26. $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ **Ενότητα 12**

$4 < f(x) < 5$ $\forall x \in [0,1]$

Νδο $f^2(x) - 5f(x) + 4x = 0$ έχει ρίζα στο $(0,1)$.

$$\boxed{g(x) = f^2(x) - 5f(x) + 4x}$$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως π.σ.σ

$$g(0) = f^2(0) - 5f(0) = \overset{+}{f(0)}\,\overset{-}{(f(0)-5)} < 0$$

$$g(1) = f^2(1) - 5f(1) + 4 = \overset{+}{(f(1)-1)}\,\overset{+}{(f(1)-4)} > 0$$

$4 < f(0) < 5$

$-1 < f(0) - 5 < 0$

$4 < f(1) < 5$

$3 < f(1) - 1 < 4$

$0 < f(1) - 4 < 1$

Άρα $g(0)g(1) < 0$ Bolzano $\exists \xi \in (0,1)$ τ.ω $g(\xi) = 0$

27. Νδο η εξισωση $x^3-(κλ-2)x+1=0$ εχει ριζα στο $(-1,0)$

$κ+λ=2$

$\downarrow$

$\underline{κ=2-λ}$

$$\boxed{f(x) = x^3-(κλ-2)x+1}$$

Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[-1,0]$ ως π.δ.σ

$f(-1) = -1+κλ-2+1 = κλ-2 =$

$= (2-λ)λ-2$

$= 2λ-λ^2-2$

$= -λ^2+2λ-2$

$Δ = 4-4(-1)(-2)$

$Δ = 4-8 = -4$

$Δ<0$

$f(0) = 1 > 0$

Αρα $f(0)f(-1)<0$

Bolzano $\exists\, ξ \in (-1,0)$

τ.ω $f(ξ)=0$.

αφου $Δ<0$ το τριωνυμο διατηρει σταθερο αρνητικο προσημο

28. Νδο $\exists x_0 \in (\alpha,\beta)$ τ.ω

$$\frac{f(x_0)}{x_0-\alpha} = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

$$f(x)(\beta-\alpha) = (x-\alpha)\big(f(\alpha)+f(\beta)\big)$$

$$\underbrace{f(x)(\beta-\alpha) - (x-\alpha)\big(f(\alpha)+f(\beta)\big)}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως π.δ.σ

$g(\alpha) = f(\alpha)(\beta-\alpha)$

$g(\beta) = f(\beta)(\beta-\alpha) - (\beta-\alpha)\big(f(\alpha)+f(\beta)\big)$

$$g(\beta) = (\beta - \alpha)\left(\cancel{f(\beta)} - f(\alpha) - \cancel{f(\beta)}\right)$$

$$g(\beta) = -f(\alpha)(\beta - \alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} g(\alpha) &= f(\alpha)(\beta - \alpha) \\ g(\beta) &= -f(\alpha)(\beta - \alpha) \end{aligned}\right\} \odot$$

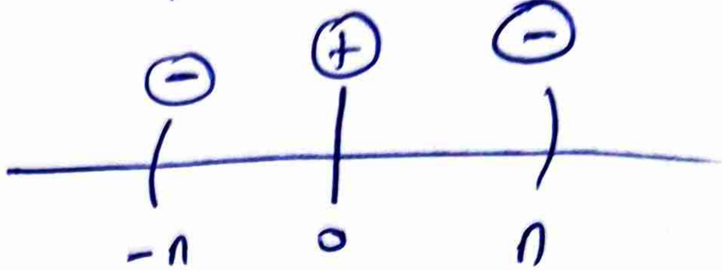
$$g(\alpha)\, g(\beta) = -f^2(\alpha)(\beta - \alpha)^2 < 0$$

Bolzano $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$ T.W $g(x_0) = 0$.

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha}.$$

17. (α) Νδο $\sigma\upsilon\nu x = (x - \eta\mu x)x$

έχει δυο ρίζες στο $(-\pi, \pi)$.



$$\boxed{f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x(x - \eta\mu x)}$$

Η $f(x)$ συνεχής στο $[-\pi, 0]$ και $[0, \pi]$

ως π.δ.σ

$g(-\pi) = \sigma\upsilon\nu(-\pi) - (-\pi)(-\pi - \eta\mu(-\pi))$

$g(-\pi) = -1 + \pi(-\pi) = -\pi^2 - 1$

$g(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

$g(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi - \pi(\pi - \eta\mu\pi) = -1 - \pi^2 < 0$

$\rightarrow g(-\pi)\,g(0) < 0$ Bolzano $\exists\, \xi_1 \in (-\pi, 0)$ τ.ω $g(\xi_1) = 0$.

$\rightarrow g(0)\,g(\pi) < 0$ Bolzano $\exists\, \xi_2 \in (0, \pi)$ τ.ω $g(\xi_2) = 0$

21. Έστω $0 \leq f(x) \leq 1$

Νδο $\exists x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ τ.ω $f(\eta\mu x_0) = \eta\mu x_0$

$$f(\eta\mu x) = \eta\mu x$$

$$\underbrace{f(\eta\mu x) - \eta\mu x}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ ως π.σ.σ

$$g(0) = f(\eta\mu 0) - \eta\mu 0 = f(0) \geq 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\eta\mu \frac{\pi}{2}\right) - \eta\mu \frac{\pi}{2} = f(1) - 1 \leq 0.$$

$$0 \leq f(1) \leq 1$$

$$-1 \leq f(1) - 1 \leq 0$$

$$g(0)\, g\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$$

$$g(0)\, g\left(\frac{\pi}{2}\right) \le 0$$

$g(0)\, g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

Bolzano

$\exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

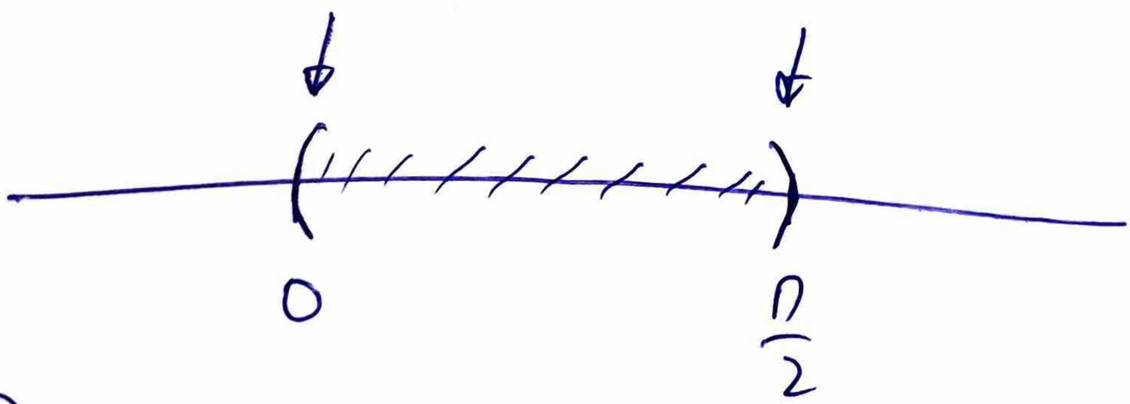
τ.ω $g(x_0) = 0$.

ή $g(0) \cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$g(0) = 0$ ή $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Το 0 ή $\frac{\pi}{2}$

είναι ρίζα.



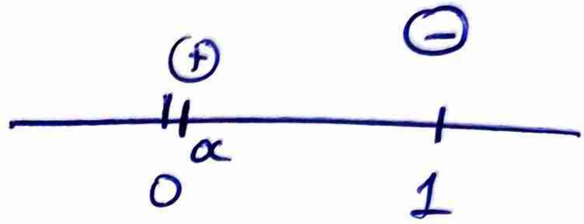
Άρα $\exists x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τω $g(x_0) = 0$

25. Νδο η εξισωση

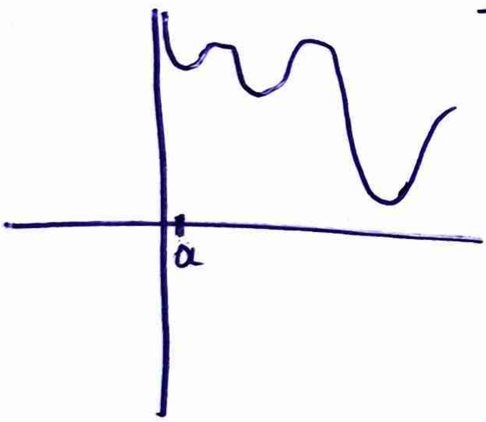
$e^{\frac{1}{x}} = x+2$ εχει τουλαχιστον

ριζα στο $(0,1)$.

$$\underbrace{e^{\frac{1}{x}} - x - 2}_{f(x)} = 0$$



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} - x - 2\right) = e^{+\infty} - 2 = +\infty$$



$\exists\, \alpha > 0$ κοντα στο 0^+ τ.ω

$f(\alpha) > 0$

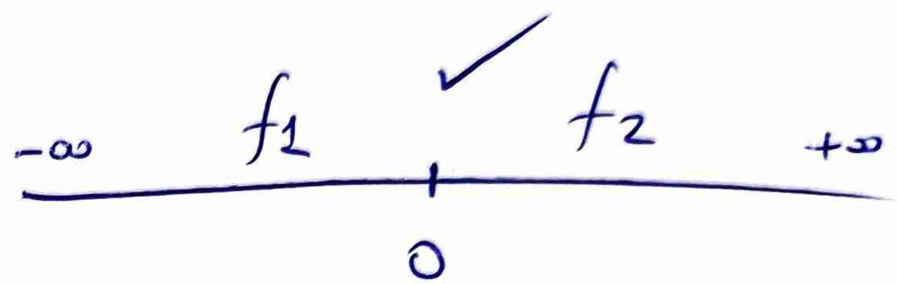
$f(1) = e - 3 < 0$

$f(\alpha) f(1) < 0$ Bolzano $\exists\, \xi \in (\alpha, 1)$

τ.ω $f(\xi) = 0$. $\xi \in (0,1)$.

18. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 0 \\ e^x-1, & x>0 \end{cases}$

Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$;



Η $f(x)$ συνεχής στο $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

ως π.σ.σ.

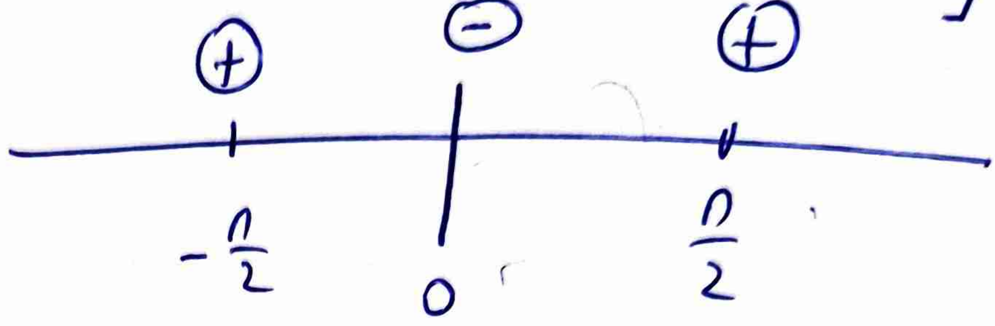
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} e^x-1 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\lim_{x\to 0} f(x)=0 \\ &f(0)=0 \end{aligned}$$

Συνεχής στο 0!

Συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Νδο η εξίσωση $f(x) = συνx$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}]$



$$\boxed{g(x) = f(x) - συνx}$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[-\frac{π}{2}, 0]$ και $[0, \frac{π}{2}]$

ως π.δ.δ.

$g(-\frac{π}{2}) = f(-\frac{π}{2}) - συν(-\frac{π}{2}) = (-\frac{π}{2})^2 = \frac{π^2}{4}$

$g(0) = f(0) - συν0 = 0 - 1 = -1 < 0$

$g(\frac{π}{2}) = f(\frac{π}{2}) - συν(\frac{π}{2}) = e^{π/2} - 1 > 0$

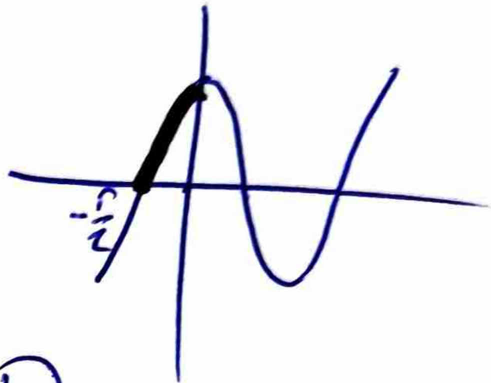
$g(0)\,g(-\frac{π}{2}) < 0$ Bolzano $\exists ξ_1 \in (-\frac{π}{2}, 0)$ τ.ω. $g(ξ_1) = 0$

$g(0)\,g(\frac{π}{2}) < 0$ Bolzano $\exists ξ_2 \in (0, \frac{π}{2})$ τ.ω. $g(ξ_2) =$

Μονοτονια για την $g(x)$ στο $[-\frac{\pi}{2}, 0]$

$$g(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x$$

$$\boxed{g(x) = x^2 - \sigma\upsilon\nu x}$$



- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 < \sigma\upsilon\nu x_2$

$$-\sigma\upsilon\nu x_1 > -\sigma\upsilon\nu x_2$$

(+) $g \downarrow$

Το ξ_1 μοναδικο

Μονοτονια για την $g(x)$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$g(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x$$

$$g(x) = e^x - 1 - \sigma\upsilon\nu x$$

$g \nearrow$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2 \Rightarrow -\sigma\upsilon\nu x_1 < -\sigma\upsilon\nu x_2$

Το ξ_2 μοναδικο!

14. (B) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$|f(x)| = e^x + 1$

$f(0) = 2$

Ενότητα 13

Ρίζα $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$e^x + 1 = 0$

Άτοπο

$f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(0) = 2$

$f(x) > 0$

$f(x) = e^x + 1$

14. (γ) $f^2(x) = x^2+4$ $\qquad f(1)=\sqrt{5}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής!

$$f^2(x) = \sqrt{x^2+4}^{\,2}$$

$$|f(x)| = \left|\overset{+}{\sqrt{x^2+4}}\right|$$

$$\overset{+}{|f(x)|} = \sqrt{x^2+4}$$

Ρίζες $f(x)$

$f(x)=0$

$|f(x)|=0$

$\sqrt{x^2+4}=0$

$x^2+4=0$

$x^2=-4$

Άτοπο!

$f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x)>0$ ή $f(x)<0$

$f(1)=\sqrt{5}$

$f(x)>0$

$$f(x)=\sqrt{x^2+4}.$$

15. α) $f^2(x) = e^{2x} + 2e^x + 1$

$f(0) = 2$

$$f^2(x) = (e^x+1)^2$$

$$|f(x)| = |e^x+1|$$

$$|f(x)| = e^x+1$$

Ρίζα $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$e^x + 1 = 0$

$e^x = -1$

Αδύνατη

$f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(0) = 2$

$f(x) > 0$

$f(x) = e^x + 1$

17. (α) $f^2(x) = 4x f(x) + 4$ $\quad f(0)=2$

$$f^2(x) - 4x f(x) = 4$$

$$f^2(x) - 4x f(x) + 4x^2 = 4x^2 + 4$$

$$(f(x) - 2x)^2 = \sqrt{4x^2+4}^{\,2}$$

$$|f(x) - 2x| = |\overset{+}{\sqrt{4x^2+4}}|$$

$$\underbrace{|f(x) - 2x|}_{\oplus} = \sqrt{4x^2+4}$$

$$|h(x)| = \sqrt{4x^2+4}$$

Ρίζα $h(x)$

$h(x) = 0$

$|h(x)| = 0$

$\sqrt{4x^2+4} = 0$

Άτοπο!

$h(x) \neq 0$ και συνεχής

$h(x) > 0$ ή $h(x) < 0$

$h(0) = f(0) - 0 = 2$

$$h(x) = \sqrt{4x^2+4}$$

$$f(x) - 2x = \sqrt{4x^2+4}$$

$$f(x) = \sqrt{4x^2+4} + 2x$$

17. $f^2(x) - 2f(x) = 0$ $\quad f(2) = 2$

$$f^2(x) - 2f(x) + 1 = 1$$

$$(f(x) - 1)^2 = 1^2$$

$$|f(x) - 1| = |1|$$

$$|g(x)| = 1$$

Ρ.Τ.Ι $g(x)$

$g(x) = 0$

$|g(x)| = 0$

$1 = 0$

Άτοπο!

$g(x) \neq 0$ και συνεχής

$g(x) > 0$ ή $g(x) < 0$

$g(2) = f(2) - 1 = 2 - 1 = 1$

$g(2) > 0$

$g(x) > 0$

$g(x) = 1 \Rightarrow f(x) - 1 = 1 \qquad f(x) =$

18. $e^{f(x)}\left(e^{f(x)}-2x\right)=1$

$$e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}=1$$

$$e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1$$

$$\left(e^{f(x)}-x\right)^2=\sqrt{x^2+1}^{\,2}$$

$$\left|e^{f(x)}-x\right|=\left|\overset{(+)}{\sqrt{x^2+1}}\right|$$

$$\left|\overset{(+)}{h(x)}\right|=\sqrt{x^2+1}$$

Ρίζα $f(x)$

$h(x)=0$

$|h(x)|=0$

$\sqrt{x^2+1}=0$

$x^2+1=0$

Άτοπο!

$\cancel{e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1}}$

$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

$h(x)\neq 0$ και συνεχής

$h(x)>0$ ή $h(x)<0$

$h(0)=e^{f(0)}-0=e^{f(0)}>0$

$h(x)>0$

19. (a) $f^2(x) = x + 2f(x)$

$f: [-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(0) = 2$

$$f^2(x) - 2f(x) = x$$

$$f^2(x) - 2f(x) + 1 = x + 1$$

$$(f(x) - 1)^2 = \sqrt{x+1}^{\,2}$$

$$|f(x) - 1| = |\overset{+}{\sqrt{x+1}}|$$

$$|\overset{+}{h(x)}| = \sqrt{x+1}$$

$$h(x) = \sqrt{x+1}$$

$$f(x) - 1 = \sqrt{x+1}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} + 1$$

Ρίζα $h(x)$

$h(x) = 0$

$|h(x)| = 0$

$\sqrt{x+1} = 0$

$x + 1 = 0$

$x = -1$

x	-1	
$h(x)$		$\cdot \; +$

$h(0) = f(0) - 1 = 2 - 1 = 1$

20. (a) $|f(x)| = 1 - x^2$

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f(0) = 1$

$|f(x)| = 1 - x^2$

Pi7t $f(x)$

$f(x) = 0$

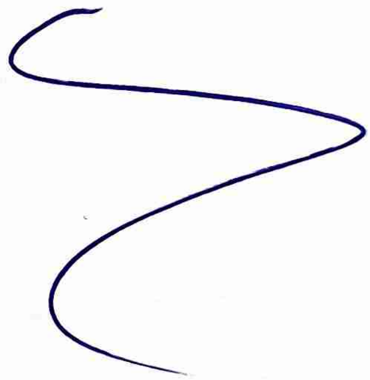
$|f(x)| = 0$

$1 - x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = 1$ $\qquad$ $x = -1$

$f(x) = 1 - x^2$



x		-1		1	
$f(x)$	///		+		///

$f(0) = 1$

21. $f^2(x)+2x^2=2xf(x)+1 \quad , x\in[-1,1]$

$f(0)=1 \qquad f$ συνεχης.

$$f^2(x)-2xf(x)+x^2=1-2x^2+x^2$$

$$(f(x)-x)^2=1-x^2$$

$$(f(x)-x)^2=\sqrt{1-x^2}^{\,2}$$

$$|f(x)-x|=|\overset{+}{\sqrt{1-x^2}}|$$

$$|\overset{+}{h(x)}|=\sqrt{1-x^2}$$

$\underline{f(x)=\sqrt{1-x^2}+x}$

<u>Ριζ h(x)</u>

$h(x)=0$

$|h(x)|=0$

$\sqrt{1-x^2}=0$

$1-x^2=0$

$x=1 \quad x=-1$

x	-1		1	
h(x)	//	+		//

$h(0)=1$

23. (B) $f^2(x) + 2e^x = e^{2x} + 1 \quad \forall x \in R.$

$$f^2(x) = e^{2x} - 2e^x + 1$$

$$f^2(x) = (e^x - 1)^2$$

$$|f(x)| = |e^x - 1|$$

Ρ.Ζ. $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$|e^x - 1| = 0$

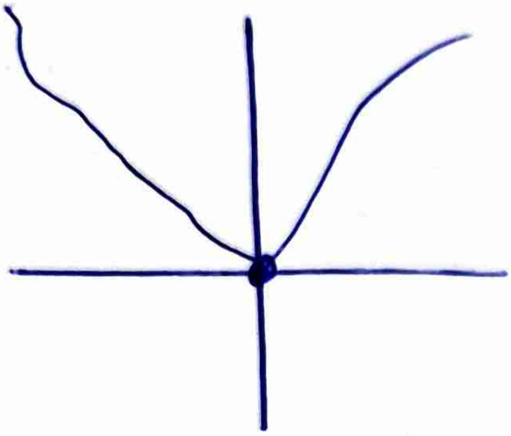
$e^x - 1 = 0$

$e^x = 1$

$x = 0$

x		0	
$f(x)$	;		;

1.



$$|f(x)| = |e^x - 1|$$

$$f(x) = |e^x - 1|$$

$x<0$

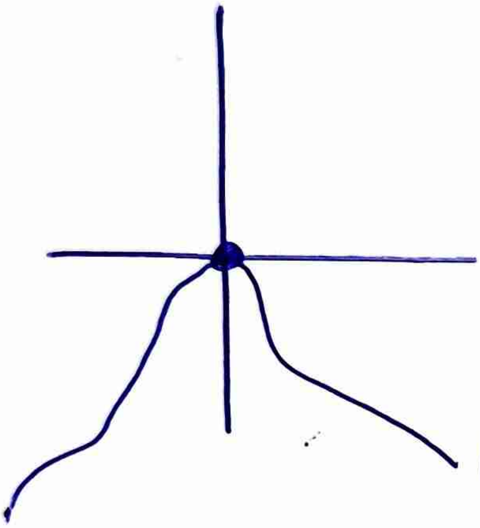
$$x<0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0$$

$x>0$

$$x>0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x - 1 > 0$$

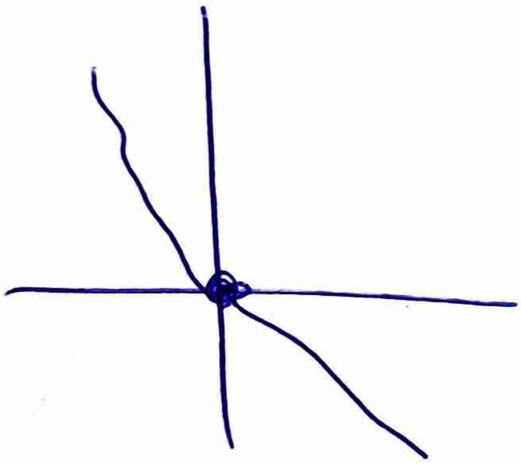
$$f(x) = \begin{cases} 1-e^x, & x<0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

2.



$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x<0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

3.



$x<0$

$$|f(x)| = |e^x - 1|$$

$$f(x) = 1 - e^x$$

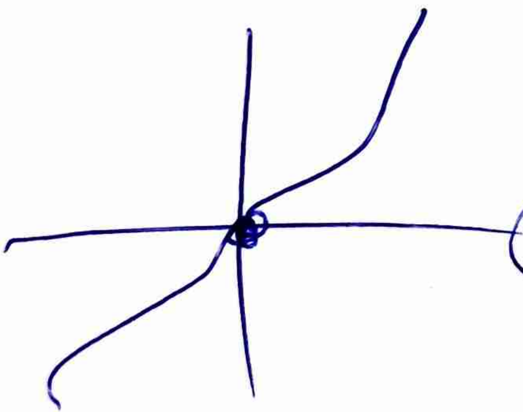
$x>0$

$$|f(x)| = |e^x - 1|$$

$$-f(x) = e^x - 1$$

$$f(x) = 1 - e^x$$

4.



$$f(x) = e^x - 1$$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος : 8/9/26

Ώρα μαθήματος : 6:30

Ασκήσεις

Ενοτητα 12

16

17 Β

19

20

23

24 29 .

παρατηρήσεις

Να λυσω την 24 απο ενοτητα 13