

Συναρτήσεις

Άσκηση 1

Να βρείτε и παρουσιάσετε την συνάρτηση

(α) $f(x) = 1 - 2\sqrt{1-3x}$

(β) $f(x) = x^3 - \sqrt{-x} - x^2$

Λύση

(α) $f(x) = 1 - 2\sqrt{1-3x}$

Πρέπει $1-3x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 3x \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$

$$A_f = (-\infty, \frac{1}{3}]$$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow 1-3x_1 > 1-3x_2$

$$\sqrt{1-3x_1} > \sqrt{1-3x_2}$$

$$-2\sqrt{1-3x_1} < -2\sqrt{1-3x_2}$$

f $\nearrow$

$$1 - 2\sqrt{1-3x_1} < 1 - 2\sqrt{1-3x_2}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

• (B) $f(x) = x^3 - \sqrt{-x} - x^2$

при $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

$$A_f = (-\infty, 0]$$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow \underline{x_1^3 < x_2^3}$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow \sqrt{-x_1} > \sqrt{-x_2}$

$$\underline{-\sqrt{-x_1} < -\sqrt{-x_2}}$$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$

$$\Rightarrow \underline{-x_1^2 < -x_2^2}$$

(+)

$$x_1^3 - \sqrt{-x_1} - x_1^2 < x_2^3 - \sqrt{-x_2} - x_2^2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$f \nearrow$

Άσκηση 2

Να βρω τα ακρότατα.

(α) $f(x) = 6 - 2x^4$

(β) $f(x) = -\frac{3}{\sqrt{2-x} + 1}$

Λύση

(α) Ισχύει ότι $x^4 \geq 0$
 $-2x^4 \leq 0$

$$6 - 2x^4 \leq 6$$

$$\underline{f(x) \leq 6}$$

$$\rightarrow f(x) = 6 \Rightarrow \cancel{-2x^4 = 0}$$

$$-2x^4 = 0$$

$$x^4 = 0$$

$$x = 0$$

$A(0, 6)$ Ολικό μέγιστο.

$$\textcircled{B} \quad \text{Пусть } 2-x \geq 0 \quad \text{или} \quad x \leq 2$$

$$A_f = (-\infty, 2]$$

$$\bullet \sqrt{2-x} \geq 0$$

$$\sqrt{2-x} + 1 \geq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2-x} + 1} \leq 1$$

$$\frac{3}{\sqrt{2-x} + 1} \leq 3$$

$$-\frac{3}{\sqrt{2-x} + 1} \geq -3$$

$$\underline{f(x) \geq -3}$$

$$A(2, -3)$$

$$0 \in$$

$$f(x) = -3 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{\sqrt{2-x} + 1} = -3$$

$$-3 = -3(\sqrt{2-x} + 1) \quad \Rightarrow \quad \cancel{1} = \sqrt{2-x} + \cancel{1} \quad \Rightarrow \quad 0 = \sqrt{2-x}$$

$$\underline{x=2}$$

Άσκηση 3

Έστω $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{5-x}$

Να μελετήσουμε τη $f(x)$ ως προς
τη μονotonία και τα ακρότατά της.

Πρέπει $x-2 \geq 0$ και $5-x \geq 0$
 $x \geq 2$ $x \leq 5$.

$$A_f = [2, 5]$$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \sqrt{x_1 - 2} < \sqrt{x_2 - 2}$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 5 - x_1 > 5 - x_2 \quad (+)$

$$\sqrt{5 - x_1} > \sqrt{5 - x_2}$$

$$-\sqrt{5 - x_1} < -\sqrt{5 - x_2}$$

f $\nearrow$

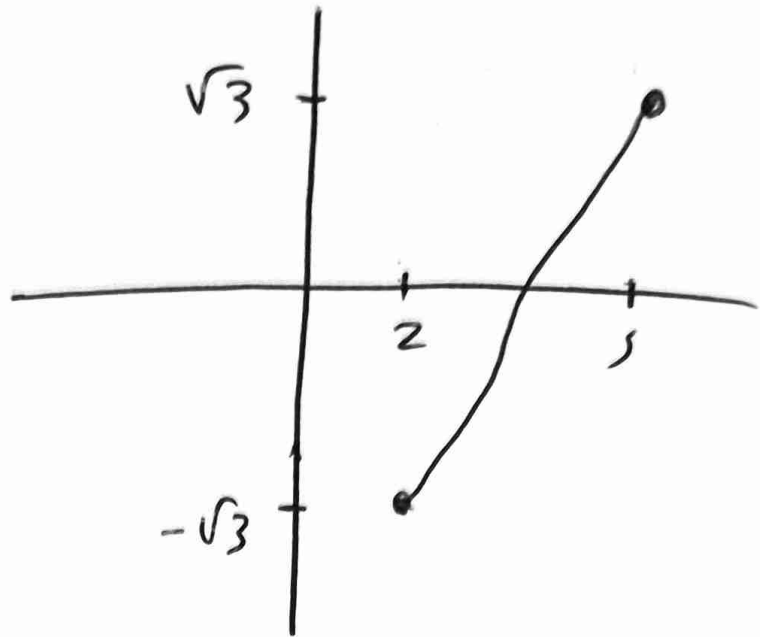
$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$f(2) = -\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{3}$$

$$A(2, -\sqrt{3}) \text{ O.E.}$$

$$B(5, \sqrt{3}) \text{ O.M.}$$



Άσκηση 4

Να ελέγξετε αν η $f(x)$ είναι
άρτια ή περιττή.

$$(α) \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-|x|}}$$

$$(β) \quad f(x) = \frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3}$$

Λύση

$$(α) \quad \text{Πρέπει } 4-|x| > 0 \Rightarrow |x| < 4$$

$$-4 < x < 4$$

$$x \in (-4, 4)$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{4-|-x|}} = \frac{x^2}{\sqrt{4-|x|}} = f(x) \quad \text{άρτια.}$$

$\textcircled{B}$. Имена $x-3 \neq 0$ или $x+3 \neq 0$
 $x \neq 3$ $x \neq -3$

$$A_f = \mathbb{R} - \{3, -3\}$$

$$f(-x) = \frac{-x+3}{-x-3} - \frac{-x-3}{-x+3} = \frac{-(x-3)}{-(x+3)} - \frac{-(x+3)}{-(x-3)} =$$

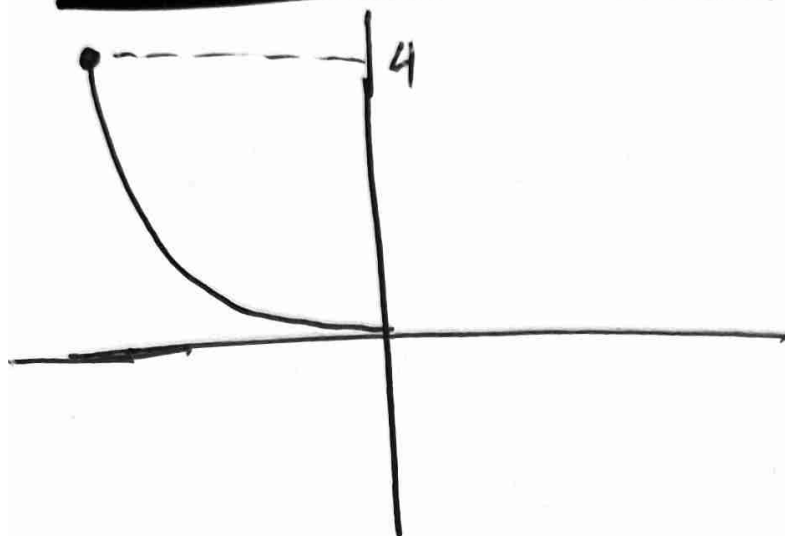
$$= \frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = - \left(\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \right)$$

$$= -f(x) \quad \text{аслутт}$$

Άσκηση 5

$$f: [a^2 - 3a, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

f αρχα .



(α) Βρει το a .

(β) Συμπληρώσε το σχήμα.

(γ) Μονοτονία ακρότατα

(δ) Σύγκρισε το $f\left(\frac{1}{2025}\right)$ και $f\left(\frac{1}{2026}\right)$

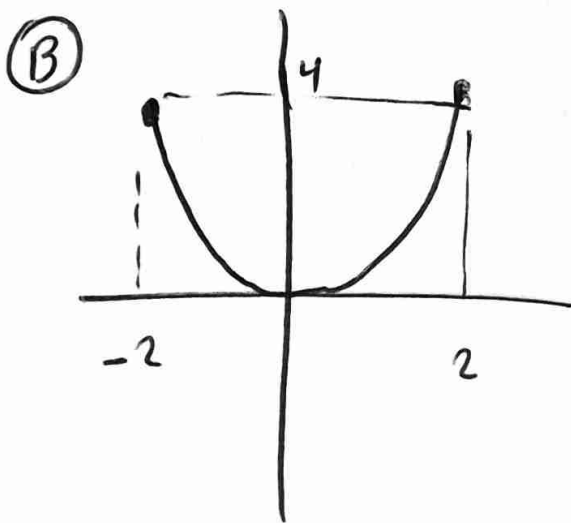
Λύση

α) Από η f ορίζεται το πεδίο ορισμού και είναι συρρετρικό $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

πρέπει $a^2 - 3a = -2$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$a=1, a=2$$



γ) Η f γν. γθινάουσα αν $x \in [-2, 0]$

Η f γν. αύξουσα αν $x \in [0, 2]$

Το $A(0, 0)$ Ο.Ε

Το $B(-2, 4)$ και $\Gamma(2, 4)$ Ο.Μ.

$$\textcircled{8} \quad \frac{1}{2025} > \frac{1}{2026} \quad \in (0, 1) \quad f \nearrow$$

$f \nearrow$

$$f\left(\frac{1}{2025}\right) > f\left(\frac{1}{2026}\right).$$

Άσκηση 6

Εστω f γραμμική συνάρτηση η οποία
διέρχεται από το $A(7,3)$ και τέμνει
τον y - y σε σημείο με τεταγμένη 5.

(α) Βρει των συνάρτηση.

(β) Βρει το πρόσημο της παράστασης

$$A = \frac{f(2\sqrt{3}) - f(3\sqrt{2})}{f(-1) - 5}$$

(γ) Να λοθάρ οι ανισώσεις.

i) $f(12x+11) > 3$

ii) $f(f(x^2+6x)-3) < 5$.

(δ) Αν $0 < k < 2$ να γραφεί σε
φθίνουσα σειρά του/ αριθμού/.

$$f(2), f\left(\frac{k+2}{2}\right), 5, f(k), f(k-2).$$

Аууу

(a) Аууу n f xy . $monoton \Rightarrow f \downarrow$ n $f \uparrow$

$$A(7, 3)$$

$$f(7) = 3$$

$$B(0, 5)$$

$$f(0) = 5$$

$$7 > 0$$

($\Rightarrow$)

$$f(7) < f(0)$$

$$\parallel$$

$$3$$

$$\parallel$$

$$5$$

$f \downarrow$

(b) $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$

$f \downarrow$

$$f(2\sqrt{3}) > f(3\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow f(2\sqrt{3}) - f(3\sqrt{2}) > 0$$

$$-1 < 0$$

$f \downarrow$

$$f(-1) > f(0)$$

$$f(-1) > 5$$

$$f(-1) - 5 > 0$$

$$A = \frac{\textcircled{+}}{\textcircled{+}} > 0,$$

$$\textcircled{1} \quad i) \quad f(12x+1) > 3$$

$$f(12x+1) > f(7)$$

$f \downarrow$

$$|12x+1| < 7$$

$$-7 < 12x+1 < 7$$

$$-8 < 12x < 6$$

$$\boxed{-4 < x < 3}$$

$$ii). \quad f(f(x^2+6x)-3) < 5$$

$$f(f(x^2+6x)-3) < f(5)$$

$f \downarrow$

$$f(x^2+6x)-3 > 0$$

$$f(x^2+6x) > 3$$

$$f(x^2+6x) > f(7)$$

$$x^2 + 6x < 7$$

$$x^2 + 6x - 7 < 0$$

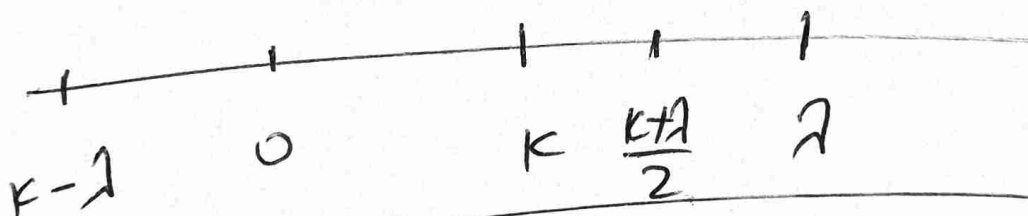
x	-7	1
$x^2 + 6x - 7$	+	- / +

$$x \in (-7, 1)$$

⑧ $1, \frac{k+1}{2}, 0, k, k-1$

$$0 < k < 1$$

$k-1 < 0$



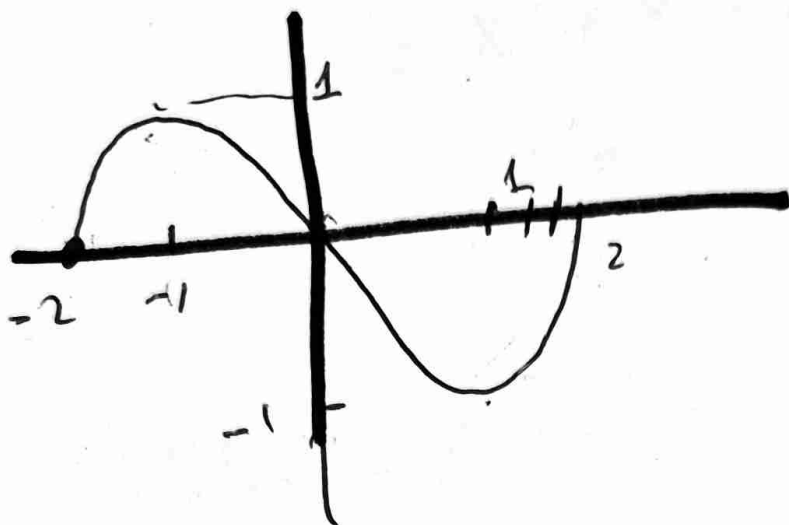
$$k-1 < 0 < k < \frac{k+1}{2} < 1$$

$\downarrow$

$$f(k-1) > f(0) > f(k) > f\left(\frac{k+1}{2}\right) > f(1)$$

Абхис SOS

$f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$
норматив.



Monotonu

$f \uparrow [-2, -1]$ and $[1, 2]$.

$f \downarrow [-1, 1]$.

$A(-1, 1) \in M$

$B(1, -1) \in E.$

Συγκρίνω το $f(\frac{3}{2})$ και $f(\frac{9}{8})$

$$\frac{3}{2} > \frac{9}{8}$$

$$24 > 18 \checkmark$$

$f \nearrow$

$$f(\frac{3}{2}) > f(\frac{9}{8})$$

$$f(x) = x^3 + x - 2$$

$f \nearrow$

$$f(x^2 - x) - f(x + 8) \geq 0$$

$$f(x^2 - x) > f(x + 8)$$

$f \nearrow$

$$x^2 - x > x + 8$$

$$x^2 - x - x - 8 > 0$$

$$x^2 - 2x - 8 > 0$$

x	$-2 \quad 4$	
$x^2 - 2x - 8$	$+$	$+$

$$x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$$

$$f(f(x-1) - 1) \leq -4$$

$$f(f(x-1) - 1) \leq f(-2)$$

$$f(x-1) - 1 \leq -1$$

$$f(x-1) \leq 0$$

$$f(x-1) \leq f(1)$$

$$f \neq$$

$$x-1 \leq 1$$

$$x \leq 2$$
