

Θεωρημα Rolle

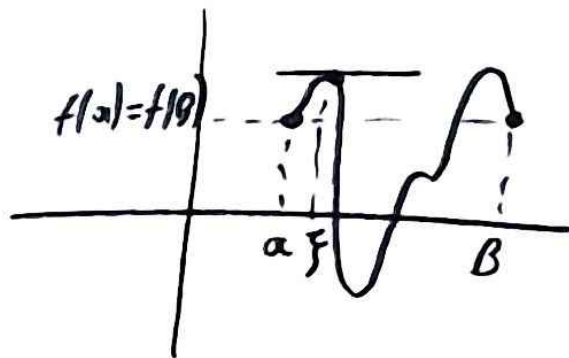
Εστω $f(x)$ ορισμένη στο $[a, b]$.

1. Αν η $f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$
2. Αν η $f(x)$ παραγωγισμένη στο (a, b)
3. Αν $f(a) = f(b)$

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ τ.ω $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρική ερμηνεία Rolle

Η ύπαρξη ενός $\xi \in (a, b)$
τ.ω $f'(\xi) = 0$ γεωμετρικά



σημαίνει ότι υπάρχει
τουλάχιστον ένα σημείο $M(\xi, f(\xi))$
 $\xi \in (a, b)$ στο οποίο η εφαπτομένη
είναι παράλληλη στον $x'x$

Άσκηση 28

Δίνεται $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Νόο η $f(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Rolle στο $[0,3]$ και ενδεχόμενα να βρούμε ένα ξ που να επαληθεύει το συμπέρασμα του Rolle.

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,3]$ ως πολυώνυμο και παραγωγισίμη στο $(0,3)$ ως πολυώνυμο.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(3) = 0 \end{array} \right\} \text{Άρα } f(0) = f(3) \text{ από Rolle } \exists \xi \in (0,3) \text{ π.ω. } f'(\xi) = 0$$

Επαληθεύω

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\begin{array}{ll} x=1 & x=3 \\ \text{Δύο.} & \text{Απορρίπτει γιατί} \end{array}$$

$$\text{το } 3 \notin (0,3)$$

Δίνεται $f(x) = (x-2)\eta\mu x$

α) Νόο η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τωλάχιστων
ριζα στο $(2, \pi)$.

Η $f(x)$ συνεχής στο $[2, \pi]$ ως πράξη συνεχών
συναρτησεων και παραγωγισμένη στο $(2, \pi)$
ως πράξη παραγωγισμένων συναρτησεων.
 $f(2) = f(\pi) = 0$ άρα από Rolle $\exists \xi \in (2, \pi)$
τ.ω $f'(\xi) = 0$.

β) Νόο η εξίσωση $\epsilon\psi x = 2 - x$ έχει μια
τωλάχιστων ριζα στο $(2, \pi)$.

Από πριν $\exists \xi \in (2, \pi)$ τ.ω $f'(\xi) = 0$

$$f'(x) = \eta\mu x + (x-2)\sigma\upsilon\nu x$$

$$\text{άρα } f'(\xi) = \eta\mu \xi + (\xi-2)\sigma\omega\xi = 0$$

$$(\xi-2)\sigma\omega\xi = -\eta\mu \xi.$$

$$\Leftrightarrow (\xi-2) = -\frac{\eta\mu \xi}{\sigma\omega\xi} \quad (\Leftrightarrow) \quad 2-\xi = \epsilon\psi \xi.$$

Άσκηση 30

Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισμένη και $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Νόο η f είναι 1-1.

Εστω ότι η f δεν είναι 1-1.

Αρα $\exists x_1, x_2$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε $f(x_1) = f(x_2)$

τότε από Rolle $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ π.ω $f'(\xi) = 0$

οπω/ αυτό είναι άτοπο αφού $f'(x) \neq 0$

Αρα η $f(x)$ δεν είναι 1-1.

Άσκηση 31

Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισίμη και η G

τιμή των x στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$

α) νδο για την $G(x) = \frac{f(x)}{x-3}$ εφαρμόζεται

ο Rolle στο $[1, 2]$

Η $G(x)$ είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως
πράγμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγισίμη
στο $(1, 2)$ ως πράγμα παραγωγισίμων συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} G(1) &= \frac{f(1)}{-2} = 0 \\ G(2) &= \frac{f(2)}{-1} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &G(1) = G(2) \text{ άρα από Rolle} \\ &\exists \xi \in (1, 2) \text{ τ.ω } G'(\xi) = 0. \end{aligned}$$

β) νδο $\exists \xi \in (1, 2)$ τ.ω η εφαυτομένη τμ G
στο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το $A(3, 0)$.

Άρκει νδο $\exists \xi \in (1, 2)$ τ.ω $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \rightarrow A(3, 0)$

$$\Leftrightarrow 0 - f(\xi) = f'(\xi)(3 - \xi) \quad (\Rightarrow) \quad (\xi - 3)f'(\xi) - f(\xi) = 0.$$

And note $\exists \xi \in (1, 2)$ s.t. $G'(\xi) = 0$

$$G(x) = \frac{f(x)}{x-3}$$

$$G'(x) = \frac{f'(x)(x-3) - f(x)}{(x-3)^2}$$

$$\text{And } G'(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f'(\xi)(\xi-3) - f(\xi)}{(\xi-3)^2} = 0$$

$$\Rightarrow f'(\xi)(\xi-3) - f(\xi) = 0.$$

Άσκηση 32

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$

και παραγωγισμένη στο $(1,2)$ με $f(2)=2$ και $f(1)=1$

α) Να δο $\exists \xi_1 \in (1,2)$ τ.ω $f'(\xi_1) = 3\xi_1^2 - 4\xi_1$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \quad (\Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 + 4x = 0)$$

$$(\Leftrightarrow [f(x) - x^3 + 2x^2]' = 0)$$

Θεωρώ $g(x) = f(x) - x^3 + 2x^2$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγισμένη στο $(1,2)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγισμένων συναρτήσεων.

$$\left. \begin{aligned} g(1) &= f(1) - 1 + 2 = 1 + 1 = 2 \\ g(2) &= f(2) - 8 + 8 = 2 \end{aligned} \right\} g(1) = g(2) \text{ άρα}$$

από Rolle $\exists \xi_1 \in (1,2)$ τ.ω $g'(\xi_1) = 0$

$$(\Leftrightarrow f(\xi_1) - \xi_1^3 + 2\xi_1^2 = 0 \quad (\Leftrightarrow f'(\xi_1) = 3\xi_1^2 - 4\xi_1 \\ \xi_1 \in (1,2).)$$

$$\textcircled{5} \text{ ΝΔΟ } \exists \xi_2 \in (1,2) \text{ τ.ω } f'(\xi)(\xi-3) = f'(\xi)$$

$$f'(x)(x-3) = -f(x) \quad (\Rightarrow) \quad f'(x)(x-3) + f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(x)(x-3)]' = 0$$

Θεωρώ $g(x) = f(x)(x-3)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγώσιμη στο $(1,2)$.

$$\left. \begin{aligned} g(1) &= -2f(1) = -2 \\ g(2) &= -f(2) = -2 \end{aligned} \right\} g(1) = g(2) \text{ άρα από}$$

$$\text{Rolle } \exists \xi_2 \in (1,2) \text{ τ.ω } g'(\xi_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi_2)(\xi_2-3) + f(\xi_2) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad f'(\xi_2)(\xi_2-3) = -f(\xi_2)$$

$$\textcircled{8} \text{ ΝΔΟ } \exists \xi_3 \in (1,2) \text{ τ.ω } f'(\xi_3) = \frac{f(\xi_3)}{\xi_3}$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (\Rightarrow) \quad f'(x)x - f(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = 0$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0 \quad . \quad \text{Θεωρώ } g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ η οποία είναι}$$

συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγώσιμη στο $(1,2)$.

$$\left. \begin{aligned} g(1) &= f(1) = 1 \\ g(2) &= \frac{f(2)}{2} = 1 \end{aligned} \right\} g(1) = g(2) \text{ άρα από Rolle}$$

$$\exists \xi_3 \in (1,2) \text{ τ.ω } g'(\xi_3) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad f'(\xi_3) = \frac{f(\xi_3)}{\xi_3}$$

Άσκηση 33

Νόμο η εξίσωση $4x^3 + 3\lambda x^2 + 2(\lambda - 2)x - 2\lambda + 1 = 0$
έχει ταλλαχιστων μια λυση στο $(0, 1)$.

Θεωρω $f(x) = 4x^3 + 3\lambda x^2 + 2(\lambda - 2)x - 2\lambda + 1$.

Η $f(x)$ συνεχης στο $[0, 1]$ και παραγωγισμη
στο $(0, 1)$ ως πολυωνυμο.

$$f(0) = -2\lambda + 1 \quad \text{και} \quad f(1) = 3\lambda + 1.$$

Επειδη το $f(0) \cdot f(1)$ δεν είναι γνωστο ως
προ/ το ηροσημο του ο Bolzano δεν δωλεια.

Θεωρω παραγουςα $F(x) = x^4 + \lambda x^3 + (\lambda - 2)x^2 + (1 - 2\lambda)x$

η οποια είναι συνεχης στο $[0, 1]$ και παραγωγισμη
στο $(0, 1)$ ως πολυωνυμο.

$$F(0) = 0 \quad \text{και} \quad F(1) = 0 \quad \text{αρα} \quad F(0) = F(1)$$

αρα απο Rolle $\exists \xi \in (0, 1)$ τ.ω $F'(\xi) = 0$

$$\Rightarrow f(\xi) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 4\xi^3 + 3\lambda\xi^2 + 2(\lambda - 2)\xi - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\xi \in (0, 1).$$

Άσκηση 34

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2(\lambda + 1 + \ln x) - 3(\lambda + 1)x - 4\ln x$

Νόο $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists \xi \in (1, 2)$ ώστε η εφαπτομένη της f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Η εφαπτομένη στο $M(\xi, f(\xi))$ είναι

$$ε: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

Αρκεί νόο $\exists \xi \in (1, 2)$ τ.ω $f'(\xi) = 0$.

1. Η $f(x)$ συνεχής στο $[1, 2]$ ως πρός τις συνεχείς συναρτήσεις.

2. Η $f(x)$ παραγωγισίμη στο $(1, 2)$ ως πρός τις παραγωγισίμες συναρτήσεις

$$3. f(1) = -2\lambda - 2 \quad \text{και} \quad f(2) = -2\lambda - 2$$

Αρα από Rolle $\exists \xi \in (1, 2)$ τ.ω $f'(\xi) = 0$.

Άσκηση 3.5

Δίνεται παραγωγισμένη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(0) = e^6$
και $f(3) = e^{-3}$

α) Να βρεθεί $\exists x_1 \in (0, 3)$ τ.ω $f'(x_1) = -3f(x_1)$

$$f'(x) = -3f(x) \quad (\Leftrightarrow) \quad f'(x) + 3f(x) = 0$$

$$e^{3x} f'(x) + 3e^{3x} f(x) = 0$$

Θέτω $g(x) = 3$
 $\Rightarrow g'(x) = 3$
αρα
 $e^{g(x)} = e^{3x}$

$$[e^{3x} f(x)]' = 0$$

Θεωρώ $\varphi(x) = e^{3x} f(x)$ η

οποια είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και
παραγωγισμένη στο $(0, 3)$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= f(0) = e^6 \\ \varphi(3) &= e^9 f(3) = e^9 e^{-3} = e^6 \end{aligned} \right\} \varphi(0) = \varphi(3) \text{ αρα}$$

απο Rolle $\exists x_1 \in (0, 3)$ τ.ω $\varphi'(x_1) = 0$

$$(\Leftrightarrow) \quad e^{3x_1} f'(x_1) + 3e^{3x_1} f(x_1) = 0$$

$$f'(x_1) + 3f(x_1) = 0$$

$$f'(x_1) = -3f(x_1)$$

③ Νδσ $\exists x_2 \in (0,3)$ τ.ω $f'(x_2) - 2x_2 f(x_2) = 0$

$$f'(x) - 2x f(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad e^{+x^2} f'(x) + 2x e^{+x^2} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} g(x) &= +2x \text{ απα} \\ G(x) &= +x^2 \text{ συνεπώς} \\ e^{G(x)} &= e^{+x^2} \end{aligned}$$

$$\left[e^{+x^2} f(x) \right]' = 0$$

Θαπω $\varphi(x) = e^{+x^2} f(x)$ η

οποια είναι συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= f(0) = e^6 \\ \varphi(3) &= e^9, f(3) = e^9 e^{-3} = e^6 \end{aligned} \right\} \varphi(0) = \varphi(3) \text{ απα}$$

απο Rolle $\exists x_2 \in (0,3)$ τ.ω $\varphi'(x_2) = 0$

$$(\Leftrightarrow) \quad e^{x_2^2} f'(x_2) + 2x_2 e^{x_2^2} f(x_2) = 0$$

$$f'(x_2) + 2x_2 f(x_2) = 0$$

Άσκηση 36

Νόο οι $f(x) = e^x + x^2$ και $g(x) = \alpha x + \beta$ έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Τα κοινά σημεία των (f, g) προκύπτουν από την εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow e^x + x^2 - \alpha x - \beta = 0$$

Θεωρώ $\varphi(x) = e^x + x^2 - \alpha x + \beta$.

Εστω ότι η $\varphi(x)$ έχει τρία ριζές x_1, x_2, x_3 .
($x_1 < x_2 < x_3$)

$$\text{Προφανώς } \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi(x_3) = 0$$

$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ άρα από Rolle $\exists \xi_1 \in (x_1, x_2)$ τ.ω $\varphi'(\xi_1) = 0$

$\varphi(x_2) = \varphi(x_3)$ άρα από Rolle $\exists \xi_2 \in (x_2, x_3)$ τ.ω $\varphi'(\xi_2) = 0$

$\varphi'(\xi_1) = \varphi'(\xi_2)$ άρα από Rolle $\exists \zeta \in (\xi_1, \xi_2)$ τ.ω $\varphi''(\zeta) = 0$

$$\text{οπώς } \varphi'(x) = e^x + 2x - \alpha \quad \text{και} \quad \varphi''(x) = e^x + 2$$

$$\text{και } \varphi''(\zeta) = e^\zeta + 2 = 0 \quad \text{Ατοπο!} \quad \text{Άρα η } \varphi(x) \text{ δεν}$$

μπορεί να έχει τρία ριζά συνεπώς έχει το πολύ δύο.

Άσκηση 37

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγισμένη
ώστε $f(0) = f(1) = f(2)$. Να δο $\exists \xi \in (0, 2)$ τ.ω $f''(\xi) = 0$

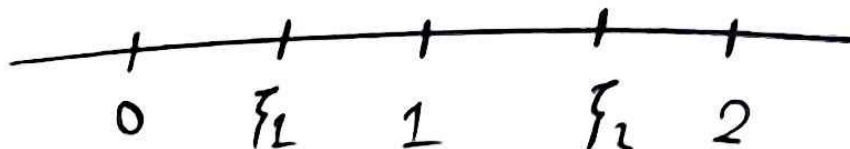
Η $f(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Rolle
στο $[0, 1]$ και $[1, 2]$

αρα $\exists \xi_1 \in (0, 1)$ τ.ω $f'(\xi_1) = 0$

αρα $\exists \xi_2 \in (1, 2)$ τ.ω $f'(\xi_2) = 0$

οπω/ τώρα η $f'(x)$ ικανοποιεί τον Rolle
στο $[\xi_1, \xi_2]$ αφού $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ αρα

$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τ.ω $f''(\xi) = 0$

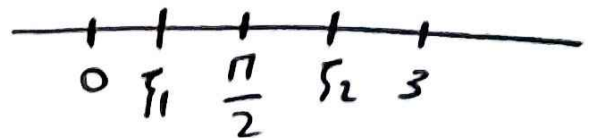


Νόσο η εξίσωση $x^2 + 5\omega x = 2x$ έχει ακριβώς

δύο ρίζες οι οποίες ανήκουν στο $(0, 3)$

$$x^2 + 5\omega x = 2x \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 + 5\omega x - 2x = 0$$

Θα πάρω $f(x) = x^2 + 5\omega x - 2x$



- $f(0) = 1$

- $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - \pi = \frac{\pi^2 - 4\pi}{4} = \frac{\pi(\pi - 4)}{4} < 0$

αρα $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$ αρα από Bolzano

$$\exists \xi_1 \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ τ.ω } f(\xi_1) = 0$$

- $f(3) = 9 + 5\omega 3 - 6 = 3 + 5\omega 3 > 0$

αρα $f(\frac{\pi}{2})f(3) < 0$ αρα από Bolzano

$$\exists \xi_2 \in (\frac{\pi}{2}, 3) \text{ τ.ω } f(\xi_2) = 0.$$

Συνεπώς η $f(x)$ έχει κατάχιστον δύο ρίζες στο $(0, 3)$

Εστω ότι η $f(x)$ έχει τρεις ρίζες στο $(0, 3)$

οπου $p_1 < p_2 < p_3$

Τότε $f(p_1) = f(p_2)$ Rolle $\exists k_1 \in (p_1, p_2)$ τ.ω $f'(k_1) = 0$

$f(p_2) = f(p_3)$ Rolle $\exists k_2 \in (p_2, p_3)$ τ.ω $f'(k_2) = 0$

$f'(k_1) = f'(k_2)$ Rolle $\exists k \in (k_1, k_2)$ τ.ω $f''(k) = 0$

οπότε $f'(x) = 2x - \eta\mu x - 2$ και $f''(x) = 2 - \sigma\omega x > 0$

αρα $f''(x) = 0$ Ατονο!

Συνεπώς η $f(x)$ δεν μπορεί να έχει

τρεις ριζές αρα θα έχει το πολύ δύο.

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγώσιμη
ώστε $f(1) - f(0) = 2$ και $f''(x) < 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Νόο υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = 4\xi^3 + 2\xi$

$$f'(x) = 4x^3 + 2x \quad (\Leftrightarrow) f'(x) - 4x^3 - 2x = 0 \quad (\Leftrightarrow) (f(x) - x^4 - x^2)' = 0$$

$$\text{Θεωρώ } g(x) = f(x) - x^4 - x^2$$

$$g(0) = f(0)$$

$$g(1) = f(1) - 2 = f(0)$$

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = f(0) \\ g(1) = f(1) - 2 = f(0) \end{array} \right\} g(0) = g(1) \text{ από Rolle}$$

$$\exists \xi \in (0,1) \text{ τ.ω } g'(\xi) = 0 \quad (\Leftrightarrow) f'(\xi) - 4\xi^3 - 2\xi = 0$$

$$f'(\xi) = 4\xi^3 + 2\xi$$

Τώρα θα δείξω ότι η εξίσωση $f'(x) - 4x^3 - 2x = 0$
έχει το πολύ μία λύση.

Θεωρώ $\varphi(x) = f'(x) - 4x^3 - 2x$. Έστω ότι η $\varphi(x)$

έχει δύο ριζές $x_1 < x_2$

$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ από Rolle $\exists \kappa \in (x_1, x_2)$ τ.ω $\varphi'(\kappa) = 0$

$$\varphi'(x) = f''(x) - 12x^2 - 2 = f''(x) - 2 - 12x^2 < 0 \text{ από } \varphi'(\kappa) = 0$$

Από το 1

από η $\varphi(x)$ δεν μπορεί να έχει δύο ριζές από έχει μία.

Άσκηση 40

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισμένη και $f(1)=4, f(2)=3$

α) Να βρεθεί $\exists x_0 \in (1,2)$ τ.ω $f(x_0) = x_0^2$

$$f(x) = x^2 \quad (\Leftrightarrow) \quad f(x) - x^2 = 0$$

$$\Theta \epsilon \tau \omega \quad \varphi(x) = f(x) - x^2$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(1) &= f(1) - 1 = 4 - 1 = 3 \\ \varphi(2) &= f(2) - 4 = 3 - 4 = -1 \end{aligned} \right\} \varphi(1)\varphi(2) < 0$$

Βολτσα $\exists x_0 \in (1,2)$ τ.ω $\varphi(x_0) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad f(x_0) - x_0^2 = 0$
 $f(x_0) = x_0^2$

β) να βρεθεί $\exists \xi \in (1,2)$ τ.ω $f(\xi) + \xi f'(\xi) = f'(\xi) + 3\xi^2 - 2\xi$

$$f(x) + x f'(x) - f'(x) - 3x^2 + 2x = 0$$

$$(x f(x) - f(x) - x^3 + x^2)' = 0 \quad \Theta \epsilon \omega \rho \omega \quad h(x) = (x-1)f(x) - x^3 + x^2$$

$$((x-1)f(x) - x^3 + x^2)' = 0$$

$$\begin{aligned} h(x_0) &= (x_0-1)f(x_0) - x_0^3 + x_0^2 = (x_0-1)x_0^2 - x_0^3 + x_0^2 = \\ &= x_0^3 - x_0^2 - x_0^3 + x_0^2 = 0 \end{aligned}$$

$h(1) = 0$. Επειδή $h(x_0) = h(1)$ οπότε $\exists \xi \in (1, x_0)$
τ.ω $h'(\xi) = 0$

$$\Leftrightarrow f(\xi) + \xi f'(\xi) - f'(\xi) - 3\xi^2 + 2\xi = 0$$