ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΕΣΤ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Περιεχόμενα

Θεωρία και βασικά θεωρήματα
Σωστό – Λάθος με σύντομες αιτιολογήσεις
Θεώρημα Bolzano
Ισότητα, πράξεις και σύνθεση συναρτήσεων
Εύρεση τύπου συνάρτησης
Αντίστροφη συνάρτηση
Όρια και κριτήριο παρεμβολής
Σύνολο τιμών και συνδυαστικές ασκήσεις

Καθαρογραμμένη και θεματικά ταξινομημένη μορφή του υλικού προετοιμασίας

Περιεχόμενα

1 Θεωρία – βασικοί ορισμοί και θεωρήματα **3**

2 Σωστό – Λάθος: 1ο κεφάλαιο **6**

3 Θεματική ενότητα: Το θεώρημα Bolzano **11**

4 Ισότητα, πράξεις και σύνθεση συναρτήσεων **14**

5 Εύρεση τύπου συνάρτησης **17**

6 Αντίστροφη συνάρτηση και σύνθεση **20**

7 Όρια – βασικοί τρόποι αντιμετώπισης **22**

8 Σύνολο τιμών και ύπαρξη – μοναδικότητα ρίζας **24**

9 Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής **26**

1. Θεωρία – βασικοί ορισμοί και θεωρήματα

1. Συνάρτηση και σύνολο τιμών

Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το** A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε έναν μόνο πραγματικό αριθμό y. Ο αριθμός y λέγεται **τιμή** της f στο x και γράφεται $y = f(x)$.

$$A_f = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \text{ ορίζεται}\}, \qquad f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \ y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

2. Ισότητα συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται **ίσες**, όταν έχουν **ίδιο πεδίο ορισμού**, δηλαδή $A_f = A_g = A$, και **ίδιο τύπο τιμών** για κάθε $x \in A$:

$$f(x) = g(x), \qquad \forall x \in A.$$

3. Ολικό μέγιστο – ολικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \forall x \in A.$$

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \forall x \in A.$$

4. Συνάρτηση $1-1$

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

5. Αντίστροφη συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται όταν είναι $1-1$ στο A. Τότε η αντίστροφή της f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A)$ και αντιστοιχίζει κάθε $y \in f(A)$ στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο $f(x) = y$:

$$f^{-1} : f(A) \to A, \qquad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

6. Κριτήριο παρεμβολής

Έστω συναρτήσεις f, g, h. Αν για κάθε x κοντά στο x_0 ισχύει

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$, τότε

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}.$$

7. Συνέχεια σε σημείο και κλειστό διάστημα

Μια συνάρτηση f είναι **συνεχής στο** x_0, όταν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Είναι **συνεχής στο** $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha), \qquad \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta).$$

8. Θεώρημα Bolzano

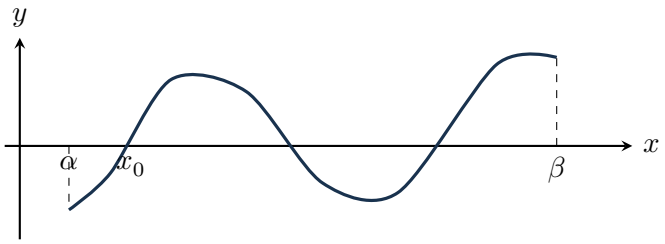
Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$. Αν

1. f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
2. $f(\alpha)\,f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{f(x_0) = 0}.$$

Γεωμετρική ερμηνεία. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, με τετμημένη $x_0 \in (\alpha,\beta)$.



9. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$. Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$, ώστε

$$\boxed{f(x_0) = \eta}.$$

Απόδειξη (όπως στο υλικό). Έστω $f(\alpha) < f(\beta)$, οπότε $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \eta,$$

η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επίσης

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0, \qquad g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0,$$

άρα $g(\alpha)g(\beta) < 0$. Επομένως η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Bolzano, οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με

$$g(x_0) = 0 \iff f(x_0) = \eta. \quad \text{Ο.Ε.Δ.}$$

10. Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε παίρνει στο διάστημα αυτό μια **μέγιστη** τιμή M και μια **ελάχιστη** τιμή m. Δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ ώστε

$$\boxed{m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]}.$$

2. Σωστό – Λάθος: 1ο κεφάλαιο

Οδηγία: Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**. Ακολουθούν οι απαντήσεις με σύντομες αιτιολογήσεις, όπως στο υλικό.

1. Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x αρκετά κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα πεπερασμένα όρια των f, g στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

2. Η συνάρτηση f είναι $1-1$ ακριβώς όταν, για κάθε $y \in f(A)$, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία και μόνο λύση $x \in A$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{συν}\, x - 1}{x} = 1$.

4. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = 0$.

5. Για $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$, η σύνθεση $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

6. Για κάθε $0 < \alpha < 1$ ισχύει $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha^x = +\infty$.

7. Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς, μη σταθερής συνάρτησης πάνω σε διάστημα είναι διάστημα.

8. Μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ εφόσον υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο Δ με $f(x_1) < f(x_2)$.

9. Αν (α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση αντιστρέψιμης f, τότε (β, α) ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

10. Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι $1-1$ είναι αναγκαστικά γνησίως μονότονη.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \text{συν}\, x}{x} = 0$.

12. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}, όταν υπάρχει αντίστροφη, είναι συμμετρικές ως προς $y = x$.

13. Κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης το πολύ μία φορά.

14. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = 0$.

15. Αν μια συνάρτηση είναι $1-1$, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ μία φορά.

16. Αν οι f, g έχουν και οι δύο πεδίο ορισμού $[0, 1]$ και σύνολο τιμών $[2, 3]$, τότε η $f \circ g$ ορίζεται σε όλο το $[0, 1]$.

17. Αν x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, τότε αυτό ισούται υποχρεωτικά με $f(x_0)$.

18. Η γραφική παράσταση της $|f|$ προκύπτει κρατώντας τα μη αρνητικά τμήματα της γραφικής παράστασης της f και ανακλώντας τα αρνητικά στον άξονα $x'x$.

19. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για όλα τα x αρκετά κοντά στο x_0 (για τα οποία ορίζεται).

20. Μια πολυωνυμική συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ δύο διαδοχικών πραγματικών ριζών της.

21. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$.

22. Για $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$, τότε ορίζεται η $g \circ f$.

23. Η $f(x) = \sqrt{|x|}$ έχει ως άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

24. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω συνεχούς, μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντοτε διάστημα.

25. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = -\infty$.

26. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα και δεν μηδενίζεται σε αυτό, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το διάστημα.

27. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, τότε το $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)}$ είναι οπωσδήποτε $+\infty$ ή $-\infty$.

28. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε η f είναι θετική κοντά στο x_0.

29. Για οποιεσδήποτε f, g για τις οποίες ορίζονται οι συνθέσεις τους, ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

30. Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όριά τους εκεί, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$.

31. Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ισχύει $|\eta\mu\, x| < |x|$.

32. Αν η f είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού A, τότε $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

33. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε η f είναι θετική κοντά στο x_0.

34. Μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό.

35. Αν οι f, g έχουν πεδία ορισμού A, B, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι πάντοτε το $A \cap B$.

36. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

37. Για $0 < \alpha < 1$ ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$.

38. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu\, x}{x} = 1$.

39. Αν το πεπερασμένο $\lim_{x \to x_0} f(x)$ είναι θετικό, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

40. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu\, x}{x} = 0$.

41. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu\, x}{x} = 1$.

42. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της αντιστρέψιμης f ως προς $y = x$.

43. Ακόμη κι αν ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, οι δύο συνθέσεις δεν είναι κατ' ανάγκη ίσες.

44. Αν υπάρχουν οι $f \circ g$ και $g \circ f$, αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

45. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x - 1}{x} = 1$.

46. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g στο $f(x_0)$, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

47. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

48. Για αντιστρέψιμη f, οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς $y = x$.

49. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

50. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

51. Οι $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ έχουν ορισμένη τη σύνθεση $g \circ f$ όταν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

52. Για κάθε πραγματικό x ισχύει $|\,\eta\mu\, x| \leq |x|$.

53. $\lim\limits_{x\to 0} x\,\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

54. Μια συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο σε κάθε διάστημα ανάμεσα σε διαδοχικές ρίζες της.

55. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

56. Για αντιστρέψιμη $f : A \to \mathbb{R}$, το πεδίο ορισμού της f^{-1} συμπίπτει με το $f(A)$.

57. Αν υπάρχουν οι αντίστοιχες συνθέσεις, τότε $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

58. Για κάθε θετικό ακέραιο ν, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = -\infty$.

59. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha)f(\beta) < 0$, υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ με $f(c) = 0$.

60. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της αντίστροφης f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς $y = x$.

61. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g στο $f(x_0)$, τότε $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

62. Η γραφική παράσταση της $-f$ προκύπτει με συμμετρία της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $y'y$.

63. Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$ ακριβώς όταν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

64. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε η f είναι θετική κοντά στο x_0.

65. Κάθε $1-1$ συνάρτηση είναι και γνησίως μονότονη.

Απαντήσεις και σύντομες αιτιολογήσεις

1. Σ. Η διάταξη διατηρείται κατά τη μετάβαση σε πεπερασμένα όρια.

2. Σ. Εκφράζει την ισοδυναμία της $1-1$ συνάρτησης με τη μοναδικότητα της προεικόνας.

3. Λ. Το όριο είναι 0, π.χ. από $1 - \text{συν}\, x = 2\,\eta\mu^2\,\frac{x}{2}$.

4. Λ. Η μορφή $0 \cdot \infty$ είναι απροσδιόριστη.

5. Σ. $D_{g\circ f} = \{x \in A : f(x) \in B\}$, που τότε είναι μη κενό.

6. Σ. $\alpha^x = (1/\alpha)^{-x}$, όπου $1/\alpha > 1$ και $-x \to +\infty$.

7. Σ. Συνέπεια του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών.

8. Λ. Η σχέση απαιτείται για *κάθε* ζεύγος $x_1 < x_2$ του Δ.

9. Σ. Από $f(\alpha) = \beta$ προκύπτει $f^{-1}(\beta) = \alpha$.

10. Λ. Μπορεί να είναι $1-1$ χωρίς να είναι γνησίως μονότονη.

11. Σ. Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $1 - \text{συν}\, x = 2\,\eta\mu^2(x/2)$.

12. Σ. Η αντιστροφή ανταλλάσσει τις συντεταγμένες των σημείων $(x, f(x))$.

13. Σ. Στο ίδιο x μια συνάρτηση έχει το πολύ μία τιμή $f(x)$.

14. **Λ.** Η μορφή $+\infty - \infty$ είναι απροσδιόριστη.

15. **Σ.** Δύο διαφορετικές τετμημένες με ίδια τεταγμένη θα παραβίαζαν το $1-1$.

16. **Λ.** Το $g(x)$ βρίσκεται στο $[2,3]$, εκτός του $D_f = [0,1]$.

17. **Λ.** Η ισότητα ορίου και τιμής απαιτεί συνέχεια στο x_0.

18. **Σ.** Η αρνητική περιοχή αντανακλάται ως προς τον άξονα $x'x$.

19. **Σ.** Ιδιότητα διατήρησης προσήμου κοντά σε σημείο με θετικό όριο.

20. **Σ.** Αν άλλαζε πρόσημο, θα υπήρχε ενδιάμεση ρίζα.

21. **Λ.** Το αριστερό και το δεξιό όριο είναι αντίθετα άπειρα.

22. **Σ.** Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in A$ με $f(x) \in B$.

23. **Σ.** Η συνάρτηση είναι άρτια, επειδή $f(-x) = f(x)$.

24. **Σ.** Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

25. **Λ.** Το όριο του e^x όταν $x \to -\infty$ είναι 0.

26. **Σ.** Αλλαγή προσήμου θα επέβαλλε μηδενισμό από το Bolzano.

27. **Λ.** Για $f(x) = x$ στο $x_0 = 0$, το $1/f(x)$ έχει διαφορετικά μονόπλευρα όρια.

28. **Σ.** Στον ορισμό του ορίου $+\infty$ αρκεί να πάρουμε $M = 1$.

29. **Λ.** Η σύνθεση δεν είναι αντιμεταθετική: $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$.

30. **Λ.** Στο όριο επιτρέπεται ισότητα, π.χ. $f(x) = 0$, $g(x) = x^2$ κοντά στο 0.

31. **Σ.** Γνωστή τριγωνομετρική ανισότητα (αυστηρή για $x \neq 0$).

32. **Λ.** Η ισότητα $f(f^{-1}(x)) = x$ ισχύει για $x \in f(A)$.

33. **Σ.** Εφαρμόζουμε την ιδιότητα διατήρησης προσήμου του ορίου.

34. **Σ.** Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

35. **Λ.** Πρέπει να αποκλειστούν τα x στα οποία $g(x) = 0$.

36. **Λ.** Συμπεραίνουμε θετικότητα μόνο κοντά στο x_0.

37. **Σ.** Η εκθετική είναι φθίνουσα για $0 < \alpha < 1$.

38. **Λ.** Το σωστό όριο είναι 0.

39. **Σ.** Διατήρηση προσήμου πεπερασμένου θετικού ορίου.

40. **Λ.** Το βασικό τριγωνομετρικό όριο ισούται με 1.

41. **Λ.** Με $-1 \leq \text{ημ}\, x \leq 1$ και $x \to +\infty$ το όριο είναι 0.

42. **Σ.** Κάθε (x, y) της C_f αντιστοιχεί στο (y, x) της $C_{f^{-1}}$.

43. **Σ.** Π.χ. $f(x) = x + 1$ και $g(x) = 2x$.

44. **Σ.** Η σύνθεση συναρτήσεων δεν είναι γενικά αντιμεταθετική.

45. **Λ.** Το όριο είναι 0.

46. **Σ.** Θεώρημα συνέχειας σύνθεσης συναρτήσεων.

47. **Σ.** Από τον ορισμό του $+\infty$ παίρνουμε $f(x) > 1$ κοντά στο x_0.

48. **Σ.** Οι συντεταγμένες των αντίστοιχων σημείων ανταλλάσσονται.

49. **Σ.** Ο λογάριθμος τείνει στο $-\infty$ καθώς το θετικό επιχείρημα τείνει στο 0.

50. **Σ.** Διατήρηση προσήμου.

51. **Σ.** Η σύνθεση ορίζεται στο μη κενό $\{x \in A : f(x) \in B\}$.

52. **Σ.** Η γνωστή ανισότητα ισχύει για κάθε x (ισότητα στο 0).

53. **Σ.** Εφόσον $-|x| \leq x\,\eta\mu(1/x) \leq |x|$, εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής.

54. **Σ.** Αλλαγή προσήμου θα έδινε ενδιάμεση ρίζα.

55. **Σ.** Ιδιότητα διατήρησης αρνητικού προσήμου.

56. **Σ.** Η αντίστροφη έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f.

57. **Σ.** Η σύνθεση είναι προσεταιριστική: $h(g(f(x)))$.

58. **Λ.** Η άρτια δύναμη είναι θετική και το αντίστροφό της τείνει στο $+\infty$.

59. **Σ.** Είναι το θεώρημα Bolzano.

60. **Σ.** Για $f(\alpha) = \beta$ ισχύει $f^{-1}(\beta) = \alpha$.

61. **Σ.** Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία.

62. **Λ.** Η συμμετρία της $-f$ είναι ως προς τον άξονα $x'x$.

63. **Λ.** Για $1-1$ δεν υπάρχουν διαφορετικές τετμημένες με ίδια τεταγμένη.

64. **Σ.** Διατήρηση θετικού προσήμου κοντά σε σημείο με θετικό όριο.

65. **Λ.** Χωρίς επιπλέον προϋποθέσεις, υπάρχουν $1-1$ μη μονότονες συναρτήσεις.

3. Θεματική ενότητα: Το θεώρημα Bolzano

Θεώρημα και γεωμετρική ερμηνεία

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Αν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και

$$f(\alpha)\,f(\beta)<0,$$

τότε υπάρχει **τουλάχιστον μία** ρίζα $x_0\in(\alpha,\beta)$ της $f(x)=0$. Γεωμετρικά, η C_f τέμνει τουλάχιστον μία φορά τον άξονα $x'x$ ανάμεσα στις τετμημένες α και β.

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu\,x+x^2+3x}{x}, & -\pi\le x<0,\\ e^x-x+3, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Να εξεταστεί αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[-\pi,1]$.

Λύση. Η f είναι συνεχής στα $[-\pi,0)$ και $(0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Στο 0 έχουμε:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\eta\mu\,x}{x}+x+3\right)=4,$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(e^x-x+3)=4.$$

Ακόμη, $f(0)=4$. Άρα $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$ και η f είναι συνεχής σε όλο το $[-\pi,1]$.

$$f(-\pi)=\frac{\pi^2-3\pi}{-\pi}=3-\pi<0,\qquad f(1)=e+2>0.$$

Συνεπώς $f(-\pi)f(1)<0$ και **ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Bolzano**.

Άσκηση 2

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $3x+\ln x^4=x^2+4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,e)$.

Λύση. Γράφουμε

$$3x+\ln x^4-x^2-4=0$$

και θεωρούμε $f(x)=3x+\ln x^4-x^2-4$, συνεχή στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε

$$f(1)=-2,\qquad f(e)=3e+4-e^2-4=e(3-e)>0.$$

Άρα $f(1)f(e)<0$. Από Bolzano υπάρχει $\xi\in(1,e)$ με $f(\xi)=0$, δηλαδή

$$\boxed{3\xi+\ln\xi^4=\xi^2+4}.$$

Άσκηση 3

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση
$$\frac{x^2+1}{x-1}+\frac{e^x+1}{x-2}=0$$
έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$.

Λύση. Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ των παρονομαστών και έχουμε
$$(x^2+1)(x-2)+(x-1)(e^x+1)=0.$$
Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$f(x)=(x^2+1)(x-2)+(x-1)(e^x+1),$$
η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
$$f(1)=-2, \qquad f(2)=e^2+1>0.$$
Άρα $f(1)f(2)<0$. Από Bolzano υπάρχει $\xi\in(1,2)$ με $f(\xi)=0$, δηλαδή
$$(\xi^2+1)(\xi-2)+(\xi-1)(e^\xi+1)=0$$
και, επειδή $\xi\in(1,2)$, προκύπτει η αρχική εξίσωση.

Άσκηση 4

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με $\alpha<\beta$, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(\alpha,-1)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε
$$x_0(f(x_0)-1)=\beta f(x_0)-\alpha.$$

Λύση. Θεωρούμε την εξίσωση
$$x(f(x)-1)-\beta f(x)+\alpha=0$$
και τη συνάρτηση
$$g(x)=x(f(x)-1)-\beta f(x)+\alpha.$$
Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Εφόσον $f(\alpha)=-1$,
$$g(\alpha)=\alpha(f(\alpha)-1)-\beta f(\alpha)+\alpha=f(\alpha)(\alpha-\beta)=\beta-\alpha>0,$$
$$g(\beta)=\beta(f(\beta)-1)-\beta f(\beta)+\alpha=\alpha-\beta<0.$$
Άρα $g(\alpha)g(\beta)<0$. Από Bolzano υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με
$$g(x_0)=0 \iff \boxed{x_0(f(x_0)-1)=\beta f(x_0)-\alpha}.$$

Άσκηση 5

Δίνονται $f(x) = 3x - e^x$ και $g(x) = x^2 - 4$. Να αποδειχθεί ότι:

α') Η C_f έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, με τετμημένη στο $(0, 1)$.

β') Οι C_f και C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη στο $(-1, 0)$.

Λύση. α) Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$f(0) = -1 < 0, \qquad f(1) = 3 - e > 0.$$

Άρα από Bolzano υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $f(\xi) = 0$.

β) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g προκύπτουν από

$$f(x) = g(x) \iff 3x - e^x = x^2 - 4 \iff 3x - e^x - x^2 + 4 = 0.$$

Θεωρούμε $\varphi(x) = 3x - e^x - x^2 + 4$, συνεχή στο $[-1, 0]$.

$$\varphi(-1) = -3 - e^{-1} - 1 + 4 = -\frac{1}{e} < 0, \qquad \varphi(0) = -1 + 4 = 3 > 0.$$

Άρα υπάρχει $\xi \in (-1, 0)$ με $\varphi(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) = g(\xi)$.

Άσκηση 6

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $e^x - 3 + 2x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

Λύση. Θεωρούμε $f(x) = e^x - 3 + 2x$, η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Έχουμε

$$f(0) = -2 < 0, \qquad f(1) = e - 1 > 0.$$

Από Bolzano υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $f(\xi) = 0$. Επιπλέον,

$$f'(x) = e^x + 2 > 0,$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και η ρίζα είναι μοναδική.

Άσκηση 7

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $-1 < f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ με

$$f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0.$$

Λύση. Γράφουμε την εξίσωση ως

$$f^2(x) - 2f(x) - 3x = 0$$

και θεωρούμε $g(x) = f^2(x) - 2f(x) - 3x$, συνεχή στο $[0, 1]$.

$$g(0) = f(0)(f(0) - 2) > 0,$$

επειδή $-1 < f(0) < 0$. Επίσης

$$g(1) = f^2(1) - 2f(1) - 3 = (f(1) - 3)(f(1) + 1) < 0,$$

διότι $-1 < f(1) < 0$. Επομένως $g(0)g(1) < 0$ και από Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ με

$$g(x_0) = 0 \iff \boxed{f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0}.$$

4. Ισότητα, πράξεις και σύνθεση συναρτήσεων

Ισότητα συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι ίσες, όταν έχουν **ίδιο τύπο** και **ίδιο πεδίο ορισμού**. Δηλαδή $A_f = A_g$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε x του κοινού πεδίου ορισμού.

Άσκηση 1

Έστω $f(x) = x - \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x - 1}\right)$. Να εξεταστεί αν οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες.

Λύση. Καταρχάς $A_f = A_g = (0, +\infty)$. Ακόμη

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) = \ln e^x - \ln(e^x - 1) \\ &= x - \ln(e^x - 1) = f(x). \end{aligned}$$

Έχουν **ίδιο πεδίο ορισμού** και **ίδιο τύπο**, άρα είναι ίσες.

Άσκηση 2

Έστω $f(x) = \ln(x - 1) - \ln(x - 2)$ και $g(x) = \ln\left(\dfrac{x - 1}{x - 2}\right)$. Να εξεταστεί αν είναι ίσες.

Λύση. Καταρχάς

$$A_f = (2, +\infty), \qquad A_g = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty).$$

Άρα $A_f \neq A_g$, οπότε **οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες**. Στο κοινό πεδίο $(2, +\infty)$ έχουμε βέβαια

$$g(x) = \ln \frac{x - 1}{x - 2} = \ln(x - 1) - \ln(x - 2) = f(x).$$

Αυτό, όμως, δεν αρκεί για να είναι ίσες.

Πράξεις συναρτήσεων

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), & (f - g)(x) &= f(x) - g(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x)\, g(x), & \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

$$A_{f+g} = A_{f-g} = A_{f\cdot g} = A_f \cap A_g,$$
$$A_{f/g} = \{x \in A_f \cap A_g : \; g(x) \neq 0\}.$$

Άσκηση 3

Έστω $f(x) = 4 - \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ και $g(x) = \dfrac{1}{4-x}$, $x < 4$. Να βρεθούν οι πράξεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$ με τα πεδία ορισμού τους.

Λύση. Έχουμε $A_f = (0, +\infty)$, $A_g = (-\infty, 4)$, άρα

$$A_f \cap A_g = (0, 4).$$

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}, & A_{f+g} &= (0,4),\\
(f-g)(x) &= 4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{4-x}, & A_{f-g} &= (0,4),\\
(f\cdot g)(x) &= \left(4 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{4-x}, & A_{f\cdot g} &= (0,4),\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{4-\frac{1}{x}}{\frac{1}{4-x}} = \frac{(4x-1)(4-x)}{x}, & A_{f/g} &= (0,4).
\end{aligned}$$

Για το πηλίκο απαιτείται $g(x) \neq 0$, κάτι που ισχύει σε όλο το $(0,4)$.

Σύνθεση συναρτήσεων

Για να ορίζεται η $g \circ f$, πρέπει $f(A_f) \cap A_g \neq \emptyset$. Τότε

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)), \qquad D_{g\circ f} = \{x \in A_f : \ f(x) \in A_g\}.$$

Αντίστοιχα,

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)), \qquad D_{f\circ g} = \{x \in A_g : \ g(x) \in A_f\}.$$

Άσκηση 4

Έστω $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\ln(x-1)$ και $g : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$. Να βρεθούν οι $f \circ g$ και $g \circ f$ με τα πεδία ορισμού τους.

Λύση. Πρώτα η $f \circ g$:

$$\begin{aligned}
(f\circ g)(x) &= f(g(x)) = 2\ln\left(\sqrt{x-2} + 1 - 1\right)\\
&= 2\ln\sqrt{x-2} = \ln(x-2).
\end{aligned}$$

Για το πεδίο ορισμού απαιτούμε $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$, δηλαδή

$$x \geq 2 \quad \text{και} \quad \sqrt{x-2} + 1 > 1 \iff x > 2.$$

Άρα

$$\boxed{D_{f\circ g} = (2, +\infty)}.$$

Έπειτα η $g \circ f$:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2\ln(x-1) - 2} + 1.$$

Για το πεδίο ορισμού απαιτούμε $x > 1$ και $f(x) \geq 2$, δηλαδή

$$2\ln(x-1) \geq 2 \iff \ln(x-1) \geq 1 \iff x-1 \geq e \iff x \geq e+1.$$

Άρα

$$\boxed{D_{g\circ f} = [e+1, +\infty)}.$$

5. Εύρεση τύπου συνάρτησης

Άσκηση 1

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x+1)=(x+1)e^{-x}$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση. Θέτουμε $x+1=t \iff x=t-1$. Τότε

$$f(t)=t\,e^{-(t-1)}=t\,e^{1-t}.$$

Άρα

$$\boxed{f(x)=xe^{1-x}}.$$

Άσκηση 2

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f\left(\frac{x}{e}\right)\le \ln x \quad \text{και} \quad -f\left(\frac{1}{x}\right)+1\le \ln x, \qquad x>0.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση. Θέτουμε $\frac{x}{e}=t\Rightarrow x=te$. Άρα

$$f(t)\le \ln(te)=\ln t+\ln e=\ln t+1,$$

οπότε $f(x)\le \ln x+1$.
Θέτουμε $\frac{1}{x}=t\Rightarrow x=\frac{1}{t}$. Τότε

$$\begin{aligned} -f(t)+1 &\le \ln\frac{1}{t}=-\ln t \\ \Rightarrow\ f(t)-1 &\ge \ln t \\ \Rightarrow\ f(t) &\ge \ln t+1. \end{aligned}$$

Άρα $f(x)\ge \ln x+1$. Από τις δύο ανισότητες προκύπτει

$$\boxed{f(x)=\ln x+1}, \qquad x>0.$$

Άσκηση 3

Έστω συνεχής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=\eta\mu\, x, \qquad x\neq 0.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση. Θέτουμε $\frac{1}{x}=t\Rightarrow x=\frac{1}{t}$ και έχουμε

$$\left(\frac{1}{t}\right)^2 f(t)=\eta\mu\,\frac{1}{t} \iff \frac{1}{t^2}f(t)=\eta\mu\,\frac{1}{t}.$$

Άρα για $t \neq 0$,

$$f(t) = t^2 \,\text{ημ}\,\frac{1}{t} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = x^2 \,\text{ημ}\,\frac{1}{x}.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0,

$$f(0) = \lim_{x\to 0} x^2 \,\text{ημ}\,\frac{1}{x}.$$

Από $-1 \le \text{ημ}(1/x) \le 1$ έχουμε

$$-x^2 \le x^2 \,\text{ημ}\,\frac{1}{x} \le x^2.$$

Τα δύο ακραία μέλη τείνουν στο 0. Από κριτήριο παρεμβολής $f(0) = 0$. Τελικά

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x^2 \,\text{ημ}\,\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}}$$

Άσκηση 4

Έστω συνεχής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$ και

$$e^{2x} f^2(x) - 2x^2 e^x f(x) = 2x^2 + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση. Προσθέτουμε x^4 και στα δύο μέλη:

$$e^{2x} f^2(x) - 2x^2 e^x f(x) + x^4 = x^4 + 2x^2 + 1.$$

Έτσι

$$(e^x f(x) - x^2)^2 = (x^2 + 1)^2 \iff |e^x f(x) - x^2| = x^2 + 1.$$

Θέτουμε $h(x) = e^x f(x) - x^2$. Από τη σχέση $|h(x)| = x^2 + 1 > 0$, η h δεν μηδενίζεται. Επίσης είναι συνεχής, άρα έχει σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Εφόσον

$$h(0) = e^0 f(0) - 0^2 = 1 > 0,$$

είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$e^x f(x) - x^2 = x^2 + 1 \iff e^x f(x) = 2x^2 + 1$$

και

$$\boxed{f(x) = \frac{2x^2 + 1}{e^x}}.$$

Άσκηση 5

Έστω συνεχής $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$, με $f(0) = -2$ και

$$x^2 + f^2(x) = 3x + 4, \qquad \forall x \in [-1, 4].$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση. Από τη δοσμένη σχέση

$$f^2(x) = -x^2 + 3x + 4 \iff |f(x)| = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}.$$

Για να μελετήσουμε το πρόσημο, λύνουμε

$$f(x) = 0 \iff -x^2 + 3x + 4 = 0 \iff x = -1 \text{ ή } x = 4.$$

Στο $(-1, 4)$ η f δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(0) = -2 < 0$, προκύπτει $f(x) < 0$ για $x \in (-1, 4)$ και

$$\boxed{f(x) = -\sqrt{-x^2 + 3x + 4}}, \qquad x \in [-1, 4].$$

6. Αντίστροφη συνάρτηση και σύνθεση

Άσκηση 1

Έστω $f(x) = 4 - \dfrac{1}{x}$, $x > 0$. Να αποδειχθεί ότι αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Λύση. Αν $0 < x_1 < x_2$, τότε

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \Rightarrow 4 - \frac{1}{x_1} < 4 - \frac{1}{x_2}.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως $1-1$, δηλαδή αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y$:

$$y = 4 - \frac{1}{x} \iff \frac{1}{x} = 4 - y \iff x = \frac{1}{4-y}, \quad y \neq 4.$$

Επειδή $x > 0$, έχουμε $\frac{1}{4-y} > 0 \iff y < 4$. Συνεπώς

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{4-x}, \qquad D_{f^{-1}} = (-\infty, 4)}.$$

Άσκηση 2

Έστω $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}$. Θεωρούμε την $h = f \circ g$. Να βρεθούν ο τύπος και το πεδίο ορισμού της h, να εξεταστεί αν αντιστρέφεται και να βρεθούν η h^{-1} και το σύνολο τιμών της h.

Λύση. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} h(x) = (f \circ g)(x) &= f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 \\ &= x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2. \end{aligned}$$

Για το πεδίο ορισμού απαιτούμε $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$:

$$x \geq 0 \quad \text{και} \quad \sqrt{x} \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 1.$$

Άρα $D_h = [0, 1]$.

Έλεγχος $1-1$**.** Έστω $h(x_1) = h(x_2)$, με $x_1, x_2 \in [0, 1]$:

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \iff |x_1 - 1| = |x_2 - 1|.$$

Επειδή $x_1 - 1 \leq 0$ και $x_2 - 1 \leq 0$, προκύπτει

$$-x_1 + 1 = -x_2 + 1 \iff x_1 = x_2.$$

Άρα η h είναι $1-1$.

Εύρεση της αντίστροφης. Θέτουμε $h(x) = y$:

$$y = (x-1)^2 \iff \sqrt{y} = |x-1| = 1 - x \iff x = 1 - \sqrt{y}.$$

Επομένως

$$\boxed{h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}}, \qquad D_{h^{-1}} = [0, 1].$$

Σύνολο τιμών. Εναλλακτικά, για $x_1 < x_2$ στο $[0, 1]$ έχουμε $(x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή

$$h(0) = 1, \qquad h(1) = 0,$$

το σύνολο τιμών είναι

$$\boxed{h([0, 1]) = [0, 1]}.$$

7. Όρια – βασικοί τρόποι αντιμετώπισης

Τέσσερα όρια

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu\, x)\,\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι

$$-1 \le \sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{x} \le 1 \implies \left|\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{x}\right| \le 1.$$

Επομένως

$$|\,\eta\mu\, x| \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{x}\right| \le |\,\eta\mu\, x| \implies \left|(\eta\mu\, x)\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{x}\right| \le |\,\eta\mu\, x|.$$

Άρα

$$-|\,\eta\mu\, x| \le (\eta\mu\, x)\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{x} \le |\,\eta\mu\, x|.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0}(-|\,\eta\mu\, x|) = \lim_{x\to 0}|\,\eta\mu\, x| = 0,$$

από το **κριτήριο παρεμβολής**:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(\eta\mu\, x)\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{x} = 0}.$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu\, x - 1)\,\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Λύση. Επειδή

$$-1 \le \eta\mu\,\frac{1}{x} \le 1,$$

παίρνουμε

$$\left|(\sigma\upsilon\nu\, x - 1)\,\eta\mu\,\frac{1}{x}\right| \le |\,\sigma\upsilon\nu\, x - 1|$$

και συνεπώς

$$-|\,\sigma\upsilon\nu\, x - 1| \le (\sigma\upsilon\nu\, x - 1)\,\eta\mu\,\frac{1}{x} \le |\,\sigma\upsilon\nu\, x - 1|.$$

Επιπλέον $\lim_{x\to 0}(-|\,\sigma\upsilon\nu\, x - 1|) = \lim_{x\to 0}|\,\sigma\upsilon\nu\, x - 1| = 0$. Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu\, x - 1)\,\eta\mu\,\frac{1}{x} = 0}.$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

Λύση. Κάνουμε απαλοιφή της απροσδιόριστης μορφής $0/0$, πολλαπλασιάζοντας με τη συζυγή παράσταση:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \boxed{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x^2-3x-2|}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

Λύση. Για $x\to-\infty$, η παράσταση x^2-3x-2 είναι θετική. Βγάζουμε τις μεγαλύτερες δυνάμεις:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\frac{|x^2-3x-2|}{\sqrt{x^2-x+1}} &= \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2(1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2})}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}\\ &= \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2(1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2})}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\\ &= \lim_{x\to -\infty}\frac{-x(1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2})}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \boxed{+\infty}.\end{aligned}$$

8. Σύνολο τιμών και ύπαρξη – μοναδικότητα ρίζας

Άσκηση 1

Έστω $f(x) = \ln x + x^4 - 1$, $x > 0$.

α') Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

β') Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ') Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\ln x + x^4 = 2026$ έχει μοναδική ρίζα.

δ') Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f^{-1}(x - e^{-x^4}) = 1$ έχει μοναδική ρίζα.

Λύση. α) Μονοτονία. Για $0 < x_1 < x_2$ έχουμε

$$\ln x_1 < \ln x_2 \quad \text{και} \quad x_1^4 < x_2^4,$$

οπότε $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επιπλέον,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Εφόσον είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα,

$$\boxed{\Sigma T_f = \mathbb{R}}.$$

β) Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και $\Sigma T_f = \mathbb{R}$. Εφόσον $0 \in \Sigma T_f$, υπάρχει **μοναδική** ρίζα της $f(x) = 0$.

γ) Η εξίσωση

$$\ln x + x^4 = 2026 \iff \ln x + x^4 - 1 = 2025 \iff f(x) = 2025$$

έχει μοναδική λύση, αφού $2025 \in \Sigma T_f$ και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

δ) Θεωρούμε την εξίσωση

$$f^{-1}(x - e^{-x^4}) = 1.$$

Εφαρμόζουμε την f στα δύο μέλη:

$$\begin{aligned} f\big(f^{-1}(x - e^{-x^4})\big) &= f(1) \\ \iff x - e^{-x^4} &= 0 \\ \iff x &= e^{-x^4} \\ \iff \ln x &= -x^4 \\ \iff \ln x + x^4 - 1 &= -1 \\ \iff f(x) &= -1. \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, το -1 ανήκει στο σύνολο τιμών της και η εξίσωση έχει **μοναδική ρίζα**.

Άσκηση 2

Έστω συνεχής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$, $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x - 1}{\eta\mu\, x} = 1.$$

Να αποδειχθεί ότι:

α′) $f(0)=1$.

β′) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(2026)\ln(x-1)}{x-1}=-\infty$.

γ′) Η εξίσωση $xf(x)=1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,1)$.

Λύση. α) Θέτουμε βοηθητική συνάρτηση

$$g(x)=\frac{f(x)-x-1}{\eta\mu\, x},\quad x\neq 0,$$

για την οποία δίνεται $\lim_{x\to 0} g(x)=1$. Τότε

$$g(x)\,\eta\mu\, x=f(x)-x-1 \iff f(x)=g(x)\,\eta\mu\, x+x+1.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\cdot 0+0+1=1.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, $\boxed{f(0)=1}$.

β) Εφόσον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε x, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Από $f(0)=1>0$ παίρνουμε $f(x)>0$ σε όλο το $\mathbb{R}$, οπότε $f(2026)>0$. Επομένως

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}\frac{f(2026)\ln(x-1)}{x-1} &= f(2026)\cdot\lim_{x\to 1^+}\ln(x-1)\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\\ &= \underbrace{f(2026)}_{>0}\cdot(-\infty)\cdot(+\infty)=\boxed{-\infty}.\end{aligned}$$

γ) Θεωρούμε την εξίσωση

$$xf(x)-1=0$$

και τη συνάρτηση $h(x)=xf(x)-1$, συνεχή στο $[-1,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε

$$h(-1)=-f(-1)-1=-(f(-1)+1),\qquad h(1)=f(1)-1.$$

Επειδή $f(x)\neq x$, η $\varphi(x)=f(x)-x$ είναι συνεχής και μη μηδενιζόμενη σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Ειδικότερα

$$\varphi(-1)\varphi(1)>0.$$

Έτσι

$$h(-1)h(1)=-\varphi(-1)\varphi(1)<0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho\in(-1,1)$ με

$$h(\rho)=0 \iff \boxed{\rho f(\rho)=1}.$$

9. Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Άσκηση 1

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ τέτοιο ώστε

$$11f(x_0) = 5f\left(\frac{1}{4}\right) + 6f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Λύση. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και στο $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$. Από το **θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής** υπάρχουν αριθμοί m, M με

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right].$$

Ειδικότερα,

$$m \leq f\left(\frac{1}{4}\right) \leq M \iff 5m \leq 5f\left(\frac{1}{4}\right) \leq 5M$$

και

$$m \leq f\left(\frac{1}{3}\right) \leq M \iff 6m \leq 6f\left(\frac{1}{3}\right) \leq 6M.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη:

$$11m \leq 5f\left(\frac{1}{4}\right) + 6f\left(\frac{1}{3}\right) \leq 11M.$$

Διαιρούμε με 11:

$$\boxed{m \leq \frac{5f\left(\frac{1}{4}\right) + 6f\left(\frac{1}{3}\right)}{11} \leq M}.$$

Ο αριθμός $\dfrac{5f(1/4) + 6f(1/3)}{11}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνεχούς f στο $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$. Άρα, από το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**, υπάρχει $x_0 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{5f(1/4) + 6f(1/3)}{11}.$$

Τελικά,

$$\boxed{11f(x_0) = 5f\left(\frac{1}{4}\right) + 6f\left(\frac{1}{3}\right)}.$$