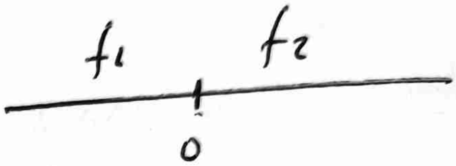
Μεγαλη προσοχη

Δινεται $f(x) = \begin{cases} x^3 + x - 2 , & x \leq 0 \\ x - συνx - 1 , & 0 < x \leq π \end{cases}$

1. Συνεχης στο 0;



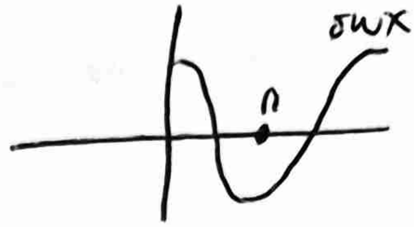
$$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^3 + x - 2) = -2 \\ &\bullet \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - συνx - 1) = -2 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = -2$$

$f(0) = -2$ Αφου $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ συνεχης στο 0!

2. Συνεχης;

Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $(-\infty, 0)$ και $(0, π]$ ως π.σ.σ και αφου ειναι συνεχης στο 0 ειναι συνεχης στο πεδιο ορισμου της!

3. Σύνολο Τιμών.



$\underline{x \le 0}$

$f(x) = x^3 + x - 2$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$

$\left.\begin{matrix} x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \end{matrix}\right\} (+)$

$x_1^3 + x_1 - 2 < x_2^3 + x_2 - 2$

$f(x_1) < f(x_2)$

$f \nearrow \ \forall x < 0$

$\underline{0 < x \le \pi}$

$f(x) = x - \sigma\upsilon\nu x - 1$

- $x_1 < x_2$ $(+)$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2$

$-\sigma\upsilon\nu x_1 < -\sigma\upsilon\nu x_2$

$-1 - \sigma\upsilon\nu x_1 < -1 - \sigma\upsilon\nu x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$

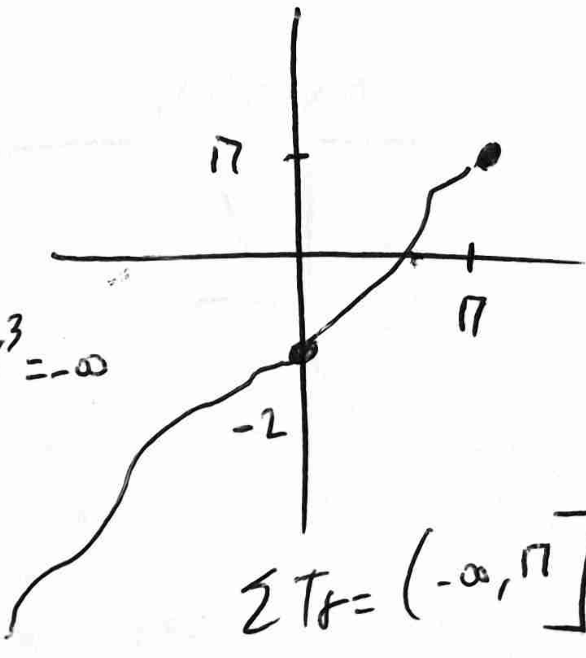
$f \nearrow \ \forall x \in [0, \pi]$

x	$-\infty$	0	π
$f(x)$	$-\infty \nearrow$		$\nearrow$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + x - 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$f(0) = -2$

$f(\pi) =$



$\Sigma T_f = (-\infty, \pi]$.

4. Ndo η $f(x)$ εχει μοναδικη θετικη ριζα.

- f συνεχης
- $f \nearrow$
- $\Sigma T f = (-\infty, \pi]$

Το $0 \in \Sigma T f$ αρα $\exists! \, \xi$ τ.ω

$f(\xi) = 0$.

Εστω οτι $\xi < 0$ (η ριζα που αρνητικη)

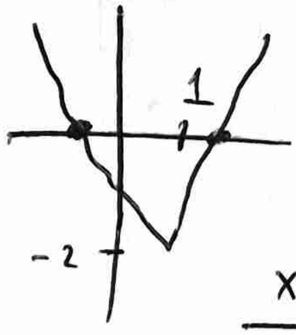
$f(\xi) < f(0)$

$0 < -2$

Ατοπο!

$\Rightarrow \xi > 0$

Προσοχη



$x < 1$

- f συνεχ
- $f \searrow$
- $\Sigma T f = [-2, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T f$ ...

$x \geq 1$

- f συνεχ
- $f \nearrow$
- $\Sigma T f = [-2, +\infty)$

5. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)+2}{x}$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)+2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - \text{συν}x - 1 + 2}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x - \text{συν}x + 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} - \frac{\text{συν}x - 1}{x} =$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)+2}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 + x - 2 + 2}{x}$$

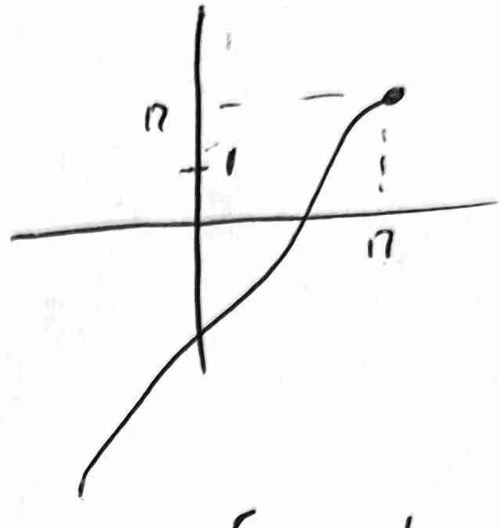
$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{x}(x^2+1)}{\cancel{x}} = 1$$

Άρα $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)+2}{x} = 1.$

6. Πλήθος ριζών $f(x)=\lambda$

Αν $\lambda > \pi$ 0 ρίζες.

Αν $\lambda \leq \pi$ 1 ρίζα.



7. Πλήθος ριζών της εξίσωσης

$$f(x) = e^{\lambda}, \quad \lambda < 0$$

αν $\lambda < 0 \Rightarrow e^{\lambda} < e^{0} \Rightarrow e^{\lambda} < 1$

$$f(x) = e^{\lambda}$$

1 ρίζα.

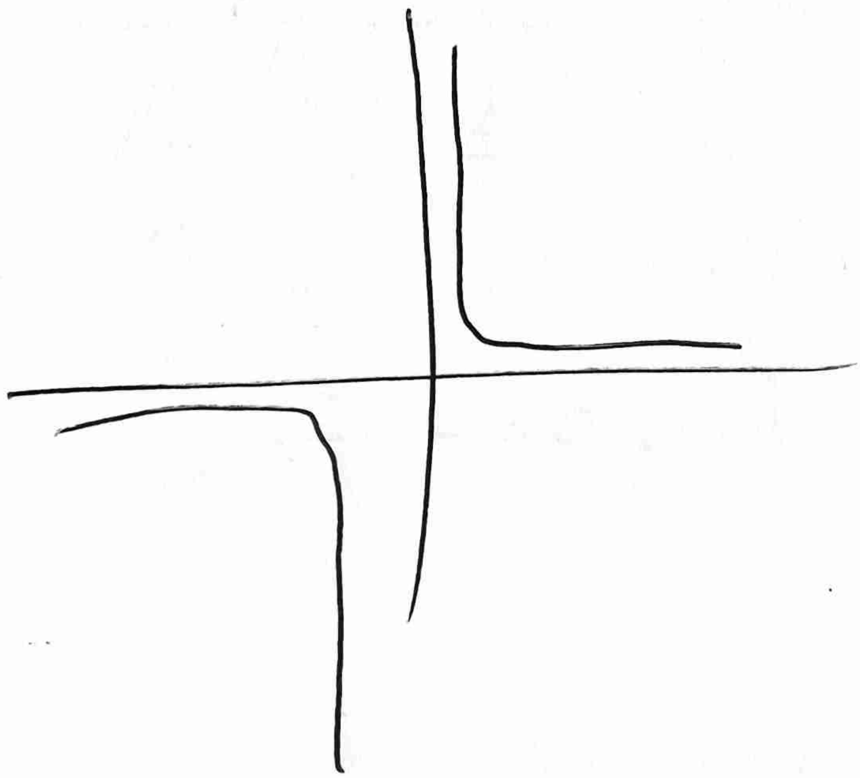
Συνέχεια

1. Έστω $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

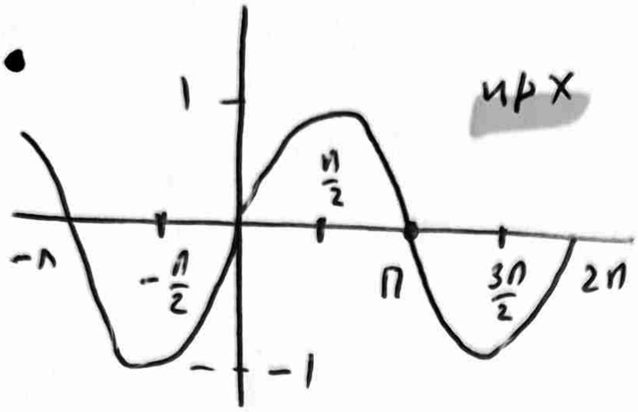
$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Είναι συνεχής!.

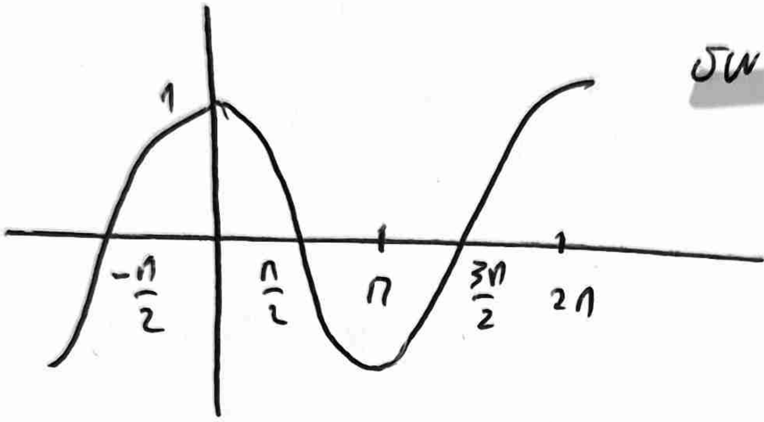
Βεβαίως, και είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.



2.



ημx



συνx

3. Γνωστά όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0 ,$$

4. κοινά σημεία $C_{f^{-1}}$ με $y=x$

$f^{-1}(x)=x$ ή ισοδύναμα $f(x)=x$

κοινά σημεία $C_{f^{-1}}$ με C_f

$f(x)=f^{-1}(x)$

ή

$f(x)=x$

ή

$f^{-1}(x)=x$ όταν και μόνο αν

$f \nearrow$

Επαναληπτική Άσκηση

Μπαρλά Ι.

(Σελ 384)

---

3. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ $\qquad g(x) = f(1-x) - x$

ⓐ Πρέπει $x\ln x \neq 0$ και $x > 0$

$x \neq 0$ και $\ln x \neq 0$

$x \neq 1$

$D_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$

ⓑ Να βρεί το D_g

Πρέπει $0 < 1-x < 1$ ή $1-x > 1$

$0 > x$

$0 < 1-x$ και $1-x < 1$

$x < 1$ $\qquad 0 < x$

$x \in (0,1)$

$D_g = (-\infty,0) \cup (0,1)$

(γ) Μονοτονία στο $(1,+\infty)$

$\cdot\ x>1$

$\ln x>\ln 1$

$\ln x>0$

$\left.\begin{aligned} &\cdot\ x_1<x_2 \\ &\cdot\ x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2 \end{aligned}\right\}$ (·)

$$x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2$$

$$\frac{1}{x_1 \ln x_1} > \frac{1}{x_2 \ln x_2}$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$f \downarrow$

(δ) Αν $\alpha<\beta$ και $\alpha>1,\ \beta>1$ νδο $\alpha^{\alpha}<\beta^{\beta}$

$$\alpha<\beta \Rightarrow f(\alpha)>f(\beta) \Rightarrow \frac{1}{\alpha \ln \alpha} > \frac{1}{\beta \ln \beta}$$

$$\Rightarrow \beta \ln \beta > \alpha \ln \alpha$$

$$\ln \beta^{\beta} > \ln \alpha^{\alpha}$$

$$\beta^{\beta} > \alpha^{\alpha},$$

(ε) $$\frac{(x^4+2)^{x^4+2}}{(x^2+4)^{x^2+4}} = 1$$

$$(x^4+2)^{x^4+2} = (x^2+4)^{x^2+4}$$

$$\ln (x^4+2)^{x^4+2} = \ln (x^2+4)^{x^2+4}$$

$$(x^4+2) \ln (x^4+2) = (x^2+4) \ln (x^2+4)$$

$$\frac{1}{(x^4+2) \ln (x^4+2)} = \frac{1}{(x^2+4) \ln (x^2+4)}$$

$$f(x^4+2) = f(x^2+4)$$

f 1-1

$$x^4+2 = x^2+4$$

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

$x^2 = 2$ $\quad$ $x^2=-1$

$x = \pm\sqrt{2}$ $\quad$ ATOΠ

1. $f(x) = \sqrt{1-x}$. $D_f = (-\infty, 1]$

πρέπει $1 - x \geq 0$

$1 \geq x$

$g(x) = \ln x$

$D_g = (0, +\infty)$

ⓐ $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \ln x$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (0, 1]$

ⓑ $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - \ln x}$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x > 0$ $\ln x \leq 1$

$e^{\ln x} \leq e^1$

$D_h = (0, e]$. $x \leq e$

(γ) $\varphi(x) = h(x) - x^2$ νδο $\varphi \downarrow$

$x \in D_h$

$x \in (0, e]$

$\varphi(x) = \sqrt{1 - \ln x} - x^2$

$D_\varphi = (0, e]$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$

$1 - \ln x_1 > 1 - \ln x_2$

$\sqrt{1 - \ln x_1} > \sqrt{1 - \ln x_2}$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow -x_1^2 > -x_2^2$ (+)

$\varphi \downarrow$

(6) $$\frac{\sqrt{1-\ln x}}{x^2} = 1$$

$$\sqrt{1-\ln x} = x^2$$

$$\sqrt{1-\ln x} - x^2 = 0$$

$$\varphi(x) = 0$$

$$\varphi(x) = \varphi(1 \quad)$$

$$\varphi \ 1-1$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

| **6.** $f(x) = 1 - \ln x$

$g(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$D_f = (0, +\infty)$

$D_g = \mathbb{R}$

(a) $g(x_1) = g(x_2)$

$$\frac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}} = \frac{e^{x_2}}{1+e^{x_2}} \Leftrightarrow e^{x_1}(1+e^{x_2}) = e^{x_2}(1+e^{x_1})$$

$$e^{x_1} + \cancel{e^{x_1} e^{x_2}} = e^{x_2} + \cancel{e^{x_2} e^{x_1}}$$

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

g 1-1

Θέτω $g(x) = y$

$$y = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$\underline{\underline{y > 0}}$

$$y(1+e^x) = e^x$$

$$y + ye^x = e^x$$

$$ye^x - e^x = -y$$

$$e^x(y-1) = -y$$

$$e^x = \frac{-y}{y-1} \Rightarrow e^x = \frac{y}{1-y}$$

$$x = \ln \frac{y}{1-y} \qquad \frac{y}{1-y} > 0$$

y		0		1	
$1-y$	$+$		$+$	0	$-$
y	$-$		$+$		$+$
$\sim$	$-$		$+$		$-$

$y \in (0,1)$.

$$\boxed{\begin{aligned} g^{-1}(x) &= \ln \frac{x}{1-x} \\ D_{g^{-1}} &= (0,1) \end{aligned}}$$

(13). $g^{-1}(f(x)) = \ln\left(\dfrac{1-\ln x}{1-1+\ln x}\right) =$

$$= \ln\left(\frac{1-\ln x}{\ln x}\right)$$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_{g^{-1}}$

$\underline{\underline{x>0}}$ $\qquad 0 < 1-\ln x < 1$

$0 < 1 - \ln x$ και $\cancel{1} - \ln x < \cancel{1}$

$\ln x < 1$ $\qquad$ $0 < \ln x$

$e^{0} < x$

$\underline{\underline{x < e}}$ $\qquad$ $1 < x$

$x \in (e, +\infty)$

$(g^{-1} \circ f)(x) = \ln\left(\dfrac{1 - \ln x}{\ln x}\right)$

$D_{g^{-1} \circ f} = (e, +\infty).$

(γ) $g^{-1}(f(x)) = 0$

$\ln\left(\dfrac{1 - \ln x}{\ln x}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{1 - \ln x}{\ln x} = 1$

$1 - \ln x = \ln x$

$1 = 2 \ln x$

$x = \sqrt{e}$

Μεγαλη προσοχη

Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχη!.

και $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x f(x) + 1}{x^2 - x} = 4$

Βρει το $f(1)$.

Θετω $\dfrac{x f(x) + 1}{x^2 - x} = g(x)$ αρα $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 4$

$$x f(x) + 1 = g(x)(x^2 - x)$$

$$x f(x) = g(x)(x^2 - x) - 1$$

$$f(x) = g(x)\frac{x^2 - x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\boxed{f(x) = g(x)(x-1) - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x)(x-1) - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 4 \cdot 0 - 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1$$

f συνεχής.

$$f(1) = -1$$

22. $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) \neq 0$

$$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^*$$

ⓐ Αν $x = y = 1$

$$f(1) = f(1)\cdot f(1)$$

$$f(1) = f^2(1)$$

$$0 = f^2(1) - f(1)$$

$$0 = f(1)\,(f(1) - 1)$$

$\cancel{f(1) = 0}$ ή $f(1) - 1 = 0$

$f(1) = 1$

(β) ΝΔΟ $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

Για $x = x$ και $y = \frac{1}{x}$

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(1) = f\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$$

$$1 = f\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$$

(γ) Γνωρίζω ότι μόνο το $f(1) = 1$.

Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = 1$.

$\Rightarrow f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 1$ μόνο $f(1) = 1$

$\frac{x_1}{x_2} = 1$ $x_1 = x_2$

Αφού $f(xy) = f(x) f(y)$

όπου $y = \frac{1}{x_2}$ $\quad x = x_1$

$$f\left(x_1 \frac{1}{x_2}\right) = f(x_1) f\left(\frac{1}{x_2}\right)$$

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) f\left(\frac{1}{x_2}\right)$$

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) \frac{1}{f(x_2)}$$

$$\boxed{f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{f(x_1)}{f(x_2)}}$$