

Συστήματα

Υπάρχουν τρεις τρόποι
για να λύσουμε ένα σύστημα.

1. Μεθόδους της αντικατάστασης.
2. Μεθόδους οριζήτων συντελεστών.
3. Μεθόδους των ορίσεων.

1ο Σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

Μεθόδος αντικατάστασης,

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \Rightarrow -y = -1 - 2x \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$y = 1 + 2x$$

$$3x + 2(1 + 2x) = 9$$

$$3x + 2 + 4x = 9$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

$$y = 1 + 2 \cdot 1$$

$$y = 3$$

Μεθόδος απαθέρων απαλέρων.

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases} \quad (+)$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

$$2 \cdot 1 - y = -1$$

$$2 - y = -1$$

$$-y = -1 - 2$$

$$-y = -3$$

$$y = 3$$

Μεθόδους επίλυσης

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 4 + 3 = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 - 9(-1) = -2 + 9 = 7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot (-1) = 18 + 3 = 21$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{21}{7} = 3$$

Ορισμός

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

2ο Συστήμα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -4x + 6y = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 6y = 4 \\ -4x + 6y = -1 \end{cases} \quad (\oplus)$$

$$0 = 3$$

Αδυνατώ!

3ο σύστημα

$$\begin{cases} -x + \frac{y}{2} = 1 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases} \quad (+)$$

$$0 = 0$$

Αόριστο!

Έχει άπειρα λύσεις!
όλα τους έχουν την
μορφή

$$\underline{y = 2x + 2}$$

$$\left(t, 2t + 2 \right)$$

Σημώσεις

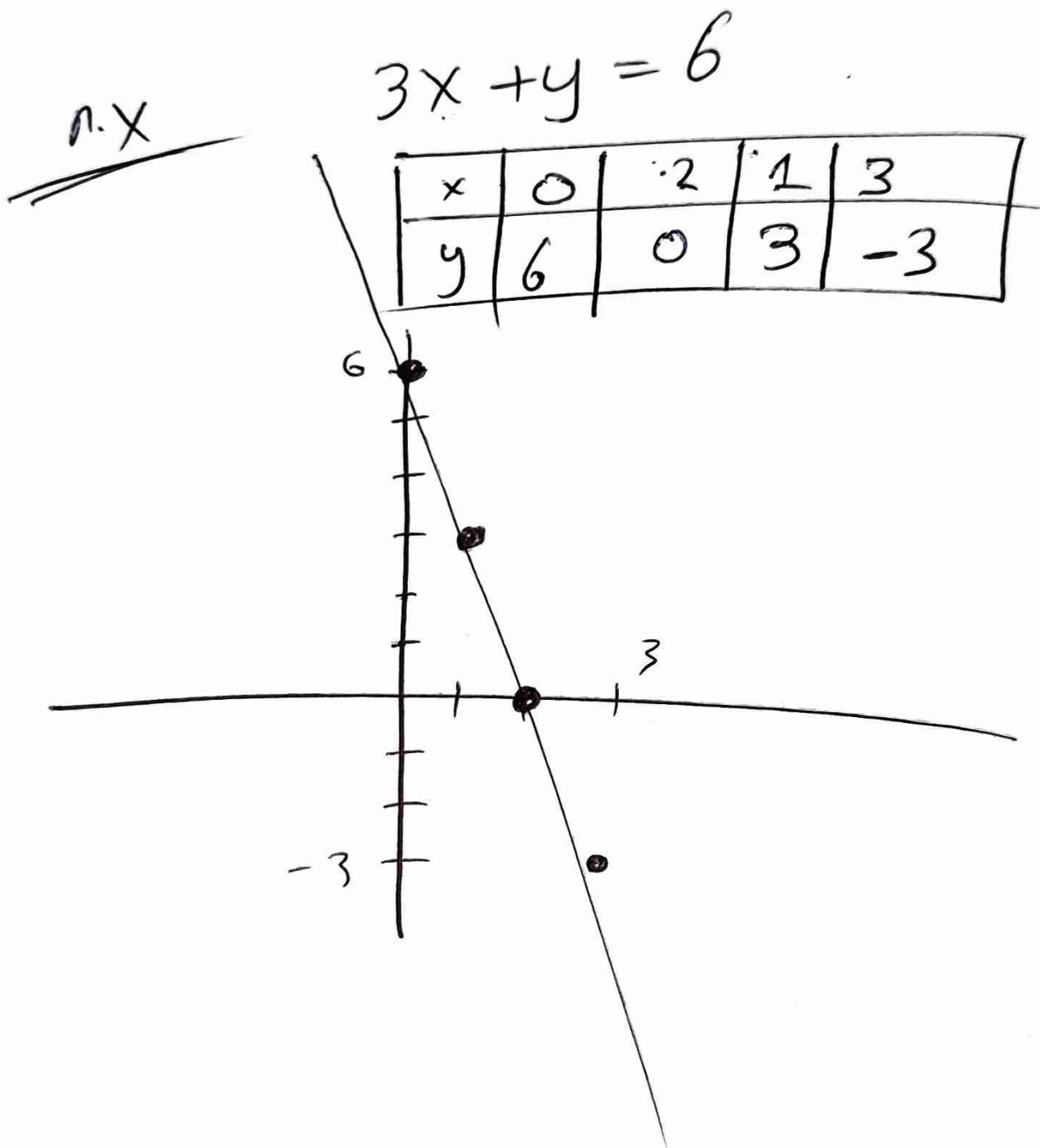
1. Κάθε εξίσωση της μορφής,
 $ax + by = \gamma$, $a \neq 0$ ή $b \neq 0$
λέγεται γραμμική εξίσωση.

2.
$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a_1x + b_1y = \gamma_1 \end{cases}$$
 λέγεται
γραμμικό
σύστημα.

3. Το ζεύγος (x_0, y_0) λέγεται
λύση της γραμμικής εξίσωσης
 $ax + by = \gamma$ αν και
μόνο αν την επαληθεύει
δηλαδή $ax_0 + by_0 = \gamma$.

Συστηματα - Ευθείες

1. Κάθε γραμμική εξίσωση
 $ax + by = \gamma$ παριστάνει
έναν γραμμή.



2. Εάν το σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} \varepsilon_1 \ni ax + by = \gamma \\ \varepsilon_2 \ni a_1 x + b_1 y = \gamma_1 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση (x_0, y_0)

τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2

τέμνονται στο σημείο $A(x_0, y_0)$

3. Εάν το (Σ) είναι αδύνατο

τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2

είναι παράλληλες γιατί δεν

έχουν κανένα κοινό σημείο.

4. Εάν το σύστημα (Σ) είναι

αόριστο τότε οι ευθείες ε_1

και ε_2 ταυτίζονται.

Γραμμική εξίσωση

1. Δίνεται η εξίσωση $3x - y = 6$.

- α. Να εξετάσετε, αν τα ζεύγη $(2, 0)$, $(3, 3)$ και $(2, 3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης.
- β. Να βρείτε την τιμή του a , για την οποία το ζεύγος $(a, 2a - 1)$ είναι λύση της εξίσωσης.
- γ. Να λύσετε την εξίσωση.

2. Έστω ότι το ζεύγος $(2, 1)$ είναι λύση της εξίσωσης $(a - 1)x - y = a + 3$.

- α. Να βρείτε την τιμή του a .
- β. Να λύσετε την εξίσωση.

Αλγεβρική επίλυση συστήματος

3. Να λύσετε με τη μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 3 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

γ.
$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

4. Να λύσετε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5x + 2y = 12 \end{cases}$$

γ.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

δ.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}$$

5. Να λύσετε τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

γ.
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

6. Να λύσετε τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} \frac{x}{4} - y = 1 \\ x = 4y + 2 \end{cases}$$

γ.
$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x + 9y = 12 \end{cases}$$

7. Να λύσετε τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} 2x - (y - 1) = x \\ 3(x - y) - 1 = y - 6 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} 3 - 2(x - 3y) = y - x \\ x - (2y - 1) = y - 6 \end{cases}$$

8. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{4} \\ \frac{x-1}{2} - \frac{x-2y}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

9. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ \frac{x}{2} + y = 2 \end{cases}$.

α. Να εξετάσετε αν το ζεύγος $(-1, -5)$ είναι λύση του συστήματος.

β. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

10. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} (x+1)^2 + 3y = x^2 - 4 \\ 3x + (y-1)^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} (x-2)^2 - y = x^2 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y-6}{6} = 2 \end{cases}$$

$$\bullet (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\bullet (\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

11. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+1 \\ x + (y-1)^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x - 3y = -1 \\ (x-1)^3 + 3x^2 + 5y = x^3 - 2 \end{cases}$$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος: 11/9/26

Ώρα μαθήματος: 9:30.

Ασκήσεις

Ενότητα 1

① $\alpha \beta$.

⑦ $\alpha \beta$

③ γ

⑧ $\alpha \beta$

④ $\beta \delta$

⑩ $\alpha \beta$

⑤ γ

⑪ $\alpha \beta$,

⑥ ③

παρατηρήσεις