

16. *Νόο* η επίδωση

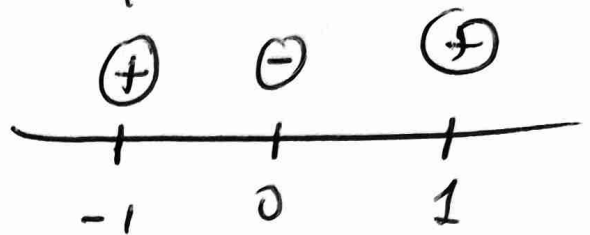
ΕΥΟΤΗΤΗ

$$3x^4 - x - 1 = 0$$

12

ΕΧΗ ΤΟΥΤΑΧΙΣΩΝ ΔΩ ΡΙΛΑ

ΣΩ (-1, 1)



Η $f(x)$ συνεχής σω $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ w π.ν.σ

$$f(-1) = 3$$

$$f(0) = -1$$

$$f(1) = 1$$

$f(-1)f(0) < 0$ Βολzano $\exists \xi_1 \in (-1, 0)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

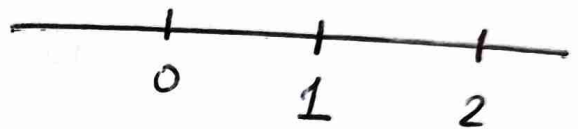
$f(0)f(1) < 0$ Βολzano $\exists \xi_2 \in (0, 1)$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$

19. $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} - x, & x \leq 1 \\ \ln x + x - 1, & x > 1 \end{cases}$

Νόο η επίσημη $f(x) = 1$, $\epsilon x \alpha$

ακριβώς στο $\pi\acute{\iota}\eta\delta$ στο $(0, 2)$.

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{1-x} - x = 0$



• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x + x - 1 = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ ενώ $f(1) = 0$

Άρα συνεχής στο 1

και γενικά στο $\mathbb{R}$ με π.σ.σ.

$$\underbrace{f(x) - 1}_{g(x)} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \oplus & \ominus & \oplus \\ | & | & | \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

H $g(x)$ σωαχω σω $[0,1]$ κα $[1,2]$ ω
π.δ.δ.

$$g(0) = f(0) - 1 = e - 1 > 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 < 0$$

$$g(2) = f(2) - 1 = \ln 2 + 1 > 0$$

Αρα

$g(0)g(1) < 0$ Bolzano $\exists \xi_1 \in (0,1)$ τ.ω $g(\xi_1) = 0$

$g(1)g(2) < 0$ Bolzano $\exists \xi_2 \in (1,2)$ τ.ω $g(\xi_2) = 0$

$$\underline{x \in [0,1]}$$

$$g(x) = f(x) - 1$$

$$g(x) = e^{1-x} - x - 1$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 - 1 > -x_2 - 1$$

$\oplus$ $g \downarrow$ το ξ_1 μοναδικ.

$$\underline{x \in [1,2]}$$

$$g(x) = f(x) - 1$$

$$g(x) = \ln x + x - 2$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$$

$g \nearrow$
το ξ_2 μοναδικ

20. $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ σwaxwł.

$$1 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \in [1, 2]$$

Ndó $\exists x_0 \in [1, 2]$ t.w $f(x_0) = x_0$.

$$f(x) = x$$

$$\underbrace{f(x) - x}_{g(x)} = 0$$

H $g(x)$ σwaxwł σw $[1, 2]$ ul n.d.σ

$$g(1) = f(1) - 1 \geq 0$$

$$1 \leq f(1) \leq 2$$

$$0 \leq f(1) - 1 \leq 1$$

$$g(2) = f(2) - 2 \leq 0$$

$$1 \leq f(2) \leq 2$$

$$-1 \leq f(2) - 2 \leq 0$$

$$\text{Apr } g(1)g(2) \leq 0$$

Apr Bolzano

$$\exists x_0 \in [1, 2] \text{ t.w } \underline{g(x_0) = 0}$$

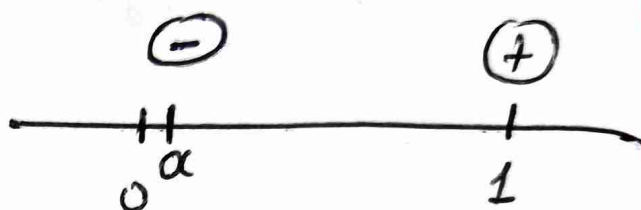
23. Ναο η ελίσωση $\ln x = x^2 - 2x$

εχου τουτ. ριζη $(0, 1)$

$$\underbrace{\ln x - x^2 + 2x}_{f(x)} = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$f(0) = ;$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - x^2 + 2x = -\infty$$

αρα η $f(x) < 0$ κοντα στο 0^+

αρα $\exists \alpha > 0$ τ.υ $f(\alpha) < 0$

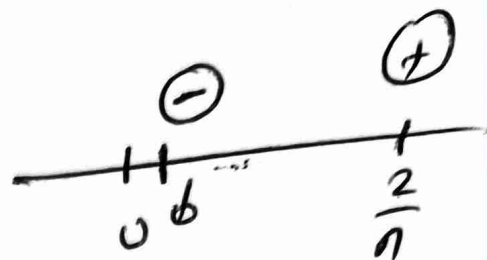
$$\text{Αρα } f(\alpha)f(1) < 0$$

Βολωω $\exists \xi \in (\alpha, 1)$ τ.ω

$H \xi = 0$

24. Να ο εἶσωση $2x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$
 έχει τούταχισαν για πῖτα σὺν $(0, \frac{2}{n})$.

$$\underbrace{2x \eta \mu \frac{1}{x} - 1}_{f(x)} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x \eta \mu \frac{1}{x} - 1) = 0 - 1 = -1$$

$$-1 \leq \eta \mu \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\boxed{-2x \leq 2x \eta \mu \frac{1}{x} \leq 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -2x = 0 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^+} -2x = 0} \right\} \text{Από κ.π.} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$$

→ Η $f(x) < 0$ κοντά στο 0^+

απο $\exists b > 0$ κοντά στο 0^+ τ.ν

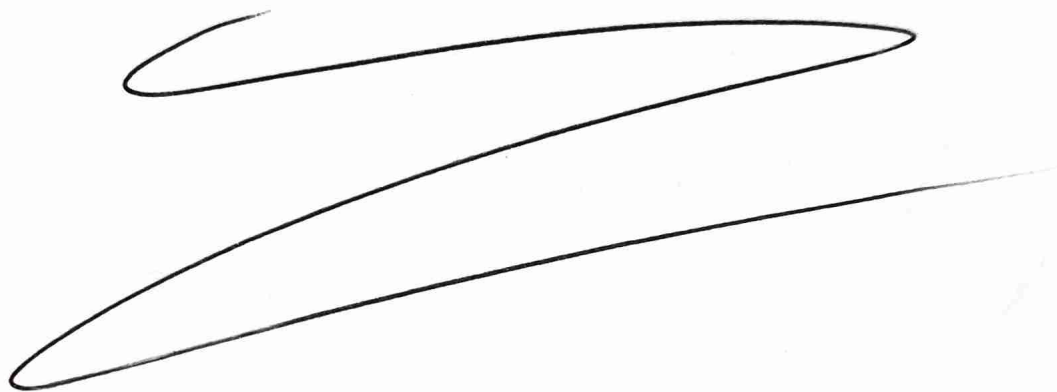
$$f(b) < 0$$

$$f(\frac{2}{n}) = 2 \cdot \frac{2}{n} \eta \mu \frac{1}{\frac{2}{n}} - 1 = \frac{4}{n} \eta \mu \frac{n}{2} - 1 = \frac{4}{n} - 1 > 0.$$

$$\text{Dpa } f(b) f(\frac{a}{n}) < 0$$

$$\text{Bolzano } \exists x_0 \in (b, \frac{a}{n})$$

$$\text{T.V } f(x_0) = 0$$



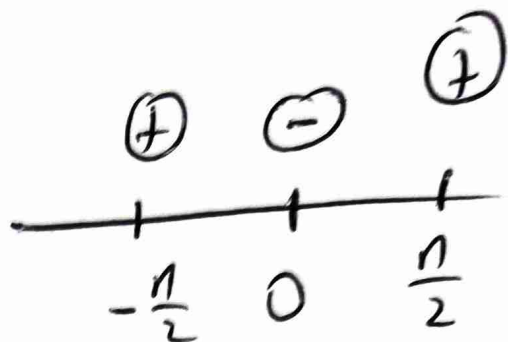
29. Νόσ η εἴσωση $x \varepsilon \varphi x = 1$
 εχ η τωλ. 2 ρίλ $(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$

$$x \varepsilon \varphi x = 1$$

$$x \frac{\eta \psi x}{\sigma \omega x} = 1$$

$$x \eta \psi x = \sigma \omega x$$

$$\underbrace{x \eta \psi x - \sigma \omega x}_{f(x)} = 0$$



Η $f(x)$ σωχ ηλ σζω $[-\frac{n}{2}, 0]$ κα $[0, \frac{n}{2}]$
 ηλ η.σ.σ

$$f(-\frac{n}{2}) = -\frac{n}{2} \eta \psi(-\frac{n}{2}) - \cancel{\sigma \omega(-\frac{n}{2})} = \frac{n}{2}$$

$$f(0) = -1$$

$$f(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2} \eta \psi \frac{n}{2} - \cancel{\sigma \omega \frac{n}{2}} = \frac{n}{2}$$

Αρ $f(-\frac{n}{2})f(0) < 0$ Bolzano $\exists \tau_1 \in (-\frac{n}{2}, 0) \tau. \sigma \quad f(\tau_1) = 0$

$f(0)f(\frac{n}{2}) < 0$ Bolzano $\exists \tau_2 \in (0, \frac{n}{2}) \tau. \sigma \quad f(\tau_2) = 0$

24. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχ.

ΕΥΟΤΗΤΗ

13

$$f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Νόμο $x f(x) = 1$ έχω πηλ $(-1, 1)$

$$\underbrace{x f(x) - 1}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχ στο $[-1, 1]$ w π.σ.σ

$$g(-1) = -f(-1) - 1 = -h(-1)$$

$$g(1) = f(1) - 1 = h(1)$$

$$\text{Αρα } g(-1)g(1) = \underbrace{-h(-1)h(1)}_{\text{αρνητικό}} < 0$$

$$f(x) \neq x$$

$$f(x) - x \neq 0$$

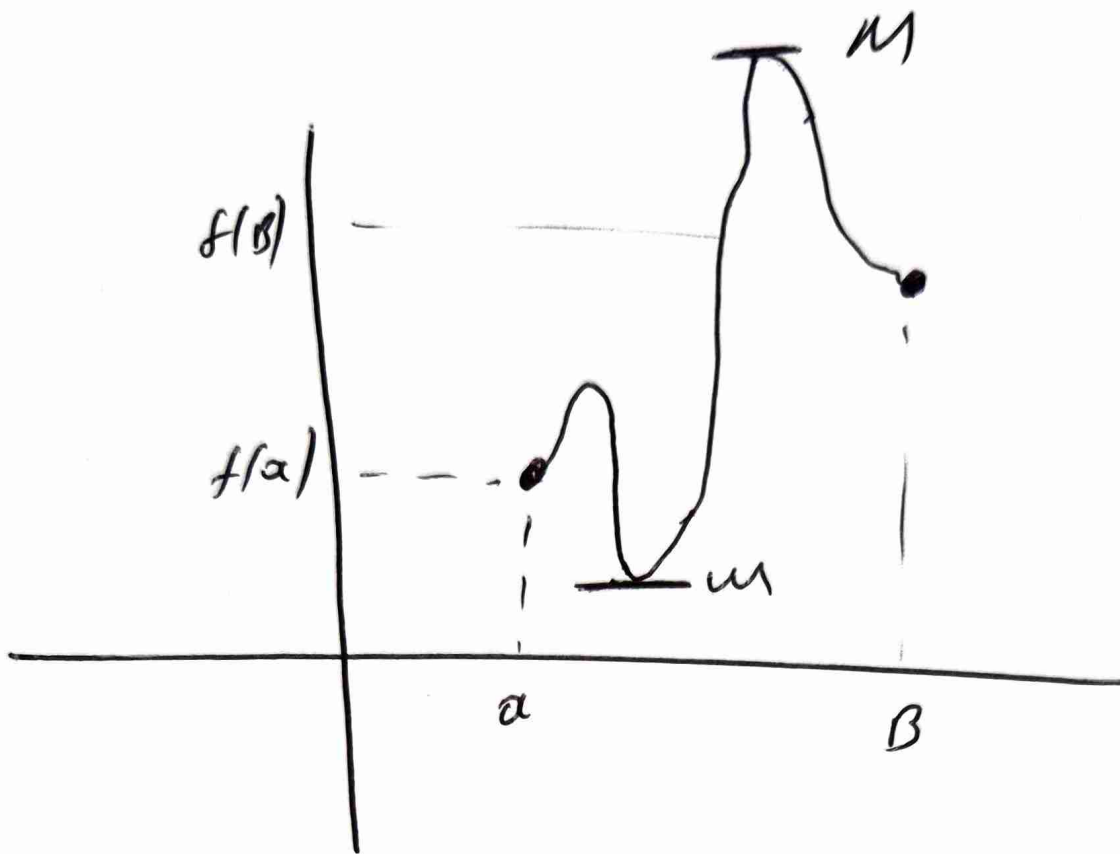
$$h(x) \neq 0$$

και συνεχ

$$\Rightarrow h(x) > 0 \text{ ή } h(x) < 0$$

Bolzano $\exists \xi \in (-1, 1)$ τ.ν $g(\xi) = 0$

Θεωρήματα Μέγιστης Ελάχιστης Τύπου.



Εστω f στο $[a, B]$ συνεχής.

$$\text{Τότε } m \leq f(x) \leq M$$

$$\forall x \in [a, B].$$

14. $\in \sigma \tau \omega \quad f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

ΕΥΟΤΗΤΑ

$\sigma \tau \omega \chi \omega \lambda. \quad \text{Ν} \delta \circ \quad \exists x_0 \in [0, 2]$

14

$$\tau. \omega \quad f(x_0) = \frac{f(0) + 5f(1) + 4f(2)}{10}$$

Αφω f $\sigma \tau \omega \chi \omega \lambda$ $\sigma \tau \omega \quad [0, 2]$

απο $\exists M \in \mathbb{R} \quad m \leq f(x) \leq M$

$\forall x \in [0, 2]$

$$m \leq f(0) \leq M$$

$$m \leq f(1) \leq M \Rightarrow 5m \leq 5f(1) \leq 5M$$

$$m \leq f(2) \leq M \Rightarrow 4m \leq 4f(2) \leq 4M$$



$$10m \leq f(0) + 5f(1) + 4f(2) \leq 10M$$

$$M \leq \frac{f(0) + 5f(1) + 4f(2)}{10} \in M$$

$$0 \quad \text{аритмет} \quad \frac{f(0) + 5f(1) + 4f(2)}{10}$$

анн ку 820 ΣT .

$$\text{Apr} \quad \exists x_0 \in [0, 2] \quad \text{т.ч.}$$

$$f(x_0) = \frac{f(0) + 5f(1) + 4f(2)}{10}.$$

8. $\hookrightarrow$ OTW $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ swexw

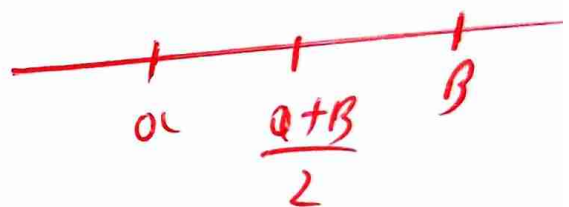
$f \nearrow$ Nso $\exists! \xi \in (a, b)$

T.W
$$f(\xi) = \frac{f(a) + f(b) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{3}$$

H $f(x)$ swaxw $[a, b]$

$m \leq f(x) \leq M$
 $\ominus M \in T$

$\forall x \in [a, b]$



$$m \leq f(a) \leq M$$

$$m \leq f(b) \leq M$$

$$m \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq M$$

$$\left. \begin{array}{l} m \leq f(a) \leq M \\ m \leq f(b) \leq M \\ m \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq M \end{array} \right\} \oplus \quad 3m \leq f(a) + f(b) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 3M$$

$$m \leq \frac{f(a) + f(b) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{3} \leq M$$

o apidw $\frac{f(a) + f(b) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{3} \in \text{STf}$

apw $\exists! \xi \in (a, b)$ T.W $f(\xi) = \frac{f(a) + f(b) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{3}$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος: 10/9/26

Ώρα μαθήματος: 5:30

Ασκήσεις

Ενοστά 12

(34)

(38)

(39)

(40).

παρατηρήσεις

Ενοστά 13

6.

Εξέταση Θεωρία

1.18

1.21

1.22

1.23

1.26.

Θεωρία, ραβ