1. Αν $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 4$ τοτε

τοτε και $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{2026}{x}\right)$;

$\frac{2026}{x} = t$

$x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{2026}{x}\right) = \lim\limits_{t \to 0} f(t) = 4$

2. Αν $g(x)$ ↓ να βρω τη μονοτονια της $f(x) = x - g(x)$

(+)

- $x_1 < x_2$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow -g(x_1) < -g(x_2)$

$x_1 - g(x_1) < x_2 - g(x_2)$

$f(x_1) < f(x_2)$

↑ f

3. $f: [-2, -5] \to \mathbb{R}$

$g: [2, 5] \to \mathbb{R}$

- f είναι γνησίως φθίνουσα
- η C_f έχει κοινό σημείο με την ευθεία $x'x$ που ονομάζουμε ~~σημείο~~ εκφυλισμένο διάστημα $(2, 3)$
- $2 < g(x) < 3$ για κάθε $x \in [2, 3]$

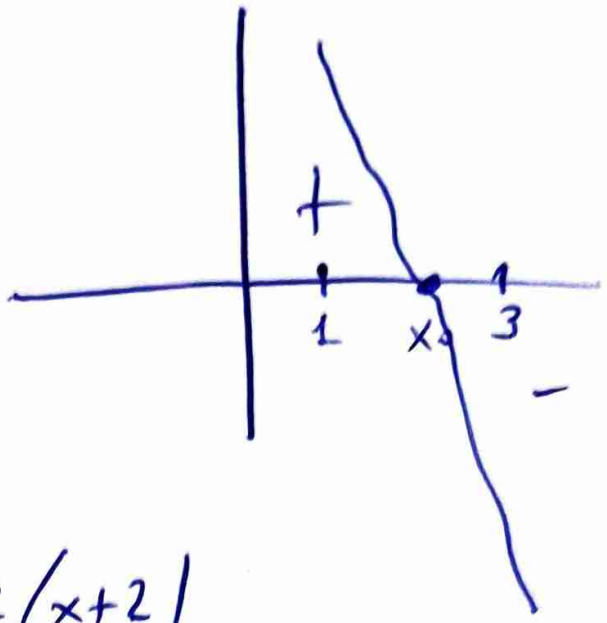
Να αποδείξετε ότι κάθε ένα από τα παρακάτω εξισώσεις έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(2, 3)$

α) $(x-1) f(x-2) = (x-3) f(x+2)$

β) $(f \circ g)(x) + x = f(x) + g(x)$

$\exists x_0 \in (1,3)$ T.w $f(x_0) = 0$

$1 < g(x) < 3$



$$(x-1)\,f(x-2) = (x-3)\,f(x+2)$$

$$(x-1)\,f(x-2) - (x-3)\,f(x+2) = 0$$

$h(x)$

$h(1) = 2f(3) < 0$

$h(3) = 2f(1) > 0$

$1 < x_0$	$3 > x_0$
$f \downarrow$	$f \downarrow$
$f(1) > f(x_0)$	$f(3) < f(x_0)$
$f(1) > 0$	$f(3) < 0$

$h(1)\,h(3) < 0$ Bolzano $\exists\, \xi \in (1,3)$

T.w $h(\xi) = 0$

$$(\xi-1)\,f(\xi-2) - (\xi-3)\,f(\xi+2) = 0$$

$$f(g(x)) + x = f(x) + g(x)$$

$$\underbrace{f(g(x)) + x - f(x) - g(x) = 0}_{h(x)}$$

$1 < g(x) < 3$

f↓

$$h(1) = f(g(2)) + 1 - f(1) - g(1) < 0$$

$$h(3) = f(g(3)) + 3 - f(3) - g(3) > 0$$

- $g(1) > 1$

  $f(g(1)) < f(1)$

  $f(g(1)) - f(1) < 0$

- $g(1) > 1$

  $1 - g(1) < 0$

• $g(3) < 3$

$f(g(3)) > f(3)$

$f(g(3)) - f(3) > 0$

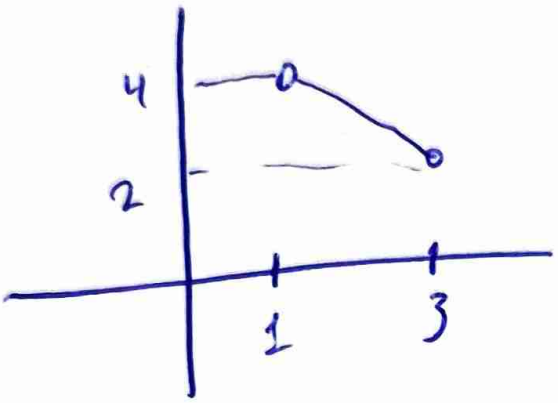
$g(3) \geq 3$

$3 - g(3) > 0$

$\not\downarrow$

4. $f:(1,3) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\uparrow\downarrow$

• $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$ $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$



$\Sigma T_f = (2,4)$

Πλησιάζει $\lim f(x) = \ln a$, $a>0$

$f(x) = \ln a = \lambda \Rightarrow f(x) = \lambda$

Αν $\lambda \geq 4$ δηλαδή $\ln a \geq 4 \Rightarrow a \geq e^4$ κατά

Αν $2 < \lambda < 4$ δηλαδή $2 < \ln a < 4 \Rightarrow e^2 < a < e^4$

1 ρίζα

Αν $\lambda \leq 2$ δηλαδή $\ln a \leq 2 \Rightarrow a \leq e^2$

καμία ρίζα

$f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(4)=3$

5. $f^2(x)+1=2f(x)-x$

$f^2(x)+1-2f(x)-x=0$

$(f(x)-1)^2-x=0$

$(f(x)-1)^2=\sqrt{x}^2$

$|f(x)-1| = |\overset{\oplus}{\sqrt{x}}|$

$|\overset{\oplus}{h(x)}| = \sqrt{x}$

$h(x)=\sqrt{x}$

$f(x)-1=\sqrt{x}$

$f(x)=\sqrt{x}+1$

Pt. 1 h(x)

$h(x)=0$

$|h(x)|=0$

$\sqrt{x}=0$

$x=0$

x	0	
$h(x)$	//	$+$

$h(4)=f(4)-1=3-1=2$