ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΑΝΑΜΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ονοματεπώνυμο: ..... **Ημερομηνία:** .....

Άσκηση 1. Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{x^2 - 4|x|}{|x| - 4}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A < 6$.

Άσκηση 2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α. $|3x - 2| = 7$.

β. $|x + 1| = |2x - 5|$.

γ. $|x - 4| - 3 = 0$.

Άσκηση 3. Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκονται οι παραστάσεις:

α. $x + y$.

β. xy.

γ. $2x - y$.

δ. $\dfrac{x}{y}$.

Άσκηση 4. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω ρητές παραστάσεις, αναφέροντας τις τιμές για τις οποίες ορίζονται:

α. $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$.

β. $\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x}$.

γ. $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$.

Άσκηση 5. Αν $-3 < x < -1$, να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

α. $A = |x + 3| + |x - 1|$.

β. $B = |2x - 1| - |x + 1|$.

γ. $\Gamma = |3x + 2| - |x - 4|$.

Άσκηση 6. Να αποδείξετε ότι:

α. $x^2 + 4y^2 \geq 4|xy|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

β. $\dfrac{2|a|}{a^2+1} \leq 1$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $|x-1| \leq 3$.

β. $|2x+3| > 5$.

γ. $|x+2| < |x-1|$.

Άσκηση 8. Να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε:

α. $(3x-2)^2 - x(x-1)(x+1)$.

β. $2 - (x+1)^2 - (2x-1)(x-2)$.

γ. $(x^2-x+1)^2 - x^2(x^2+2)$.

Άσκηση 9. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει:

α. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$.

β. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 10 = 0$.

Άσκηση 10. Αν $d(a,0) < 1$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = \big|2 - |a-1|\big|$.

β. $B = |2a-3| + |a+2|$.

γ. $\Gamma = |a^2 - 1|$.

Άσκηση 11. Για $x, y \neq 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\dfrac{(x^{-2}y^3)^{-1}(x^2y^{-1})^2}{x^3y^{-2}}$.

β. $\dfrac{(x^{-1}y^2)^3}{(x^2y^{-1})^{-2}}$.

Άσκηση 12. Να μετατρέψετε καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων:

α. $-2 \leq x < 5$.

β. $x < -1$ ή $x \geq 3$.

γ. $|x-2| \leq 4$.

δ. $|x+1| > 3$.

Άσκηση 13. Αν $1 < a < 2$, να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση $A = |3a - 5| - |a - 2|$.

Άσκηση 14. Αν $-1 < x < 2$, να βρείτε το σύνολο τιμών καθεμίας από τις παραστάσεις:

α. x^2.

β. $x^2 + 1$.

γ. $4 - x^2$.

Άσκηση 15. Να αποδείξετε ότι:

α. $a^2 + b^2 \geq 2ab$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

β. $9a^2 + 1 \geq 6|a|$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

γ. $\dfrac{|a|}{a^2 + 9} \leq \dfrac{1}{6}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 16. Να υπολογίσετε, χωρίς να κάνετε πράξεις με μεγάλους αριθμούς, την τιμή της παράστασης:

α. $A = \left(\dfrac{51}{50} + \dfrac{50}{51}\right)^2 - \left(\dfrac{51}{50} - \dfrac{50}{51}\right)^2$.

Άσκηση 17. Αν $a < -1 < b$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |a| + |a + 1| - |a - b|$.

β. $B = |b - a| - |a + 1| + |b + 1|$.

Άσκηση 18. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $x^2 \leq 16$.

β. $x^2 > 4$.

γ. $(x - 2)^3 \geq 0$.

Άσκηση 19. Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{x^2 - 2|x|}{|x| - 2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παράστασης.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $A \geq 3$.

Άσκηση 20. Αν $2 < x < 4$ και $-1 < y < 1$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκονται:

α. $x + y$.

β. $x - y$.

γ. xy.

Άσκηση 21. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις και να αναφέρετε τις τιμές του x που αποκλείονται:

α. $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

β. $\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$.

γ. $\dfrac{x^3-x}{x^2-1}$.

Άσκηση 22. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α. $|x+3|+|x-1|=6$.

β. $|x-2|-|x+1|=1$.

Άσκηση 23. Να βρείτε τους αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει:

α. $x^2+y^2-2x-4y+5=0$.

β. $x^2+4y^2-6x+8y+13=0$.

Άσκηση 24. Αν $2 \leq x < 3$ και $4 \leq y \leq 5$, να βρείτε όρια για:

α. $x+y$.

β. xy.

γ. x^2-y.

δ. $\dfrac{y}{x}$.

Άσκηση 25. Να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

α. $|x-3|<2 \iff x \in \ldots$

β. $|x+2|\geq 5 \iff x \in \ldots$

γ. $x \in [-4,2] \iff |x-\ldots| \leq \ldots$

δ. $x \in (-\infty,-2)\cup(6,+\infty) \iff |x-\ldots| > \ldots$

Άσκηση 26. Αν $a<3$, να αποδείξετε ότι $a(a-3)^2 < 27-3a^2$.

Άσκηση 27. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω ρητές παραστάσεις:

α. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

β. $\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-4}$.

γ. $\dfrac{9x^2-1}{3x^2+2x-1}$.

Άσκηση 28. Για κάθε $a \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

α. $|a| + \dfrac{9}{|a|} \geq 6$.

β. $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \geq 2$, όταν $a > 0$.

Άσκηση 29. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(x+3)^2 - (2x-1)^2 + 3x(x-2)$.

β. $x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2)$.

γ. $(2x+1)^2 - x(3x-2)(x+2)$.

Άσκηση 30. Αν $-2 < x < 4$, να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις παραστάσεις:

α. $A = |x+2| - |x-4|$.

β. $B = |x+2| - |x-1| + |x-4|$.

Άσκηση 31. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να γράψετε τις λύσεις με διαστήματα:

α. $|x-1| \geq 2$.

β. $|3x+2| < 4$.

γ. $x^2 < 25$.

δ. $x^2 \geq 9$.

Άσκηση 32. Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι $x^2 - 3x + 3 > \dfrac{1}{x}$.

Άσκηση 33. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z για τους οποίους ισχύει:

α. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z = -14$.

Άσκηση 34. Αν $a < b$, να αποδείξετε ότι $a^3 - b^3 \leq ab^2 - a^2b$.

Άσκηση 35. Αν $1 < x \leq 3$ και $2 < y < 4$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται καθεμία από τις παραστάσεις:

α. $x + y$.

β. $2x + y$.

γ. $y - x$.

δ. $\dfrac{x}{y}$.

Άσκηση 36. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις, αφού προσδιορίσετε πότε ορίζονται:

α. $\dfrac{|x^2-9|}{|x|-3}$.

β. $\dfrac{x^2-6|x|+9}{|x|-3}$.

Άσκηση 37. Να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{|a|}{a^2+16} \leq \dfrac{1}{8}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

β. $x^2+y^2-2x+4y+5 \geq 0$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 38. Για $x = 2026$ και $y = -\dfrac{1}{2026}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

α. $A = \dfrac{(x^{-2}y)^{-1}(xy^{-1})^2}{x^3y^{-4}}$.

Άσκηση 39. Να αποδείξετε τις ταυτότητες (όπου ορίζονται οι παραστάσεις):

α. $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 - \left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2 = 4$.

β. $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$.

Άσκηση 40. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $|2x-5| = 3x+1$.

β. $|x-4| = |2x+2|$.

γ. $2|x-1|-|x+2| = 0$.

Άσκηση 41. Αν $3 < x < 5$ και $1 < y < 2$, να βρείτε τα όρια των παραστάσεων:

α. $x-y$.

β. x^2+y^2.

γ. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

Άσκηση 42. Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{x^3-9x}{x^2-3x}$.

α. Να προσδιορίσετε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A \geq 4$.

Άσκηση 43. Αν $0 < a < 1$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |a-1| + |2a+3|$.

β. $B = |a^2-1| - |a^2+a|$.

γ. $\Gamma = \big|1 - |a-2|\big|$.

Άσκηση 44. Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4y^2 - 4xy + 1 \geq 1$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Άσκηση 45. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

α. $d(x, 5) \leq 3$.

β. $d(x, -2) > 4$.

γ. $|2x-1| - 3 < 0$.

Άσκηση 46. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\dfrac{(x+1)^3 - 1}{x}$, για $x \neq 0$.

β. $\dfrac{x^5 - 16x}{x^3 + 4x}$, για τις τιμές του x που ορίζεται.

γ. $\dfrac{8x^3 - 2x}{2x^2 + x}$, για τις τιμές του x που ορίζεται.

Άσκηση 47. Αν $a < b < c$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $A = |a-b| + |b-c| + |c-a|$.

β. $B = |a-c| - |a-b| + |b-c|$.

Άσκηση 48. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις για κάθε πραγματικό x:

α. $A = |x-2| + |x+1|$.

β. $B = |2x-4| - |x+1|$.