ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΙΑ ΤΟ 2ο ΤΕΣΤ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ΄ Λυκείου — Μαθηματικά Προσανατολισμού

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$e^x + 3x - 4 = 0$$

έχει **μία ακριβώς ρίζα** στο διάστημα $(0, 1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(x-1), \quad x > 1, \qquad g(x) = \sqrt{x+2}, \quad x \geqslant -2.$$

Να βρείτε τους τύπους και τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**. **Δεν απαιτείται αιτιολόγηση.**

1. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα μηδενίζεται μέσα σε αυτό. ☐ Σ ☐ Λ

2. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι $1-1$. ☐ Σ ☐ Λ

3. Το πεδίο ορισμού της $\dfrac{f}{g}$ είναι πάντοτε το $D_f \cap D_g$. ☐ Σ ☐ Λ

4. Για κάθε δύο συναρτήσεις f, g ισχύει $f \circ g = g \circ f$. ☐ Σ ☐ Λ

5. Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) f(\beta) < 0$, τότε η f έχει ρίζα στο (α, β). ☐ Σ ☐ Λ

6. Κάθε συνάρτηση $1-1$ έχει αντίστροφη με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της. ☐ Σ ☐ Λ

7. Κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. ☐ Σ ☐ Λ

8. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ☐ Σ ☐ Λ

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{α)} \quad \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{β)} \quad \lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλες ανισότητες και το κριτήριο παρεμβολής.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 4 - \frac{1}{x}.$$

α′) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

β′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ′) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε τον τύπο της.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f(x+1) = (x+1)e^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = -1$ και $f(2) = 5$.

α′) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 3$.

β′) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + x^2 - 3, \qquad x > 0.$$

α′) Να εξετάσετε τη μονοτονία της f **χωρίς παραγώγους**.

β′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ′) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + x^2 = 3$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{α)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}, \qquad \text{β)} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x + 1} - x \right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x}, \quad x > 0, \qquad g(x) = \frac{1}{3 - x}, \quad x < 3.$$

Να βρείτε τους τύπους και τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f + g$, $f \cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί

$$f(-1) = -2, \qquad f(1) = 3.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Δίνεται η συνάρτηση

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (2 - x)^2.$$

α′) Να εξετάσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β′) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}+1, & x<0,\\ \lambda, & x=0,\\ \sqrt{x+4}, & x>0.\end{cases}$$

α΄) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο 0.

β΄) Για αυτή την τιμή του λ, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f(\xi)=\dfrac{21}{10}$.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\ln(x-2)-\ln(x-4),\qquad g(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right).$$

Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους και να εξετάσετε αν οι f,g είναι ίσες συναρτήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, $f(0)=1$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\left(e^x f(x)-2x\right)^2=(x^2+1)^2.$$

Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ 16

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\sqrt{x+4}+x^3=4$$

έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-x-1}{x-2}=3.$$

α΄) Να βρείτε την τιμή $f(2)$.

β΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 2} f(x)\,\frac{\ln(x-1)}{x-2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\ln(x+2),\qquad g(x)=x^2-1.$$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη στο $(0,2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 19

Έστω $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[1,3]$ τέτοιο ώστε

$$5f(\xi)=2f(1)+3f(3).$$

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.