

Θεώρημα Βολζανό

Εστω f φάρση σε $[a, b]$

1. Αν f συνεχής σε $[a, b]$

2. Αν $f(a) \cdot f(b) < 0$

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$

Τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$

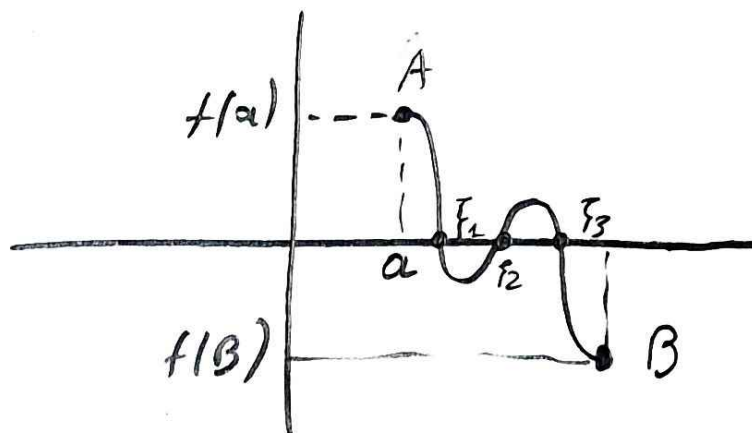
Γεωμετρική ερμηνεία Βολζανό

Εάν τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$

Βρίσκονται εκατέρωθεν του x -x τότε

η C_f τέμνει τον x -x τουλάχιστον

μία φορά σε (a, b)



Προσοχή

1. Το θεωρήμα Βολζανο εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$. Δεν μας λέει ποια είναι αυτή η ρίζα. Μπορεί να έχει περισσότερα από μια ρίζες στο (a,b) .
2. Το αντίστροφο του Βολζανο δεν ισχύει. Αν υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω $f(\xi)=0$ αυτό δεν σημαίνει ότι $f(a) \cdot f(b) < 0$.
3. Αν η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Βολζανο, αυτό δεν σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα.
4. Αν η f ορισμένη στο $[a,b]$, συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ τότε από Βολζανο $\exists \xi \in [a,b]$ τ.ω $f(\xi)=0$. Ανάλογα έδω το $\xi=a$ ή $\xi=b$ ή $\xi \in (a,b)$.

Άσκηση 1

Δίνεται $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x + x^2 + 3x}{x}, & -\pi \leq x < 0 \\ e^x - x + 3, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Να εξετάσεις αν η $f(x)$ ικανοποιεί τις
προυποθέσεις του Βολζανο στο $[-\pi, 1]$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-\pi, 0)$ και $(0, 1]$

ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x + x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + x + 3 \right) = 4$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - x + 3) = 4.$$

Αρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ και $f(0) = 4$ άρα συνεχής

στο 0 αφού $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Αρα Συνεχής στο $[-\pi, 1]$

Επίσης $f(-\pi) = \frac{\pi^2 - 3\pi}{-\pi} = 3 - \pi < 0$ και $f(1) = e + 2 > 0$
άρα $f(-\pi)f(1) < 0$ συνεπώς ικανοποιείται ο Βολζανο.

Άσκηση 2

Νοσο η εξίσωση $3x + \ln x^4 = x^2 + 4$ έχει

μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e)$

$$3x + \ln x^4 - x^2 - 4 = 0$$

Θεωρώ $f(x) = 3x + \ln x^4 - x^2 - 4$ η οποία είναι
συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξη/συνεχών
συναρτησιών

$$f(1) = -2$$

$$f(e) = 3e + 4 - e^2 - 4 = 3e - e^2 = e(3 - e) > 0$$

$$\text{Αρα } f(1)f(e) < 0$$

Συνεπώς από Bolzano $\exists \xi \in (1, e)$ τέω $f(\xi) = 0$

$$\Leftrightarrow 3\xi + \ln \xi^4 - \xi^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\xi + \ln \xi^4 = \xi^2 + 4, \quad \xi \in (1, e)$$

Άσκηση 3

Νδο η εξίσωση $\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{e^x+1}{x-2} = 0$ έχει

μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$

Πορίω με το εκη των παρανομαστων. και έχω

$$(x^2+1)(x-2) + (x-1)(e^x+1) = 0$$

Θεωρώ $f(x) = (x^2+1)(x-2) + (x-1)(e^x+1)$ η οποία
είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως γράφα/ συνεχών
συναρτησών.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -2 \\ f(2) = e^2 + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(1)f(2) < 0 \text{ Bolzano } \exists \xi \in (1, 2) \\ \text{τ.ω } f(\xi) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (\xi^2+1)(\xi-2) + (\xi-1)(e^\xi+1) = 0$$

$$\frac{\xi^2+1}{\xi-1} + \frac{e^\xi+1}{\xi-2} = 0, \quad \xi \in (1, 2)$$

Άσκηση 4

Δίνεται συνεχής $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ όπου η f διαφέρει από το $A(a, -1)$. Νόσο $\exists x_0 \in (a, b)$ τ.ω $x_0 (f(x_0) - 1) = B f(x_0) - a$

Θεωρώ την εξίσωση $x (f(x) - 1) = B f(x) - a$.

$$x (f(x) - 1) - B f(x) + a = 0.$$

Εστω $g(x) = x(f(x) - 1) - B f(x) + a$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$g(a) = a(f(a) - 1) - B f(a) + a = a f(a) - a - B f(a) + a$$

$$\Leftrightarrow g(a) = f(a)(a - B) = -(a - B) = b - a > 0$$

$$g(b) = b(f(b) - 1) - B f(b) + a = B f(b) - b - B f(b) + a$$

$$\Leftrightarrow g(b) = a - b < 0$$

Αρα $g(a)g(b) < 0$ Βολταίο $\exists x_0 \in (a, b)$ τ.ω $g(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow x_0 (f(x_0) - 1) - B f(x_0) + a = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 (f(x_0) - 1) = B f(x_0) - a$$

Άσκηση 5

Δίνονται $f(x) = 3x - e^x$ και $g(x) = x^2 - 4$

α) Νόο η f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον $x'x$, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(0, 1)$.

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξη/συνεχών συναρτήσεων.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 3 - e > 0 \end{array} \right\} \text{Βόλτανο } \exists \xi \in (0, 1) \text{ π.ω } f(\xi) = 0.$$

β) Νόο οι f και g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(-1, 0)$.

Τα κοινά σημεία των f, g προκύπτουν από την εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x - e^x = x^2 - 4$

$$\Leftrightarrow 3x - e^x - x^2 + 4 = 0$$

Θαρω $\varphi(x) = 3x - e^x - x^2 + 4$ η οποία είναι
συνεχής στο $[-1, 0]$ ως προϊόν συνεχών
συναρτήσεων.

$$\varphi(-1) = -3 - e^{-1} - 1 + 4 = -\frac{1}{e} < 0$$

$$\varphi(0) = -1 + 4 = 3 > 0$$

Αρα Bolzano $\exists \xi \in (-1, 0)$ τ.ω $\varphi(\xi) = 0$

$$\Leftrightarrow 3\xi - e^\xi - \xi^2 + 4 = 0$$

$$3\xi - e^\xi = \xi^2 - 4$$

$$f(\xi) = g(\xi)$$

Άσκηση 6

Δίνεται συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(-1) = 2k$

και $f(2) = -2$. Μόνο $\exists \xi \in [-1, 2]$ τ.ω $k - f(\xi) = 2\xi$

Θεωρώ την εξίσωση $k - f(x) = 2x$

$$\Leftrightarrow k - f(x) - 2x = 0$$

Εστώ $\varphi(x) = k - f(x) - 2x$ η οποία είναι
συνεχής στο $[-1, 2]$ ως ηράτση/συνεχών
συναρτησών.

$$\varphi(-1) = k - f(-1) + 2 = k - 2k + 2 = 2 - k$$

$$\varphi(2) = k - f(2) - 2 \cdot 2 = k + 2 - 4 = k - 2$$

Αρα $\varphi(-1)\varphi(2) = -(k-2)^2 \leq 0$ άρα από Bolzano $\exists \xi \in [-1, 2]$.

$$\text{τ.ω } \varphi(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow k - f(\xi) - 2\xi = 0$$

$$k - f(\xi) = 2\xi.$$

Άσκηση 7

Ν50 η εξίσωση $e^x = 3 - 2x$ έχει μοναδικά
ρίζα η οποία ανήκει στο $(0, 1)$

$$e^x - 3 + 2x = 0$$

Θεωρώ $f(x) = e^x - 3 + 2x$ η οποία είναι συνεχής
στο $[0, 1]$ ως πραγματικές συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -2 \\ f(1) = e - 1 > 0 \end{array} \right\} f(0)f(1) < 0$$

$$\text{Bolzano} \quad \exists \xi \in (0, 1) \text{ τ.ω } f(\xi) = 0$$

$f'(x) = e^x + 2 > 0$ άρα f αυξάνει το ξ
είναι μοναδική ρίζα της $f(x)$.

Άσκηση 8

Νόο η εξίσωση $x^4 - 2x^3 - x^2 + 4 = 0$

έχει μολ τολταχισών λυσή σω $(1, 2)$.

Έδω αν θώω $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4$ τότε

θα δώ οα $f(2) = 0$ συνεώς ο Βολζανο

δω δώλωνα σω $(1, 2)$. Το 2 οπως

είναι ρίζα συνεώς θα κάνω Horner.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 & (2) \\ & 2 & 0 & -2 & -4 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Άρα η εξίσωση γίνεται $(x-2)(x^3 - x - 2) = 0$.

$$\Leftrightarrow (x=2) \text{ ή } x^3 - x - 2 = 0.$$

Θωρω $g(x) = x^3 - x - 2$ η οποία είναι συνεχής
σω $[1, 2]$ ως πολωνυμική.

$$\begin{array}{l} g(1) = -2 \\ g(2) = 4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} g(1)g(2) < 0 \text{ άρα από Βολζανο} \\ \exists \xi \in (1, 2) \text{ τ.ω } g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^3 - \xi - 2 = 0. \end{array} \right.$$

Άσκηση 9

Εστω συνεχής $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $-1 < f(x) < 0$

$\forall x \in [0,1]$. Να βρεθεί $\exists x_0 \in (0,1)$ τ.ω

$$f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$$

$$f^2(x) = 2f(x) + 3x \quad (\Leftrightarrow) \quad f^2(x) - 2f(x) - 3x = 0$$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - 2f(x) - 3x$
η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξη/
συνεχών συναρτήσεων.

$$g(0) = f^2(0) - 2f(0) = \overset{\ominus}{f(0)} (\overset{\ominus}{f(0)} - 2) > 0$$

$$\bullet \quad -1 < f(0) < 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad -3 < f(0) - 2 < -2$$

$$g(1) = f^2(1) - 2f(1) - 3 = \overset{\ominus}{(f(1) - 3)} (\overset{\oplus}{f(1) + 1}) < 0$$

$$\bullet \quad -1 < f(1) < 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad -4 < f(1) - 3 < -3$$

$$\bullet \quad -1 < f(1) < 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 0 < f(1) + 1 < 1$$

Αρα $g(0)g(1) < 0$ από Bolzano $\exists x_0 \in (0,1)$

$$\text{τ.ω } g(x_0) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0.$$

Άσκηση 10

Νδο η εξίσωση $x^4 + Bx^2 + \gamma x - 2022 = 0$

έχει μια ταλαχιστών θετική ρίζα.

Θαρω $f(x) = x^4 + Bx^2 + \gamma x - 2022$ η οποία είναι
συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυώνυμο.

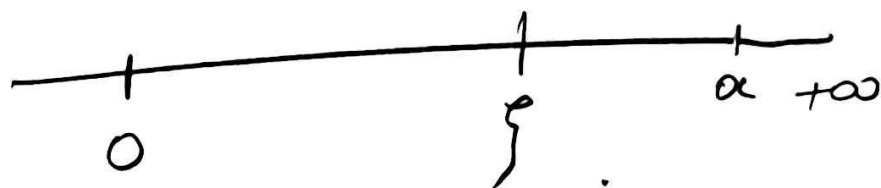
$$f(0) = -2022$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty \text{ άρα } \exists \alpha \text{ ώστε στο } +\infty$$

$$\text{τ.ω } f(\alpha) > 0$$

$f(0)f(\alpha) < 0$ άρα από Bolzano $\exists \xi \in (0, \alpha)$ τ.ω $f(\xi) = 0$

$$\text{Άρα } \exists \xi > 0 \text{ τ.ω } \xi^4 + B\xi^2 + \gamma\xi - 2022 = 0.$$



Άσκηση 11

Νόσο η εξίσωση $(3-x) \ln x = x^3 - 5x^2 + 5x$ έχει
δύο τουλάχιστον ριζές στο $(2, 4)$

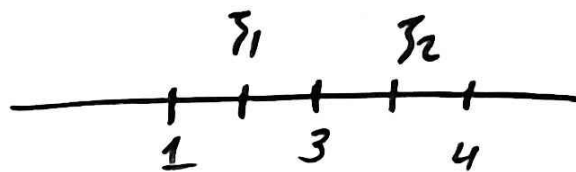
$$(3-x) \ln x - x^3 + 5x^2 - 5x = 0$$

Θεωρώ $f(x) = (3-x) \ln x - x^3 + 5x^2 - 5x$ η οποία
είναι συνεχής στο $[1, 4]$ ως η σύνθεση
συνεχών συναρτήσεων.

$$f(1) = -1 < 0$$

$$f(3) = 3 > 0$$

$$f(4) = -\ln 4 - 4 < 0$$



Αφού $f(1)f(3) < 0$ από Βολζανό $\exists \xi_1 \in (1, 3)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

Αφού $f(3)f(4) < 0$ από Βολζανό $\exists \xi_2 \in (3, 4)$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$

Άρα η συνάρτηση $f(x)$ έχει δύο τουλάχιστον
ρίζες στο $(1, 4)$. Συνεπώς η εξίσωση

$(3-x) \ln x = x^3 - 5x^2 + 5x$ έχει δύο τουλάχιστον ριζές
στο $(1, 4)$

Άσκηση 12

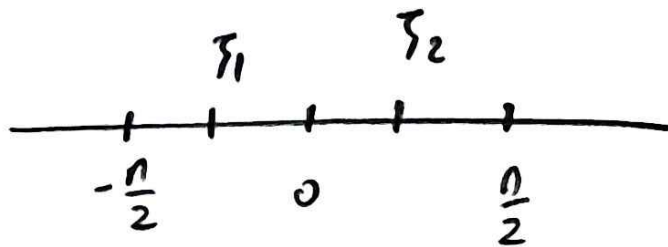
Νόσ η εξίσωση $x^2 = \sin x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Θεωρώ $f(x) = x^2 - \sin x$ η οποία είναι συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ως γραμμική συνεχών συναρτήσεων.

$$f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} > 0$$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} > 0$$



Αφού $f(-\frac{\pi}{2})f(0) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$
 Αφού $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$

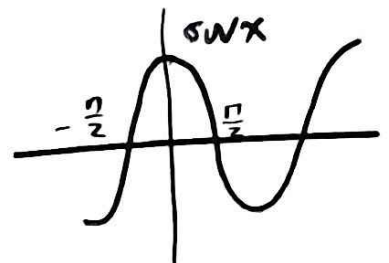
$$x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$$

$$\text{---} \quad \textcircled{+} \quad \text{---}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sin x_1 < \sin x_2 \Leftrightarrow -\sin x_1 > -\sin x_2$$

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \narrow \text{ από } \xi_1 \text{ προς } \xi_2 \text{ στο } (-\frac{\pi}{2}, 0).$$



$$x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$$

$$\text{---} \quad \textcircled{+} \quad \text{---}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sin x_1 > \sin x_2 \Leftrightarrow -\sin x_1 < -\sin x_2$$

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \text{ από } \xi_2 \text{ προς } \xi_1 \text{ στο } (0, \frac{\pi}{2}).$$

Άσκηση 13

Νόο η εξίσωση $\ln x = x^2 - 4x + 2$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

$$\text{Θεωρώ } f(x) = \ln x - x^2 + 4x - 2$$

Είναι προφανές ότι το $f(0)$ δεν ορίζεται.

ομώς $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ άρα $\exists \alpha$ κοντά στο 0^+

τ.ω $f(\alpha) < 0$. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, 1]$

ως πρώτα συνεχών συναρτήσεων

$$f(\alpha) < 0$$

$$f(1) = 1 > 0$$



Από $f(\alpha)f(1) < 0$ από Bolzano $\exists \xi \in (\alpha, 1)$ τ.ω $f(\xi) = 0$

$$\text{Αντικαθιστώντας } \exists \xi \in (0,1) \text{ τ.ω } \ln \xi = \xi^2 - 4\xi + 2$$

Άσκηση 14:

Νοο η εξίσωση $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο $(-1, 2)$

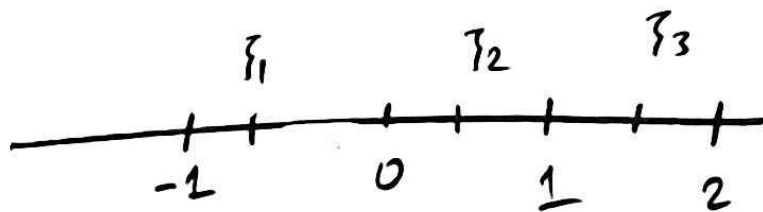
Θεωρώ $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ ως γραμμική συνεχών συναρτήσεων

$$f(-1) = -9 < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = -2 < 0$$

$$f(2) = 9 > 0$$



Αφού $f(-1)f(0) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_1 \in (-1, 0)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

Αφού $f(0)f(1) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_2 \in (0, 1)$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$

Αφού $f(1)f(2) < 0$ από Bolzano $\exists \xi_3 \in (1, 2)$ τ.ω $f(\xi_3) = 0$

Η $f(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού άρα έχει το πολύ τρεις ρίζες.

Συνεπώς έχει ακριβώς τρεις.