ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

1. Δύο ομάδες O_1, O_2 παίζουν μεταξύ τους σε μια σχολική ποδοσφαιρική συνάντηση (**οι αγώνες δεν τελειώνουν ποτέ με ισοπαλία**). Νικήτρια θεωρείται η ομάδα που θα νικήσει σε δύο αγώνες στη σειρά ή σε δύο αγώνες ανεξαρτήτως σειράς. Να βρείτε:

   α) Το δειγματικό χώρο Ω των αποτελεσμάτων των αγώνων της συνάντησης.

   β) Τα ενδεχόμενα: i) Ακριβώς μία νίκη της ομάδας O_1,

   ii) καμία νίκη της ομάδας O_1,

   iii) τουλάχιστον μία νίκη της ομάδας O_1.

   γ) Πόσους αγώνες το πολύ θα είχε μία τέτοια ποδοσφαιρική συνάντηση;

2. Σε ένα Λύκειο οι μαθητές της Α' τάξης είναι 54. Αν εκλέξουμε τυχαία ένα μαθητή του Λυκείου η πιθανότητα να είναι μαθητής της Α' τάξης είναι 36% και η πιθανότητα να είναι της Β' τάξης 34%. Να βρείτε:

   i. το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

   ii. το πλήθος των μαθητών της Β' τάξης.

   iii. την πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ' τάξης.

3. Θεωρούμε ενδεχόμενα Α, Β ενός πειράματος τύχης για τα οποία ισχύουν $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Να βρείτε τις:

   α) $P(A)$. β) $P(B)$.

4. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε να ισχύει: $P(A) = 3/5,\ P(B) = 2/3$ και $P(A \cup B) = 7/10$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

   Α. Να μην πραγματοποιηθεί το A

   Β. Να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A και B

   Γ. Να πραγματοποιηθεί μόνο το B

   Δ. Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B

   Ε. Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A και B

5. Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει: η πιθανότητα:

   α να πραγματοποιείται το Α και να μην πραγματοποιείται το Β είναι $\frac{1}{6}$.

   β να μην πραγματοποιούνται συγχρόνως το Α και Β είναι $\frac{3}{4}$.

   γ να πραγματοποιείται το Α ή το Β είναι $\frac{2}{3}$.

   Να βρείτε τις πιθανότητες:

i. να πραγματοποιείται το Α.

ii. να πραγματοποιείται μόνο το Β ή μόνο το Α.

iii. να πραγματοποιούνται και τα δύο ή κανένα.

iv. να πραγματοποιείται το Α ή να μην πραγματοποιείται το Β.

6. Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{6}\le P(B)\le\frac{2}{3}$.

7. Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A')=0{,}7$ και $P(B')=0{,}2$.

Α. εξετάστε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα

Β. δείξτε ότι $P(A\cup B)\ge 0{,}8$ και $P(A\cap B)\ge 0{,}1$.

8. Έστω $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.

i. Αν $P(\omega_1)=\frac{1}{3}$ και $P(\omega_2)=\frac{1}{2}$ να βρείτε την πιθανότητα $P(\omega_3)$

ii. Αν $P(\omega_1)=2P(\omega_2)=3\,P(\omega_3)$ να βρείτε τις $P(\omega_1),P(\omega_2),P(\omega_3)$.

9. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\alpha+\beta)^2\ge 4\alpha\beta$

ii) $\alpha\beta\le\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

iii) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\ge\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

10. Εάν $\alpha<\beta<1$ να δείξετε ότι $\alpha^2+\beta>\alpha+\alpha\beta$.

11. Εάν $\alpha>1$, $\beta>1$ να δείξετε ότι $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}<1$

12. Εάν $\alpha<1$ να δείξετε ότι $1-\alpha^3>3\alpha(1-\alpha)$

13. Εάν $\alpha\beta<0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $A=\frac{\alpha-4}{\beta}+\frac{4}{\alpha\beta}$ και $B=\frac{4-\beta}{\alpha}-\frac{4}{\alpha\beta}$

14. Να δείξετε ότι ισχύει $\alpha^2+\beta^2+1\ge\alpha\beta+\beta+\alpha$

15. Να δείξετε ότι ισχύει $(\alpha+3\beta)^2+\gamma^2\ge-16\beta^2-4\alpha\beta$

16. Εάν $2<\alpha<3$ και $1<\beta<2$ να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

$3\alpha-2\beta$

$\alpha^3-\beta$

$\alpha^{-1}-\beta^{-1}$

$\alpha-\frac{4}{\beta}$

17. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ να γραφεί χωρίς απόλυτες τιμές η παράσταση: $A=3|\alpha-\beta|-2|\gamma-\alpha|-|\beta-\gamma|$

18. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

i) $A=2|x-1|-3x+1$

ii) $B=2|2x-4|-3x^2-2x+1$

iii) $\Gamma=-3x+2|1-2x|$

iv) $\Delta=2|x-1|-3|2x-3|-2x+1$

19. Να λυθεί η ανισωση: $|2x-3y+4|+|x^2-1|\leq 0$

20. Να δείξετε ότι:

i) $\left|\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$

ii) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|<\left|\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right|$

iii) Αν ισχύει ότι $|\alpha|>|\beta|$ τότε δείξτε : $\left|\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right|<\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+1$

iv) $\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|}=\frac{1+|\alpha|}{1-\alpha}$

21. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2|3x-2|+4}{4}-\frac{6-|3x-2|}{2}=\frac{|2-3x|}{3}-2$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\left|\left||x|-2\right|-3\right|=1$

ii) $\left|3|x|-1\right|=\left||x|+1\right|$

iii) $\frac{|x|+1}{|x|-x}=3$

iv) $|x^2-x|+|x^2-3x+2|=0$

23. Να λυθεί η εξίσωση: $(x^2-1)^2-5|x^2-1|+6=0$

24. Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $|x-3|>5$, β) $|x-3|\leq 2$, γ) $|x-3|\geq -8$, δ) $|x-3|<-8$, ε) $\frac{|x|-2}{5}<1$

ς) $\frac{|2x-1|}{5}+\frac{1}{2}>\frac{|2x-1|}{2}$ ζ) $|x-1|<|x-2|$ η) $5\leq|x-10|\leq 7$

θ) $-3\leq|x-2|\leq 8$

25. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $3<|x+2|<6$

iii) $\frac{|x-3|-1}{6}+\frac{|x-3|-1}{4}<2+\frac{|x-3|+5}{6}$

26. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

ι) $A=\sqrt{x-3}$

ii) $B=\frac{2x-1}{\sqrt{5-3x}}$

iii) $\Gamma=\sqrt{4-x^2}$

iv) $\Delta=\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{3-x}}$

27. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

i) $8\sqrt{24}-2\sqrt{150}-3\sqrt{6}+\sqrt{54}$

ii) $2\sqrt{75}+5\sqrt{300}-3\sqrt{48}$

iii) $7\sqrt[3]{135}-3\sqrt[3]{40}+13\sqrt[3]{320}$ vi) $5\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{250}+7\sqrt[3]{16}$

28. Αν $\mathbf{x=1-2\sqrt{3}}$ και $\mathbf{y=1+2\sqrt{3}}$ να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

ι) Α=xy ii) Β= $\mathbf{x^2-xy+y^2}$

iii) Γ= $\mathbf{x^3+y^3}$

29. ι) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $\mathbf{(1+2\sqrt{5})^2}$ και $\mathbf{(1-2\sqrt{5})^2}$

ii) Απλοποιείστε την παράσταση: $\left(\sqrt{\mathbf{21+4\sqrt{5}}}-\sqrt{\mathbf{21-4\sqrt{5}}}\right)$

30. Να υπολογισθούν οι παραστάσεις:

i) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}$ ii) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}$

31. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

ι) $\mathbf{A=\sqrt{13}\sqrt{5-2\sqrt{3}}\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$ Γ ii) Β= $\mathbf{(1+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})}$

32. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$\mathbf{A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

33. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

i) $\sqrt{\mathbf{\sqrt[3]{2}\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ ii) $\sqrt{\mathbf{\sqrt{7}\sqrt[3]{\sqrt{7}7}}}$

iii) $\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha^3\sqrt{\alpha^2}}}$ iv) $\sqrt{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha}}}}$

v) $\sqrt[3]{\alpha^3\sqrt{\alpha^2}}$ vi) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[11]{\alpha\beta}}}$

34. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρανομαστή.

ι) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ii) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ iii) $\frac{3}{\sqrt{8}}$

iv) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ v) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

35. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρανομαστή.

ι) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ii) $\frac{7}{2-3\sqrt{2}}$ iii) $\frac{1+2\sqrt{5}}{1-2\sqrt{5}}$

36. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

i) $\sqrt{8},\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ii) $\sqrt{7},\sqrt{5}+\sqrt{2}$

iii) $\sqrt[3]{3},\sqrt{2}$ iii) $1-\sqrt{2},\sqrt{3}-\sqrt{2}$

37. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

ι) $2\sqrt{2}$ και 3 ii) 6 και $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$

iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ iv) $\sqrt{2}-1$ και $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

38. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 2x$

39. Αν $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ $y = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ $z = \sqrt{2+\sqrt{3}}$
τότε να δείξετε ότι: $xyz = 1$

40. Δείξτε ότι: $\frac{\alpha^2+3}{\sqrt{\alpha^2+2}} > 2$

41. Έστω $\alpha = \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$
ι) Να δείξετε ότι:α>0
ii) Να βρείτε το α^2 iii) Να βρείτε το α

42. Έστω η παράσταση $A = \sqrt{\alpha+1}-1$ με $8 \le \alpha \le 15$
ι) Να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η παράσταση Α.
ii) Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης Α και τις τιμές του α που τις παρουσιάζει.

43. Να λυθεί και να διερευνηθεί η εξίσωση: $\lambda^2(x+1) - 5\lambda = 3(3x-2)$.

44. Να εξετάσετε για ποιες τιμές των α,β η εξίσωση: $\alpha(x-1) = 3(x-\beta)$ έχει:
ι) Μοναδική λύση. ii)Είναι ταυτότητα. iii)Είναι αδύνατη.

45. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in R$ ώστε η εξίσωση $\frac{\omega(5\lambda+3)}{15} + \frac{1}{3} = \frac{2(\omega+1)}{3} + \frac{1}{5}$ να είναι αδύνατη.

46. Να λυθούν οι εξισώσεις:
ι) $x^4 - 16 = 0$ ii) $5x^8 + 1 = 0$
iii) $x^3 - 64 = 0$ iv) $x^5 + 32 = 0$
v) $8x^3 + 27 = 0$ vi) $x^5 - 81x = 0$
vii) $x^5 - 125x^2 = 0$ viii) $x^{10} - 1024 = 0$

47. Να λυθούν οι εξισώσεις:
ι) $(2x-1)^3 - 8 = 0$ ii) $(3x+2)^7 + 128 = 0$
iii) $(|x|-1)^4 - 16 = 0$

48. Να βρεθεί ο $\lambda \in R$, αν η εξίσωση $(\lambda^2-1)x^2 - (2\lambda-1)x - 3 = 0$ έχει ρίζα τη μονάδα. Ποια είναι η άλλη ρίζα της εξίσωσης;

49. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$
ι) να έχει δύο ρίζες άνισες
ii) να έχει μια ρίζα διπλή

iii) να έχει πραγματικές ρίζες

iv) να μην έχει καμιά πραγματική ρίζα.

50. Να βρεθεί το $\ddot{e} \in R$ ώστε η εξίσωση $\lambda x^2 - 5x + 6 = 0$ $(\lambda \neq 0)$ να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

51. Να βρείτε το είδος των ριζών της $2x^2 - 8x + \lambda = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$

52. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x - 1 = 0$. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της χωρίς να λυθεί να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ ii) $x_1^2 + x_2^2$

iii) $x_1^3 + x_2^3$ iv) $x_1^{-3} + x_2^{-3}$

v) $x_1^4 + x_2^4$ vi) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$

53. Να βρεθούν οι εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) -3 , $\dfrac{1}{3}$ ii) $4 + 3\sqrt{3}$, $4 - 3\sqrt{3}$

iii) $-\sqrt{2}$, 2 iv) $\alpha - \beta, \alpha + \beta$

54. Να βρεθεί το $\lambda \in R$ ώστε η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 - (2\lambda + 3)x + 5\lambda = 0$ να έχει δύο ρίζες θετικές.

55. Να βρεθεί το $\lambda \in R$ ώστε η εξίσωση $3x^2 + (x+1) \cdot \lambda - x \cdot \lambda^2 = 2(1 - 10x)$ να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

56. Έστω η εξίσωση $3x^2 - (\lambda^2 - 5)x - 2 = 0$ (1)

ι) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in R$

ii) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

57. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(2x-1)^2 - 3(2x-1) - 4 = 0$ ii) $(x^2-1)^2 + 2(x^2-1) - 3 = 0$

58. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(2x-1)^2 + 3|2x-1| - 4 = 0$ ii) $x^2 - 2x + |x-1| - 5 = 0$

59. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3x^4 + x^2 - 4 = 0$ ii) $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

60. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

i) $(3x)^2 < 27$ ii) $x(x-1) > -x + 25$

iii) $x(2x+1) \leq x + 4$ iv) $(2x-1)^2 \leq 5(1-2x)$

v) $5x^2 + 3x - 2 \geq 3x^2 - 2x + 10$

61. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 16}$ ii) $f_2(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 5}$

iii) $f_3(x) = 3x - \sqrt{4 - x^2}$ iv) $f_4(x) = \sqrt{x^2 + \ddot{e}x + \ddot{e}^2}$

62. Να λυθούν τα συστήματα ανισώσεων:

i) $\begin{cases} x-2>0 \\ x^2-x-20\le 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 1-x^2>0 \\ x^2-3x>-2x \end{cases}$

63. Να βρεθεί το $\lambda \in R$ ώστε το $f(x)=(\lambda+1)x^2 - 4x+2\lambda$ είναι θετικό για κάθε $x \in R$.

64. Να προσδιορισθεί ο $\lambda \in R$ ώστε η ανίσωση $x^2-2(4\lambda-1)x+15\lambda^2-2\lambda-7>0$, να αληθεύει για κάθε $x \in R$

65. Να αποδείξετε ότι αν η ανίσωση $-x^2+(\ \ \kappa-1)x-9<0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$, τότε $\kappa \in (-5,7)$

66. Για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση $x^2-\lambda x+3-\lambda=0$ έχει:

i)δύο ρίζες άνισες ii)μια ρίζα διπλή

iii)δεν έχει πραγματικές ρίζες

67. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda-1=0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$

68. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1=6$ και $\alpha_{12}=94$. Να βρείτε τη διαφορά ω και τον 10^{o} όρο της προόδου.

69. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1=3$ και $\omega=7$.

α) Να βρείτε το πλήθος ν των πρώτων όρων της προόδου που δίνουν άθροισμα ίσο με 679.

β) Ποιος θα είναι ο τελευταίος όρος α_ν σ' αυτή την περίπτωση;

70. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_9=15$ και $S_{12}=165$.

α) Να βρείτε τον 5^{o} όρο της προόδου και

β) το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

71. α) Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν $\alpha_3 = 11$ και $\alpha_6 = 23$

β) Πόσοι πρώτοι όροι της έχουν άθροισμα που δεν υπερβαίνει το 210;

72. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \Re$ οι αριθμοί $(\alpha+\beta)^2$, $\alpha^2+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

73. Αν οι αριθμοί $\frac{2}{\beta+\gamma},\frac{2}{\gamma+\alpha},\frac{2}{\alpha+\beta}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τους $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$.

74. Να σχηματισθούν οι γεωμετρικές πρόοδοι με:

α) $\alpha_1 = 5$ και $\lambda = 3$ β) $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ και $\lambda = \frac{1}{4}$

γ) $\alpha_1 = -20$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

75. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους αριθμούς 2, 16, 58 για να γίνουν τρεις διαδοχικοί

όροι γεωμετρικής προόδου;

76. α) Αν $α_1 = 2$ και $λ = \frac{1}{3}$ να βρεθεί ο $α_6$ β) Αν $α_6 = 448$ και $λ = 2$ να βρεθεί ο $α_1$

γ) Αν $α_1 = 9$ και $α_5 = 144$ να βρεθεί ο λ δ) Αν $α_1 = 2$ και $λ = 3$ και $α_ν = 162$ να βρεθεί ο ν

77. Να ορισθεί μία γεωμετρική πρόοδος, αν $α_4 = -6$ και $α_8 = -\frac{2}{27}$.

78. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 & ,x<0 \\ αx+13 & ,0 \le x < 4 \\ βx^2+αx-40 & ,x \ge 4 \end{cases}$ να βρεθούν τα $α,β \in R$ εάν

$f(-1) = f(3)$ και $f(2) = f(5)$

79. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 & ,x<0 \\ αx+32 & ,0 \le x < 5 \\ βx^2+αx-43 & ,x \ge 5 \end{cases}$ να βρεθούν τα $α,β \in R$ ώστε:

$f(-2) = f(4)$ και $f(3) = f(6)$

80. Να βρεθεί σε ποιο σύνολο ορίζονται οι συναρτήσεις:

i) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2-5x+6}$ ii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-|x-1|}}{x^2-4}$

iii) $f(x) = \sqrt{|x-1|-2}$ iv) $f(x) = \sqrt{2x-|x-1|}$

81. Να βρεθεί σε ποιο σύνολο ορίζονται οι συναρτήσεις:

i) $f(x) = \sqrt{3|x-1|-2x+1}$ ii) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2|x-1|-3}}$

iii) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{3|x-1|-3}}{2x^2-3x}$ iv) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2x-1}} + \sqrt{3x-2}$

82. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-α|x|}{|x|-3}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 2$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. Να βρείτε τον αριθμό α.

γ. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 5$.

83. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{x^2-6|x|+α}{x^2-9}$ για την οποία ισχύει $f(5) = \frac{1}{4}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. Να βρείτε τον αριθμό α.

γ. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le \frac{1}{3}$.

84. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} 2x-3,\ αν & x\in(-5,1) \\ x^2-x,\ αν & x\in[1,4) \\ 4x-12, αν & x\in[4,8) \end{cases}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

i) $\left|f(5)-|x+f(0)|\right|=f(2)$

ii) $x^2+f(-1)\cdot|x|+f(3)=0$

iii) $x^{f(4)}+[f(-4)+f(3)]x^2+f(4)=f(1)$

85. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x^2+\lambda x+\lambda-5$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει και λύσεις πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in R$.

β. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε για τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης $f(x)=0$ να ισχύει:

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{3}{2}$

γ. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β, να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $f(x+2)+f(x)>-2$

ii) $\frac{f(x-1)}{f(x)-2}\le 1$

86. Δίνεται το σημείο Μ($2\alpha+6,\alpha+5$). Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ, αν αυτό είναι σημείο:

α) του άξονα $x'x$

β) του άξονα $y'y$

87. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α(1,4), Β(5,2) και Γ(-2,-2) είναι ορθογώνιο.

88. Δίνονται τα σημεία:

Α(-2,3) και Β(1,5)

α) Να βρείτε την απόσταση (ΑΒ)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΟ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, όπου Ο η αρχή των αξόνων

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΟ

89. Δίνονται τα σημεία Α(2,-2), Β(-2,2) και Γ$\left(-2\sqrt{3},-2\sqrt{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

90. Να βρείτε τα $x\in R$, ώστε για τα σημεία Α(-1,-2) και Β(x,1) να ισχύει (ΑΒ)=5.

91. Να βρείτε ποια σημεία του άξονα $x'x$ απέχουν από το σημείο Α(2,6) απόσταση ίση με 10.

92. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες όταν:

i) $f(x)=2x^2-6$

ii) $f(x)=2x^2-8$

iii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}}$

iv) $f(x)=|x-1|-|2x-2|$

v) $f(x)=|2x-4|-2x+1$

vi) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<0 \\ 1-9x^2, & x\geq 0 \end{cases}$

93. Να βρείτε το $k\in R$ ώστε το ζεύγος που δίνεται να ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης :

i) $f(x)=2x^2-1, (7,k)$

ii) $f(x)=2x^2-1, (k,7)$

iii) $f(x)=k|x+1|-2|x-\dfrac{1}{x}|, (1,1)$

iv) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{k-2}, (0,0)$

94. Δίνεται η επόμενη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x, & \alpha\nu \quad x\geq 2 \\ |x-3|-2, & \alpha\nu \quad x<2 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της f :

α)Α$(5,10)$

β)Β$(-1,2)$

γ)Γ$(2,-1)$

δ)Δ$(3,0)$

ε)Ε$(1,0)$

στ)Ζ$(4,-1)$

95. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x$

i)Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε να ισχύει $f(1)=2$ και $f(-1)=0$

ii)Για τις τιμές των α,β που βρήκατε σε ποια σημεία τέμνει η γραφική παράσταση της f τους άξονες;

96. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες:

α) $\phi(x)=|2x-5|-7$

β) $f(x)=x^2-3x-4$

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x-2|-5$. Να βρείτε:

α)το πεδίο ορισμού της f

β)τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ)τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται:

i) πάνω από τον άξονα $x'x$

ii) κάτω από τον άξονα $x'x$

98. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x)=x^2-x+2$ και $g(x)=-2x^2+5x-4$

Να αποδείξετε ότι:

α) ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

β) ότι η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

99. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι επόμενες ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες.

α) $\varepsilon: y = |\lambda + 2|x - 1$ και $\zeta: y = x - 5$

β) $\varepsilon: y = |1 - 2\lambda|x + 3$ και $\zeta: y = 3x$

γ) $\varepsilon: y = (|2\lambda - 3| - 5)x + 5$ και $\zeta: y = 4 - 3x$

δ) $\varepsilon: y = |\lambda - 3|x - 2$ και $\zeta: y = |3\lambda + 7|x + 5$

100. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + x + 3$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

101. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \begin{cases} \lambda x - 3, \text{αν} & x > 2 \\ \mu x - \lambda, \text{αν} & x \le 2 \end{cases}$

διέρχεται από τα σημεία Α(4,5) και Β(-1,-1).

α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f

102. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων:

α) $f(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{αν} \quad x \le -2 \\ 2, & \text{αν} \quad -2 < x < 3 \\ -2x + 8, & \text{αν} \quad x \ge 3 \end{cases}$

β) $f(x) = \begin{cases} -2x - 6, & \text{αν} \quad x \le -1 \\ -2, & \text{αν} \quad -1 < x \le 2 \\ x - 3, & \text{αν} \quad x > 2 \end{cases}$

103. Η ευθεία $\varepsilon: y = (3 - \lambda)x + \lambda + 1$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ

β) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε

104. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y = (2\lambda - 8)x + \lambda + 3$ και $\zeta: y = (1 - \lambda)x + 2 - 2\lambda$, οι οποίες είναι παράλληλες.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ

β) Αν η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α και η ζ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο Β, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΒ.

105. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: Y = (\alpha + 2)x + 7\alpha + 4$ και $\zeta: y = (\beta - \alpha)x - \beta - 2\alpha$, με $\alpha, \beta \in R$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Μ(-3,2) και ισχύει ότι $\varepsilon // \zeta$. Να βρείτε:

α) τις τιμές των α και β

β) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ζ με τους άξονες

106. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και διέρχεται από το σημείο Α.

α)λ=1 και Α(-3,2)

β)λ=-2 και Α(2,-1)

γ)λ=3 και Α(-1,4)

δ)λ=$-\frac{1}{2}$ και Α(4,-5)

ε)λ=0 και Α(-3,4)

107. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

α) Α(-4,0) και Β(0,2)

β) Α(0,-2) και Β(3,-1)

γ) Α(0,3) και Β(2,1)

δ) Α(2,4) και Β(-1,-5)

ε) Α(0,-1) και Β(4,-1)