

Τελική Επανάληψη για το Διαγώνισμα 11/11/26

1. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - 4} = -1$$

Να βρεθεί η εφαπτομένη της f
στο $x_0 = 2$.

Λύση

$$y - \underline{f(2)} = \underline{f'(2)}(x - 2)$$

Θαρω βοηθητική συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x^2 - 4}$

$$\text{αρα } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1$$

Από $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x^2 - 4}$

$$g(x)(x^2 - 4) = f(x) - 2x$$

$$f(x) = g(x)(x^2 - 4) + 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)(x^2 - 4) + 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1 \cdot (4 - 4) + 2 \cdot 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 + 4$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ και αφού έχουμε $f(2) = 4$

$$T_0 \quad f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)(x^2 - 4) + 2x - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)(x^2 - 4)}{x - 2} + \frac{2x - 4}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} + \frac{2(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} = -1 \cdot 4 + 2 = -2$$

$f'(2) = -2$

Apri n $y - 4 = -2(x - 2)$

$$y - 4 = -2x + 4$$

$$y = -2x + 8$$

2. $\subset \sigma_{TW}$ $f(x) = e^{x-1} - \ln x, x > 0$

(a) Monotonia τηλ f

$$f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \quad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$$

x	0	1
f''	+	+
f'	$\nearrow$ -	$\nearrow$ +
f	$\searrow$	$\nearrow$

$$x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$f(x) \geq f(1)$$

$$\underline{\underline{f(x) \geq 1}}$$

(B) Να λυθεί η ε ίσωση

$$f(x^2 + 9) = f(10).$$

$$\bullet x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 9 \geq 9 \Rightarrow x^2 + 9 \geq 1$$

$$\bullet 10 > 1 \quad \forall x > 1 \text{ η } f \nearrow \text{ από } -1$$

$$f(9) = 1$$

$$x^2 + 9 = 10 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

⑧ Ndo 10x04 $f(e^x) \geq f(x+1) \quad \forall x > 0$

• $x > 0 \Rightarrow e^x > 1$

• $x > 0 \Rightarrow x+1 > 1$

$\left. \begin{array}{l} \bullet x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \\ \bullet x > 0 \Rightarrow x+1 > 1 \end{array} \right\} \forall x > 1 \Rightarrow f \nearrow$

Apr $e^x \geq x+1 \Rightarrow f(e^x) \geq f(x+1).$

• 5) Να λούει η ανίσωση $f(-2-x) < 1$
στο $(0, +\infty)$

• $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow -2-x < -2 \Rightarrow -2-x < 1$

$$f(-2-x) < 1$$

$$f(-2-x) < f(1)$$

$\forall x \leq 1$ η $f \downarrow$

$\rightarrow -2-x > 1$

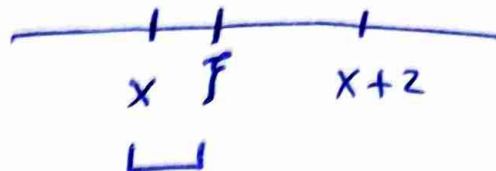
$$-2-1 > x$$

$$-3 > x$$

3. $\in \sigma \tau \omega$ or η $f' \downarrow$

(a) N.S.O. $2f'(x) + f(x) > f(x+2)$

$$f'(\xi) = \frac{f(x+2) - f(x)}{x+2 - x}$$



$$f'(\xi) = \frac{f(x+2) - f(x)}{2}$$

opw $x < \xi$ $\overset{f' \downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(\xi)$

$$f'(x) > \frac{f(x+2) - f(x)}{2}$$

$$2f'(x) > f(x+2) - f(x)$$

$$\boxed{2f'(x) + f(x) > f(x+2)}$$

(b) N.S.O. $f(x+2) - f(x) > 2f'(x+2)$

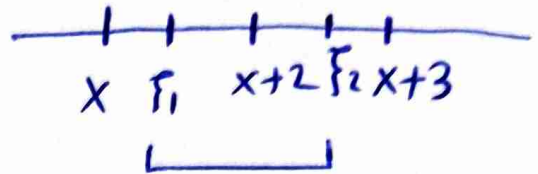
$\xi < x+2$ $\overset{f' \downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi) > f'(x+2)$

$$\frac{f(x+2) - f(x)}{2} > f'(x+2)$$

$$\boxed{f(x+2) - f(x) > 2f'(x+2)}$$

⑧ NDO $3f(x+2) > 2f(x+3) + f(x)$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+2) - f(x)}{x+2 - x}$$



$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+2) - f(x)}{2}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+3) - f(x+2)}{x+3 - x - 2} = f(x+3) - f(x+2)$$

$\xi_1 < \xi_2$ $\xrightarrow{f' \downarrow}$ $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$

$$\frac{f(x+2) - f(x)}{2} > f(x+3) - f(x+2)$$

$$f(x+2) - f(x) > 2f(x+3) - 2f(x+2)$$

$$\boxed{3f(x+2) > 2f(x+3) + f(x)}$$

4. Έστω F παράγωγο της f

Τι σημαίνει αυτό;

Δίνεται αν $f(x) = e^x > 0$

Τότε $F \nearrow$

F
 f
 f'

5.

$\rho < \alpha$

$$\textcircled{A} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{e^{-x}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

$$\textcircled{B} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \ln x \stackrel{+\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{\ln x}{e^x} \right)$$

$$= +\infty (1 - 0) = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} \sin x)$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\boxed{-e^{-x} \leq e^{-x} \sin x \leq e^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0} \right\} \text{Ans K.O.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x = 0$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$$|x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \cdot |x|$$

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\boxed{-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

$$\text{Ans K.O.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

6.

Συνθετική παραγωγή

$$g(x) = e^{f(x)}$$

$$\text{αρα } g'(x) = e^{f(x)} f'(x)$$

$$g(x) = \ln f(x)$$

$$\text{αρα } g'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$g(x) = f^2(x)$$

$$\text{αρα } g'(x) = 2f(x) f'(x)$$

$$g(x) = f^2(\ln x)$$

$$\text{αρα } g'(x) = 2f(\ln x) f'(\ln x) \frac{1}{x}$$

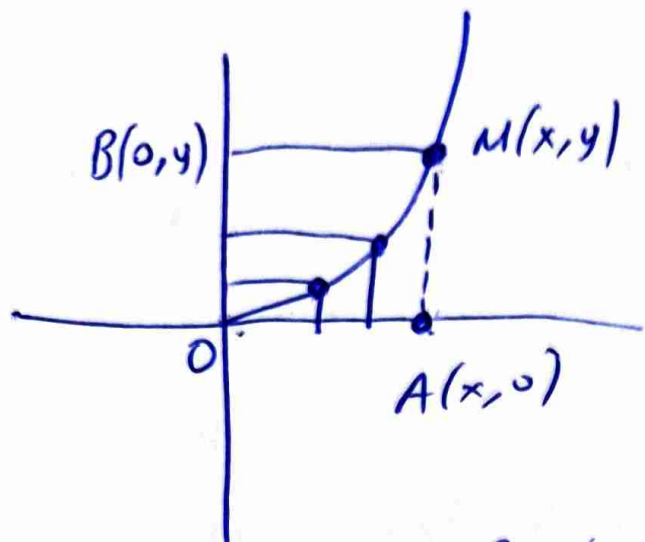
$$g(x) = f^2(x^2)$$

$$\text{αρα } g'(x) = 2f(x^2) f'(x^2) 2x$$

$$g(x) = f(x^2)$$

$$\text{αρα } g'(x) = f'(x^2) 2x$$

7. Έστω $f(x) = x^3$, $x \geq 0$



Γνωρίζω ότι ο ρυθμός
μεταβολής της τετραγωνικής
του M είναι 2

Ψάχνω το ρυθμό
μεταβολής του
εμβαδού του
ορθογώνιου $OAMB$
τη χρονική στιγμή
είναι όπως το M
διερχεται από τη
θέση $K(2,8)$.

$$E_{\text{ορθ}} = B \cdot U$$

$$E = x \cdot y$$

$$E(t) = x(t) \cdot y(t)$$

$$E'(t) = x'(t) y(t) + x(t) y'(t)$$

$$t = t_1$$

$$E'(t_1) = x'(t_1) y(t_1) + x(t_1) y'(t_1)$$

$$E'(t_1) = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 24 \Rightarrow \underline{\underline{E'(4) = 54}}$$

Der exw Bpd zu $y'(t_1)$

$$y = x^3$$

$$y(t) = x^3(t)$$

$$y'(t) = 3x^2(t) \cdot x'(t)$$

$$\underline{\underline{t = t_1}}$$

$$y'(t_1) = 3x^2(t_1) \cdot x'(t_1)$$

$$y'(t_1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 2$$

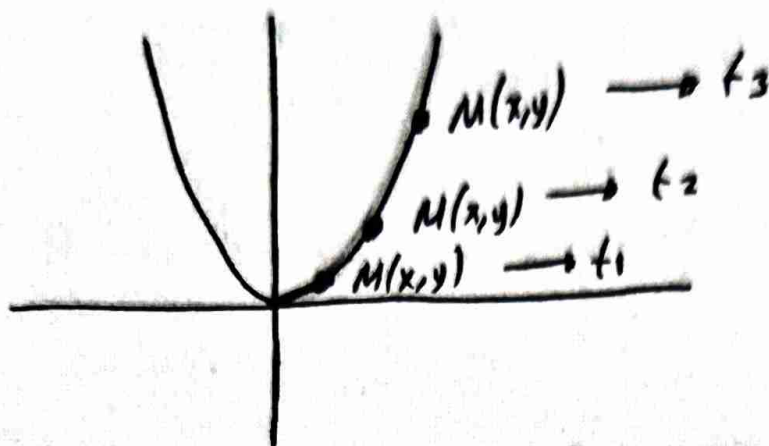
$$y'(t_1) = 3 \cdot 4 \cdot 2$$

$$y'(t_1) = 24$$

Ρυθμός

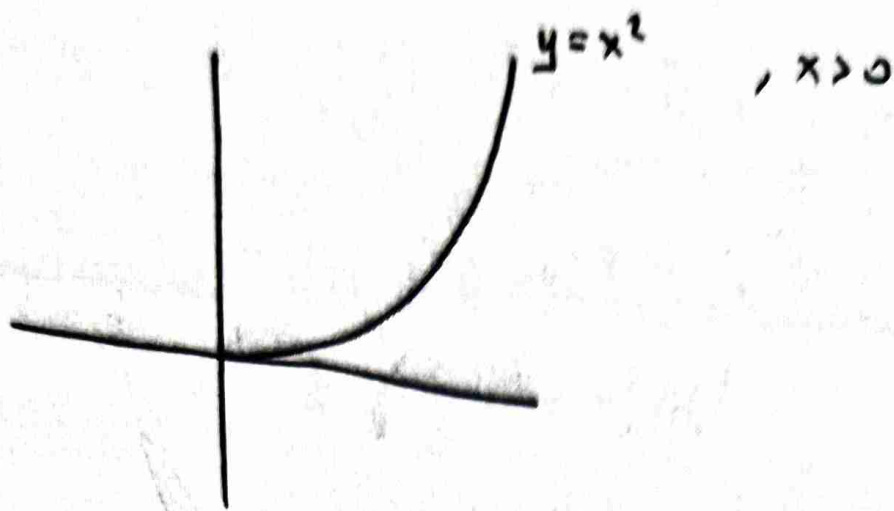
Μεταβολής

$$f(x) = x^2, \quad x > 0$$



Η τετμημένη του υλικού σημείου M
και η τεταγμένη του αλλοιωτή συνάρτησε
του χρόνου άρα $x = x(t)$, $y = y(t)$
φυσικά η τετμημένη και η τεταγμένη
μεταβάλλονται με ένα ρυθμό.

Ο ρυθμός με τον οποίο
μεταβάλλεται ένα μέγεθος
είναι μετρησιμός και λέγεται
ρυθμός μεταβολής και είναι
η παραγώγος συνάρτησης.



Η τετμημένη του υψους σημείου Μ αυξάνεται κατά 1.

Τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο Μ διασχίζεται από το σημείο $A(2,4)$

Να βρεθεί τη χρονική στιγμή t_1 ο ρυθμός μεταβολών.

Δεδομένα

$$x'(t) = 1$$

$$x(t_1) = 2$$

$$y(t_1) = 4.$$

1. Τις τεταγμένες του M

Γνωρίζω ότι $y = x^2$

Σος

Η παράγωγος
στο ρυθμό
μεταβολής
δίνεται ως προς t

$$y(t) = x^2(t)$$

$y'(t) = 2x(t) x'(t)$
είναι ο ρυθμός μεταβολής
της τεταγμένης του M
των τυχαία χρονικών στιγμών
 t

Για $t = t_1$

$$y'(t_1) = 2x(t_1) x'(t_1)$$

$$y'(t_1) = 2 \cdot 2 \cdot 1$$

$y'(t_1) = 4$

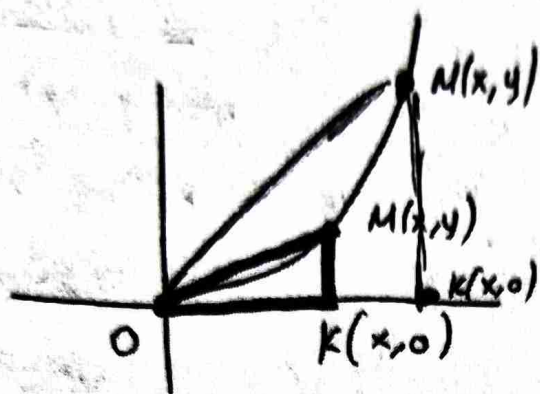
Σχόλιο

$$(x^2)' = 2x$$

$$[(\ln x)^2]' = 2 \ln x (\ln x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$(f^2(x))' = 2f(x) f'(x)$$

2. του εμβαδού του τριγώνου ΜΒΚ
 όπου Ο η αρχή των αξόνων και
 Κ η προβολή του Μ στον άξονα x.
Σχολίο



$$E = \frac{B \cdot U}{2}$$

$$E = \frac{x \cdot y}{2}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} x(t) y(t)$$

→ Το εμβαδόν του τριγώνου

των τυχαία χρονικά στιγμών t

$$E'(t) = \frac{1}{2} [x'(t) y(t) + x(t) y'(t)]$$

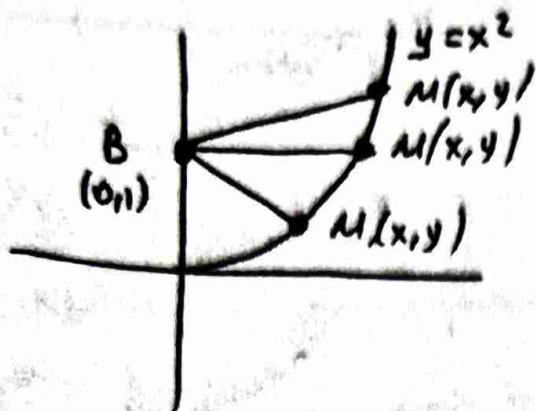
→ ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού των
 τυχαίων χρονικών στιγμών.

$$\underline{t=t_1} \Rightarrow E'(t_1) = \frac{1}{2} [x'(t_1) y(t_1) + x(t_1) y'(t_1)]$$

$$E'(t_1) = \frac{1}{2} [1 \cdot 4 + 2 \cdot 4] = 6 \in \boxed{E'(t_1) = 6}$$

Οποιαδήποτε χρονική
 στιγμή t το υλικό
 σημείο Μ με τα
 σημεία Ο, Κ
 σχηματίζει ορθογώνιο
 τριγωνό το οποίο
 έχει ένα εμβαδόν
 που ο ρυθμός με
 τον οποίο αλλάζει
 είναι μετρησιμώ!

3. Της αποστάσεων του M από το $B(0,1)$



Σχολίο
Η απόσταση του M από το B αλλάζει με σταθερό ο οποίος είναι μετρήσιμος.

$$d(M, B) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

$$d(M, B) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2(y(t)-1)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}}$$

Η απόσταση του M από το B των τοχών x και y στην t

$$\underline{t=t_1}$$

$$d'(t_1) = \frac{x(t_1)x'(t_1) + (y(t_1)-1)y'(t_1)}{\sqrt{x^2(t_1) + (y(t_1)-1)^2}}$$

Σχολίο

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d'(t_1) = \frac{2 \cdot 1 + (4-1)4}{\sqrt{4+9}}$$

$$d'(t_1) = \frac{14}{\sqrt{13}}$$

Επεξεργασία

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}$$

$$d'(t) = \frac{[x^2(t) + (y(t)-1)^2]'}{2\sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2(y(t)-1)(y'(t)-1)'}{2\sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2(y(t)-1)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}}$$

8. Έστω ότι $f(x) \cdot f'(x) > 0$
και $f'(x)$ συνεχής.

1. καταδείξτε από αυτό;

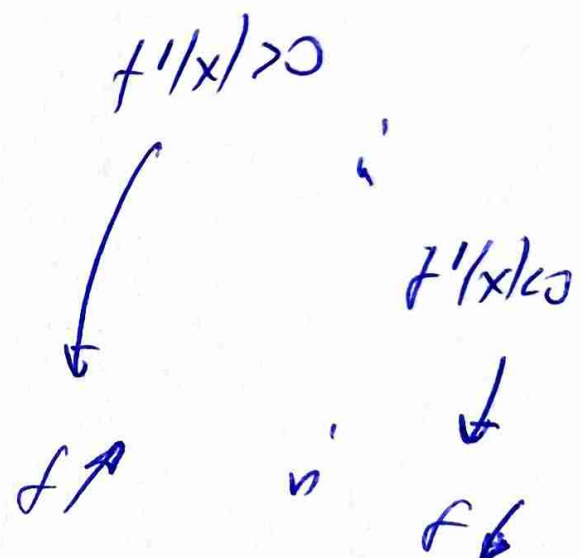
$$f(x) \cdot f'(x) > 0$$

Από $f(x) \cdot f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) \neq 0$

$f(x) \neq 0$ και $f'(x) \neq 0$
 $f(x) > 0 \vee f(x) < 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\underline{\exists x_0, x_1, 0}$$

Αν $f(x) \cdot f'(x) > e^x$
 προφανώς αφού $e^x > 0$
 και $f(x) \cdot f'(x) > 0$.



9. Να δειχθεί ότι $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1} \quad \forall x > 0$

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$
 ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

$$\ln(1+x) > \frac{x}{x+1} \quad \forall x > 0$$

$$\ln(1+x) - \frac{x}{x+1} > 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g(x)}$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} > 0 \quad g \nearrow$$

$\forall x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0)$

$$\ln(1+x) - \frac{x}{x+1} > 0 \quad \checkmark$$

$$f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}$$

Приведем к общему знаменателю $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$

$$\text{а так } f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} < 0$$

$f \downarrow$

10. $f(x+1) = e^{x-1}$

Bpd waw $f(x)$

DETW $x+1 = t$

$$x = t-1$$

$$f(t) = e^{t-1-1}$$

$$f(t) = e^{t-2}$$

$$f(x) = e^{x-2}$$

SOS

$$\ln +\infty = +\infty$$

$$\ln 0 = -\infty$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$e^{-\infty} = 0$$

$$e^{+\infty} = +\infty$$

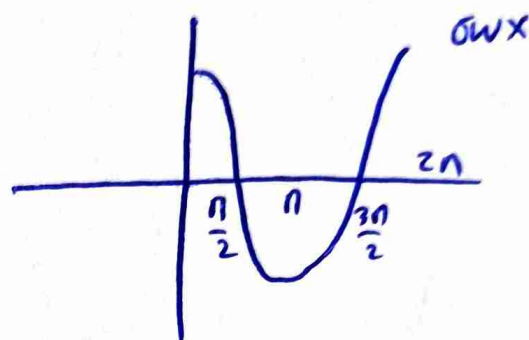
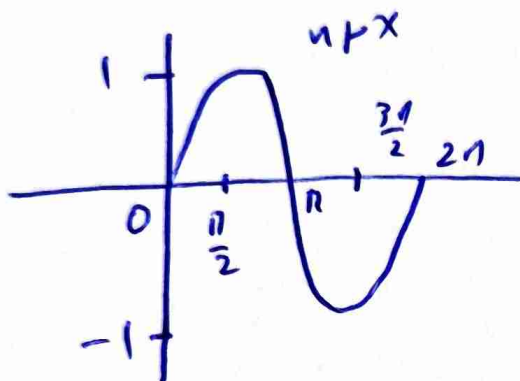
$$e^0 = 1$$

$$e' = e$$

$$e^x \geq x+1 \quad (x=0)$$

$$\ln x \leq x-1 \quad (x \leq 1)$$

$$|\ln x| \leq |x| \quad (x=0)$$



$$\frac{0}{0} = 0$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{1}{0} = \infty, \quad \infty = \infty$$

$$\frac{\alpha}{0} = \alpha \cdot \frac{1}{0} = \alpha \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{0}{0} = \text{DLH}$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \text{DLH}$$

$$0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ DLH}$$

$$+\infty - \infty = +\infty \left(1 - \underbrace{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}_{\text{DLH}} \right)$$