωστές ή Λάθος τα παρακάτω:

1. $|\alpha| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

Σ Λ

2. Ισχύει $\alpha \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5\alpha^3}$

Σ Λ

ΘΕΜΑ 10^ο

A. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

α. $P(A \cup B) = \dots$ όταν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους.

β. $P(A') = \dots$, όπου A' είναι το συμπληρωματικό του A .

B. Να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, ($=, \leq, \geq$) έτσι ώστε να είναι αληθής:

α. $P(A') \dots 1 - P(A)$

β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \dots P(A)$.



2

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (Β-Γ-Δ)

ΘΕΜΑ 1^ο

Β

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 7x - 4 = 0$ (1)

α) Δείξτε ότι οι ρίζες της είναι οι : $x_1 = -\frac{1}{2}$ και $x_2 = 4$

β) Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 - 7x - 4 < 0$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

ΘΕΜΑ 2^ο

Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να απλοποιηθεί ο τύπος της.

γ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$

δ) Δίνεται η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $y = ax + 2011$ όπου $a = \frac{2}{3} \cdot f(0)$

Να βρεθεί η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$

ΘΕΜΑ 3^ο

Γ

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 2x + |\lambda - 1|$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δειχθεί ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 4(1 - |\lambda - 1|)$

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα διπλή;

γ) Για ποιές τιμές του λ ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

ΘΕΜΑ 4^ο

Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{|x|}$

α. Να αποδείξετε ότι $f(3) = \frac{4}{3}$

β. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1$.

ΘΕΜΑ 5^ο

Γ

α. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{|x-2|-3}{5} + \frac{|2-x|}{2} < \frac{3|x-2|+1}{5}$

(*)β. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{4x-x^3}{x^2+1} \geq 0$

γ. Να βρεθούν οι κοινές ακέραιες λύσεις των παραπάνω ανισώσεων

ΘΕΜΑ 6^ο ▲

Δίνεται η εξίσωση $\lambda(\lambda x - 1) + \lambda^2 = (3\lambda - 2)x$ όπου x ο άγνωστος και $\lambda \in \mathbb{R}$

- α. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ αν η εξίσωση έχει ως ρίζα τον αριθμό 2.
- β. Να λυθεί η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .
- γ. Αν η εξίσωση είναι αόριστη να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού a ώστε να ισχύει: $|(a+1)^{3a}| = 8$

ΘΕΜΑ 7^ο B

Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2 + (\mu - 1)x + 1 = 0$ (1) όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = \mu^2 - 2\mu - 3$.

B2. Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

B3. Να βρείτε την τιμή του μ ώστε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης να είναι $S = 4$.

B4. Για $\mu = -3$ να λύσετε την εξίσωση.

ΘΕΜΑ 8^ο I

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x^2 - 4|$.

Γ1. Με τη βοήθεια του τύπου της συνάρτησης να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα :

α. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

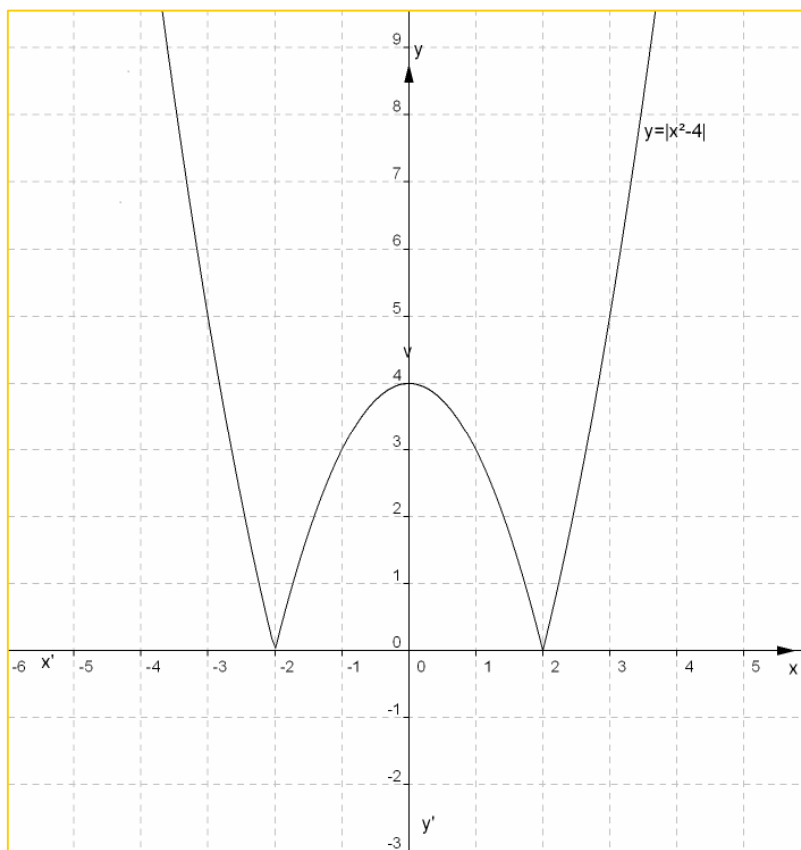
β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 9$.

Γ2. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα :

α. Να γράψετε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x' και y' .

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το $f(x) = 5$.

γ. Για ποια x είναι $f(x) > 3$



ΘΕΜΑ 9^ο**B**

A) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{|x-2|+2}{2} = 7-|x-2|$

B) Να λυθεί η ανίσωση $3|x-1|-4 \geq |x-1|$

Γ) Δίνεται η εξίσωση της ευθείας $\psi = (\kappa + \lambda)x - 2011$, όπου κ, λ οι κοινές λύσεις των ερωτημάτων A) και B) με $\kappa < \lambda$. Τι είδους γωνία σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

ΘΕΜΑ 10^ο**Γ**

Δίνεται η παραβολή $f(x) = \lambda x^2 - 2\kappa x + 3$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία έχουμε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και ότι διέρχεται από το σημείο $B(-2,15)$.

1. Αποδείξτε ότι για τους πραγματικούς κ, λ ισχύει: $\begin{cases} \lambda - 2\kappa = -3 \\ 4\lambda + 4\kappa = 12 \end{cases}$.

2. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

3. Λύστε την εξίσωση $\left| \frac{f(x)}{x^2 - x} \right| = 2$.

ΘΕΜΑ 11^ο**B**

Δίνεται η εξίσωση $|x^2 + x + 2| - |x|^2 = 2x^2 + 1$

B1. Να δείξετε ότι η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $2x^2 - x - 1 = 0$

B2. Να λυθεί η εξίσωση.

B3. Να κάνετε γινόμενο την παράσταση $2x^2 - x - 1$

ΘΕΜΑ 12^ο**Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-|1-2x|}}{x^2-1}$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

Γ2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ3. Να δείξετε ότι για $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$ ισχύει: $f(x)\sqrt{1-x} = -\frac{\sqrt{2}}{x+1}$

ΘΕΜΑ 13^ο**Δ**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + \mu = 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mu < 0$

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 οι οποίες είναι άνισες και ετερόσημες ($x_1 < 0 < x_2$).

Δ2. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 = 1 - 2x_1 \cdot x_2$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός λ .

Δ3. Αν για τους λ, μ ισχύει: $\lambda^2 + \mu^2 + 5 \leq 2\lambda - 4\mu$

i. Να δείξετε ότι $\lambda = 1, \mu = -2$

ii. Να λυθεί η εξίσωση

iii. Να λυθεί η ανίσωση: $x + \frac{\mu}{x} < \lambda$

ΘΕΜΑ 14^ο **Γ**

Γ1) Να λύσετε την εξίσωση $|2 - |2x - 1|| = 5$

Γ2) Να λύσετε την ανίσωση $|8x^2 - 2012(x - 2011) + 1821| < -336$

Γ3) Να λύσετε την παραμετρική εξίσωση $\frac{\lambda x - 1}{3} = \frac{3x + 1}{\lambda}$, με $\lambda \neq 0$ για τις διάφορες τιμές του αριθμού λ .

ΘΕΜΑ 15^ο **Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

Δ1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της με μορφή διαστημάτων.

Δ2) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ και με τον άξονα $y'y$.

Δ3) Αφού απλοποιήσετε τον τύπο της παραπάνω συνάρτησης, να δικαιολογήσετε γιατί παριστάνει ευθεία γραμμή από την οποία εξαιρείται ένα σημείο. Ποιο είναι αυτό; Τι γωνία σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$;

ΘΕΜΑ 16^ο **Γ**

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\sqrt{2 - |x - 1|}}{x - 1}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Γ2. Να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΘΕΜΑ 17^ο **Δ**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - \lambda = 0$, $\lambda \in R$.

Δ1. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Δ2. Για $\lambda = 4$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Δ3. Για $\lambda = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = (1 + x_1)^{2012} \cdot (1 + x_2)^{2012}$.

ΘΕΜΑ 18^ο **Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha}{x - 3}$.

A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

B. Αν $6 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) - 21 = 0$ να βρείτε την τιμή του $\alpha \in R$.

Γ. Για $\alpha = 9$

i. Να απλοποιηθεί ο τύπος της $f(x)$.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $|f(x)| < 4$.

ΘΕΜΑ 19^ο 

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 B. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης περνάει από το σημείο $K(2,2)$ να βρείτε τη τιμήν του α .
 Γ. Για $\alpha=0$,
 i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
 ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$K = (f(1))^2 - (f(-1))^2 + f(0)$$

ΘΕΜΑ 20^ο 

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{4-|x|}}$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
 B) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = \sqrt{(f(2)-1)^2} - \sqrt{(f(-2)-1)^2}$
 Γ) Να βρείτε τα σημεία (εφ όσον υπάρχουν) στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες
 Δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο $O(0,0)$ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(-1, f(-1))$ και $B(1, f(1))$
 E) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{x}$
 Ζ) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τη διχοτόμο της 2^{ns} και 4^{ns} γωνίας των αξόνων.

ΘΕΜΑ 21^ο 

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1$ με $\lambda \neq 0, 1$ και η συνάρτηση $f(x) = |x_1|x - |x_2|$ όπου x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης $g(x)=0$.

- 1) Να βρεθούν οι λύσεις x_1, x_2 .
 2) Αν $x_1 < x_2$ και $\lambda \in (-1, 0)$,
 α) Να λυθεί ως προς λ η εξίσωση $f(0)=f(1)$
 β) Να λυθεί ως προς λ η ανίσωση $|f(0) \cdot f(1)| > 0$
 γ) Να λυθεί η εξίσωση $|f(x) + f(-x)| = g(1) + 4$.
 δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο σημεία.
 ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία $(\epsilon): \psi = |x_1|x + |x_2|$ με τους άξονες $x'x$ και $\psi'\psi$.

ΘΕΜΑ 22^ο 

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8 - |2 - x|}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
 β. Να δείξετε ότι $\frac{2}{f(2)} + \frac{1}{f(-4)} = \sqrt{2}$

γ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$

ΘΕΜΑ 23^ο

Το παρακάτω σχήμα είναι ένας στόχος.
Όλες οι γκρι και λευκές λουρίδες έχουν το ίδιο πλάτος. Ένας μαθητής ρίχνει το βέλος του τυχαία πάνω στο σχόχο αυτό.

Ποια είναι η πιθανότητα να ρίξει το βέλος σε γκρι λουρίδα ;
(Άσκηση του Μπάμπη Στεργίου)



ΘΕΜΑ 24^ο

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

Ποια είναι η πιθανότητα

- i) Να μη πραγματοποιηθεί το A
- ii) Να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A, B .
- iii) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A, B .

ΘΕΜΑ 25^ο

Έστω ο Δειγμ. Χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Εκλέγουμε τυχαία ένα απλό ενδεχόμενο $a \in \Omega$. Αν $f(x) = 2x^2 - 4x + a$ με $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $f(x) = 0$ να μην έχει πραγμ. ρίζες.

ΘΕΜΑ 26^ο

Σε μια τάξη με 30 μαθητές οι 20 Δε συμπαθούν τα μαθηματικά, οι 14 Δε συμπαθούν τα φιλολογικά και οι 5 Δε συμπαθούν ούτε τα μαθηματικά ούτε τα φιλολογικά. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της τάξης να βρείτε την πιθανότητα να συμπαθεί τα μαθηματικά και τα φιλολογικά.

ΘΕΜΑ 27^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με : $f(x) = \frac{x\sqrt{16-x^2}}{x^2-1}$

- α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β. Να δείξετε ότι ο αριθμοί $f(x)$ και $f(-x)$ είναι αντίθετοι.
- γ. Αν $f(a-1) = 2012$, να προσδιορίσετε την τιμή $f(1-a)$.

ΘΕΜΑ 28^ο 

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (a+1)x - a^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$ (1)

- α. Να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε τιμή του πραγματικού a .
- β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:
 - i) Να βρείτε τις τιμές του a έτσι, ώστε $|x_1 + x_2| \leq 2010$
 - ii) Αν $a = 2$, να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ως ρίζες τους αριθμούς $x_1 + 2$, $x_2 + 2$

ΘΕΜΑ 29^ο 

Δίνεται συνάρτηση f με
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2}{|x^2 - 2x - 15| + ||x + 5| - 2|}$$

- α. Να εξετάσετε την f ως προς τη συμμετρία.
- β. Να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- γ. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

ΘΕΜΑ 30^ο 

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με : $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda^2 - 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- α. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει μόνο τον άξονα $x'x$
- β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο με τετμημένη $x = 2$

ΘΕΜΑ 31^ο 

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με : $f(x) = \lambda x^2 - 2(\lambda + 2)x + 8$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- α. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει με $x'x$ τουλάχιστον κοινό σημείο με σταθερή τετμημένη
- β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ομόσημες ρίζες
- γ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στην ευθεία $y = 0$.
- δ. Αν $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$ και B, Γ είναι τα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ και A το σημείο τομής με τον yy τότε:

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = \frac{8|\lambda - 2|}{|\lambda|}$

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες $E = 24$

