ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Εργασία εξάσκησης · Ασκήσεις τύπου σχολικού τετραδίου

Ονοματεπώνυμο: _____ Ημερομηνία: _____

Α. Αποδείξεις ανισοτήτων

Σε καθεμία από τις παρακάτω ασκήσεις να αποδείξετε ότι η ανισότητα ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς που εμφανίζονται. Χρησιμοποιήστε τετράγωνα και κατάλληλες ταυτότητες.

Άσκηση 1. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$.

Άσκηση 2. Να αποδείξετε ότι $(2\alpha+\beta)^2 \geq 8\alpha\beta$.

Άσκηση 3. Να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)^2 + 15\beta^2 \geq 6\alpha\beta$.

Άσκηση 4. Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{2}\right)^2 \geq 2\alpha\beta$.

Άσκηση 5. Να αποδείξετε ότι $2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2$.

Άσκηση 6. Να αποδείξετε ότι $5\alpha^2 + 5\beta^2 \geq 2(\alpha+2\beta)(2\alpha-\beta)$.

Άσκηση 7. Να αποδείξετε ότι $4(\alpha^2+\beta^2) + 8\alpha\beta \geq 0$.

Άσκηση 8. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2-6\alpha+4\beta \geq -13$.

Άσκηση 9. Να αποδείξετε ότι $10\alpha^2 - 6\alpha + 5 > 0$.

Άσκηση 10. Να αποδείξετε ότι $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) \geq (\alpha x+\beta y)^2$.

Άσκηση 11. Να αποδείξετε ότι $(\alpha^2+1)(\beta^2+1) \geq (\alpha\beta+1)^2$.

Άσκηση 12. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+2 \geq 2\alpha+2\beta$.

Άσκηση 13. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+1 \geq \alpha+\beta+\alpha\beta$.

Β. Ανισότητες με δεδομένες συνθήκες

Χρησιμοποιήστε τις δοσμένες πληροφορίες, τη μεταφορά όρων και την παραγοντοποίηση για να συγκρίνετε τις παραστάσεις.

Άσκηση 14. Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)(\alpha^2+1) < 0$.

Άσκηση 15. Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 < \beta^3$.

Άσκηση 16. Αν $\alpha < -2 < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + 2\alpha > \alpha\beta + 2\beta$.

Άσκηση 17. Αν $\alpha < \beta$ και $\alpha + \beta > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 < \beta^2$.

Άσκηση 18. Αν $\alpha < \beta$ και $\alpha + \beta < 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > \beta^2$.

Άσκηση 19. Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha}$.

Άσκηση 20. Αν $\alpha < 0 < \beta$, να αποδείξετε ότι $(\alpha - \beta)^2 > (\alpha + \beta)^2$.

Άσκηση 21. Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4$.

Άσκηση 22. Αν $\alpha < 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha(\alpha - 2)^2 < 4 - \alpha^2$.

Γ. Φράγματα παράστασης με μία μεταβλητή

Από τη διπλή ανισότητα να βρείτε ανάμεσα σε ποιους αριθμούς βρίσκεται καθεμία από τις παραστάσεις. Προσέξτε τις αλλαγές φοράς στις ανισότητες.

Άσκηση 23. Αν $1 < x < 3$, να βρείτε φράγματα για τις παραστάσεις:

α) $x + 2$

β) $4x - 5$

γ) $7 - 2x$

δ) $\frac{x - 2}{3}$

ε) $\frac{1}{x}$

στ) $\frac{2}{x + 1}$

Άσκηση 24. Αν $2 < x < 4$, να βρείτε φράγματα για τις παραστάσεις:

α) x^2

β) $(x + 1)^2$

γ) $5 - x^2$

δ) $\frac{1}{x^2}$

ε) $(x - 1)^2$

στ) x^3

Άσκηση 25. Αν $-4 < x < -2$, να βρείτε φράγματα για τις παραστάσεις:

α) $-x$

β) $1 - 2x$

γ) x^2

δ) $-x^3$

ε) $\frac{1}{x}$

στ) $\frac{2}{1 - x}$

Άσκηση 26. Αν $-1 < x < 2$, να βρείτε φράγματα για τις παραστάσεις:

α) $3x - 2$

β) $4 - x$

γ) $\frac{x + 2}{2}$

δ) $(x - 3)^2$

ε) $(x + 1)^2$

στ) $2 - x$

Άσκηση 27. Αν $1 < x < 2$, να βρείτε φράγματα για τις παραστάσεις:

α) $1 - \frac{4}{x^2}$

β) $x^2 + 2$

γ) $(x + 1)^2 - 3$

δ) $\frac{3}{x}$

ε) $\frac{1}{x^2 + 1}$

στ) $(2x - 1)^2$

Άσκηση 28. Αν $0 < x < 1$, να βρείτε φράγματα για τις παραστάσεις:

α) x^2 **β)** x^3

γ) $1 - x$ **δ)** $\dfrac{1}{1+x}$

ε) $2x + 3$ **στ)** $(x+1)^2$

Δ. Φράγματα παράστασης με δύο μεταβλητές

Για καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις να βρείτε ένα κάτω και ένα άνω φράγμα, χρησιμοποιώντας τις δοσμένες ανισότητες.

Άσκηση 29. Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, να βρείτε φράγματα για:

α) $x + y$ **β)** $x - y$

γ) $2x + y$ **δ)** $x + 2y$

ε) xy **στ)** $\dfrac{x}{y}$

Άσκηση 30. Αν $2 < x < 4$ και $1 < y < 2$, να βρείτε φράγματα για:

α) $x + y$ **β)** $x - y$

γ) $3x - y$ **δ)** xy

ε) $\dfrac{x}{y}$ **στ)** $x^2 + y^2$

Άσκηση 31. Αν $-2 < x < -1$ και $2 < y < 4$, να βρείτε φράγματα για:

α) $x + y$ **β)** $x - y$

γ) xy **δ)** $\dfrac{x}{y}$

ε) $x^2 + y^2$ **στ)** $-2x + 3y$

Άσκηση 32. Αν $0 < x < 2$ και $1 < y < 3$, να βρείτε φράγματα για:

α) $2x + y$ **β)** $x + 3y$

γ) xy **δ)** $\dfrac{x}{y}$

ε) $(x+1)(y+1)$ **στ)** $x^2 + y^2$

Άσκηση 33. Αν $1 < x < 2$ και $3 < y < 4$, να βρείτε φράγματα για:

α) $x^2 + y^2$ **β)** $y^2 - xy$

γ) $x^2 + y^3$ **δ)** $x^2 - 2y$

ε) $2y - x$ **στ)** $\dfrac{x+1}{y+1}$

Άσκηση 34. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $4 \leq y \leq 5$, να βρείτε φράγματα για:

α) $x + y$ **β)** xy

γ) $\dfrac{x}{y}$ **δ)** $y^2 - xy$

ε) $x^2 + y^3$ **στ)** $y^2 + 2x$

Ε. Συνδυαστικές ασκήσεις

Εφαρμόστε τις ιδιότητες της διάταξης σε αθροίσματα, γινόμενα, δυνάμεις και κλάσματα.

Άσκηση 35. Αν $2 < x < 3$ και $1 < y < 2$, να βρείτε φράγματα για:

α) $x^2 + y^3$ **β)** $3x - y^2$

γ) $x^2 - xy$ **δ)** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

Άσκηση 36. Αν $-3 < x < -1$ και $1 < y < 2$, να βρείτε φράγματα για:

α) $x^2 + y^2$ **β)** $2y - xy$

γ) $x^2 - 3x$ **δ)** $xy - y^2$

Άσκηση 37. Αν $1 < x < 2$ και $2 < y < 3$, να βρείτε φράγματα για:

α) $(x+1)^2 + y^2$ **β)** $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y}$

γ) $y^3 - x^2$ **δ)** $\dfrac{y}{x} + x$

Άσκηση 38. Αν $2 < x < 4$, να βρείτε φράγματα για:

α) $(x-1)^2 + 3$ **β)** $\dfrac{4}{x^2} - 1$

γ) $(x+2)^2 - 5$ **δ)** $\dfrac{3}{x+1}$

Τέλος εργασίας · Μόνο εκφωνήσεις