ΟΜΑΔΑ Β΄

12° ΓΕΛ ΠΑΤΡΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΟΥ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 16/01/25

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΤΜΗΜΑ : Γ.ΘΕΤ1

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: *Τρεις διδακτικές ώρες*

ΕΙΣΗΓΗΣΗ: Γαργαλιώνη Ελένη ΠΕ03

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να δείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (Μονάδες 07)

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (Θ.Ε.Τ) (Μονάδες 04)

Α3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 τότε θα είναι γνησίως μονότονη.»

Να χαρακτηρίστε την πρόταση ως Σωστή ή Λάθος αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 04) 02

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστή ή Λάθος

α) Αν για τη συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει $f(x) \leq 2026$ για κάθε $x \in R$,τότε η f έχει μέγιστη τιμή το 2026.

β) Αν η συνάρτηση $f: A \to R$ είναι 1-1 τότε ισχύει $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ για κάθε $x \in f(A)$.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι συνεχείς σ σημείο x_0 τότε και η $f \cdot g$ αποκλείεται να είναι συνεχής στο x_0.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα. 10

ε) Ισχύει $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ με $x \in R - \{x \,/\, \sigma\upsilon\nu x = 0\}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(x) = 3 - x - x^3 - x^5$ για κάθε $x \in R$

Β1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης f^{-1} με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 08) 04

Β2. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f(\ln x)\right) = 3$ (Μονάδες 04)

Β3. Να λύσετε την ανίσωση $1 + f^{-1}\left(45 + f(x^2 - x)\right) < 0$ (Μονάδες 06) 05

Β4. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 7x + 5}{f(x)}$ β) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x+1)}{f(x) \cdot \ln x}$ (Μονάδες 03+04 =07)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε,

$\lim_{x\to 0} \frac{xf(x)+\eta\mu x}{x^2} = 1$ και $(f(x))^2 = 1 + 2xf(x)$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι:

Γ1. $f(0) = -1$ (Μονάδες 05)

Γ2. $f(x) < x$ για κάθε $x \in R$ (Μονάδες 07)

Γ3. Η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} + \frac{e^{x+2}}{x+1} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2,0)$ (Μονάδες 07) 06

Γ4. $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x \in R$. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{2}{x-1} - 1$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$. (Μονάδες 05) 04

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. (Μονάδες 06) 01

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)\ln x = x + 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες αντίστροφες. (Μονάδες 07)

Δ4. Να δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = e^x$ και $\varphi(x) = \ln x$ έχουν δύο ακριβώς κοινές εφαπτόμενες. (Μονάδες 07) 02

Σαν μπάρλας
σελ. 171 ασκ. $\boxed{26}$

ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΜΙΑ ΤΥΧΕΡΗ ΧΡΟΝΙΑ!

Θεμα Β

$f(x) = 3 - x - x^3 - x^5$

$f'(x) = -1 - 3x^2 - 5x^4 < 0 \quad f \downarrow$

$\underline{x'x}$

$f^{-1}(x) = 0$

$f(f^{-1}(x)) = f(0)$

$x = 3$

$A(3, 0)$

$\underline{y'y}$

$f^{-1}(0) = t$

$f(f^{-1}(0)) = f(t)$

$0 = f(t)$

$f(1) = f(t)$

f 1-1

$t = 1$

$f^{-1}(0) = 1$

$B(0, 1)$.

$$f(f(\ln x)) = 3$$

$$f(f(\ln x)) = f(0)$$

f 1-1

$$f(\ln x) = 0$$

$$f(\ln x) = f(1)$$

f 1-1

$$\ln x = 1$$

$$\underline{x = e}$$

$$1 + f^{-1}\left(45 + f(x^2 - x)\right) < 0$$

$$f^{-1}\left(45 + f(x^2 - x)\right) < -1$$

$$f\left(f^{-1}\left(45 + f(x^2 - x)\right)\right) > f(-1)$$

$$45 + f(x^2 - x) > 6$$

$$f(x^2 - x) > -39$$

$$f(x^2 - x) > f(2)$$

$$f \downarrow$$

$$x^2 - x < 2$$

$$x^2 - x - 2 < 0$$

x		-1		2	
$x^2 - x - 2$	$+$		$-$		$+$

$$x \in (-1, 2).$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-7x+1}{3-x-x^3-x^5} = \lim_{x\to 1} \frac{4x-7}{-1-3x^2-5x^4} \quad \frac{-3}{-9}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x+1)}{f(x)\,\ln x} = \lim_{x\to 1} f(x+1)\ \frac{1}{f(x)}\ \frac{1}{\ln x}$$

$$-$$

$$= -39 \cdot (-\infty) = +\infty$$

x		1	
$\ln x$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$+0$	$-\searrow$
$\ln x\, f(x)$	$-$		$-$

Θέμα Γ

$$\lim_{x\to 0} \frac{x f(x) + \eta\mu x}{x^2} = 1$$ Να βρω τ $f(0)$

$$g(x) = \frac{x f(x) + \eta\mu x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

$$g(x)\, x^2 = x f(x) + \eta\mu x$$

$$g(x)\, x^2 - \eta\mu x = x f(x)$$

$$\boxed{f(x) = g(x)\, x - \frac{\eta\mu x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \cdot g(x) - \frac{\eta\mu x}{x} = -1$$

f συνεχής

$$f(0) = -1$$

$$f^2(x) = 1 + 2x f(x)$$

$$f^2(x) - 2x f(x) = 1$$

$$f^2(x) - 2x f(x) + x^2 = x^2 + 1$$

$$\left(f(x) - x\right)^2 = \sqrt{x^2+1}^{\,2}$$

$$|f(x) - x| = |\sqrt{x^2+1}| \quad \oplus$$

$$|h(x)| = |\sqrt{x^2+1}| \quad \oplus$$

Ρίζα $h(x)$

$h(x) = 0$

$|h(x)| = 0$

$\sqrt{x^2+1} = 0$

Άτοπο

$h(x) \neq 0$ και συνεχής.

$h(x) > 0$ ή $h(x) < 0$

$h(0) = f(0) - 0 = -1$

$$h(x) < 0$$

$$f(x) - x < 0$$

$$f(x) < x.$$

$$\frac{f(x)}{x} + \frac{e^{x+2}}{x+1} = 0 \qquad (-2, 0)$$

$$\underbrace{f(x)(x+1) + x(e^{x+2})}_{g(x)} = 0$$

$$g(-2) = -f(-2) - 2 > 0$$

$$f(x) < x$$

$$f(-2) < -2$$

$$0 < -2 - f(-2)$$

$$g(0) = f(0) = -1 < 0$$

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$$

$$\left|\overset{-}{h(x)}\right| = \left|\overset{+}{\sqrt{x^2+1}}\right|$$

$$-h(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$-(f(x) - x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$-f(x) + x = \sqrt{x^2+1}$$

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$$

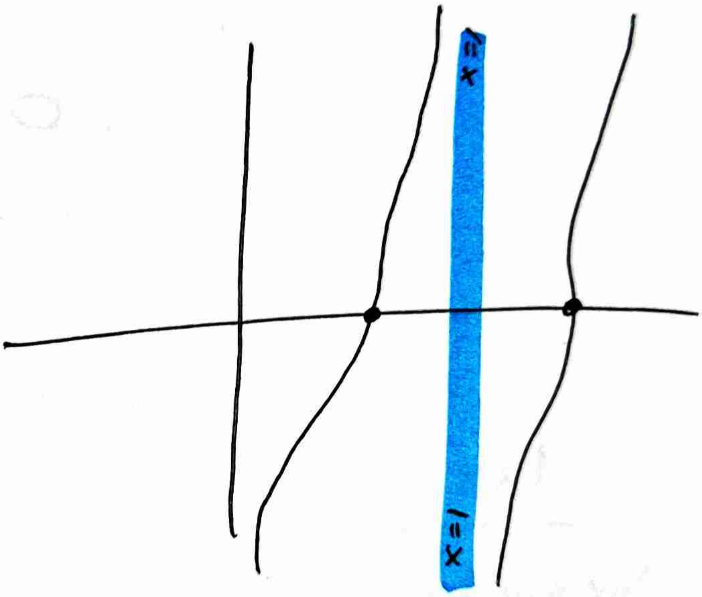
Θεμα Δ

$$f(x) = \ln x - \frac{2}{x-1} - 1, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} > 0$$

x	0		1		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Sigma T_f = \mathbb{R}$.



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$(x-1)\ln x = x+1$

$\ln x = \frac{x+1}{x-1}$

$\ln x = \frac{x+2-1}{x-1}$

$\ln x = \frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{x-1}$

$\ln x = \frac{2}{x-1} + 1$

$\ln x - \frac{2}{x-1} - 1 = 0$.

$f(x) = 0$.

<table>
<tr><td>

$x < 1$

- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = \mathbb{R}$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\, x_1$ τ.ω $f(x_1) = 0$

</td><td>

$x > 1$

- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = \mathbb{R}$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\, x_2$ τ.ω $f(x_2) = 0$..

</td></tr>
</table>

Εστω οτι το x_1 ειναι ριζα

$\Rightarrow f(x_1)=0$

$$\boxed{\ln x_1 - \frac{2}{x_1-1} - 1 = 0} \Rightarrow \ln x_1 = \frac{2}{x_1-1}+1$$

$$f\left(\frac{1}{x_1}\right) = \ln\frac{1}{x_1} - \frac{2}{\frac{1}{x_1}-1} - 1 =$$

$$= \ln 1 - \ln x_1 - \frac{2}{\frac{1-x_1}{x_1}} - 1 =$$

$$= -\ln x_1 - \frac{2x_1}{1-x_1} - 1$$

$$= -\frac{2}{x_1-1} - 1 - \frac{2x_1}{1-x_1} - 1 =$$

$$= -\frac{2}{x_1-1} - 1 + \frac{2x_1}{x_1-1} - 1 =$$

$$= \frac{-2+2x_1}{x_1-1} - 2 = \frac{2\cancel{(x_1-1)}}{\cancel{x_1-1}} - 2$$

$$= 2 - 2 = 0$$

$$g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$$

$$y(x) = \ln x \qquad y'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} g'(a) = y'(B) \\ g(a) - a g'(a) = y(B) - B y'(B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^a = \frac{1}{B} \\ e^a - a e^a = \ln B - B \frac{1}{B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^a = \frac{1}{B} \Rightarrow a = \ln \frac{1}{B} \Rightarrow a = \ln 1 - \ln B \\ e^a (1 - a) = \ln B - 1 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{a = -\ln B}}$$

$$\frac{1}{B}(1 + \ln B) = \ln B - 1$$

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{B} \ln B = \ln B - 1$$

$$1 + \ln B = B \ln B - B$$

$$1 + B = B \ln B - \ln B$$

$$1 + B = (B - 1) \ln B$$

Υπαρχουν ακριβως 2 B ✓

26. $f(x)=e^x$ $\quad f'(x)=e^x$

$g(x)=2\sqrt{x}$ $\quad g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Ενότητα 27

$$\begin{cases} f'(a)=g'(\beta) \\ f(a)-a f'(a)=g(\beta)-\beta g'(\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^a=\frac{1}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow \sqrt{\beta}=\frac{1}{e^a} \Rightarrow \sqrt{\beta}=e^{-a} \\ \qquad \beta=e^{-2a} \\ e^a-a e^a=2\sqrt{\beta}-\beta\frac{1}{\sqrt{\beta}} \end{cases}$$

$$e^a-a e^a=2\cdot e^{-a}-e^{-2a}\cdot e^a$$

$$e^a-a e^a=2e^{-a}-e^{-a}$$

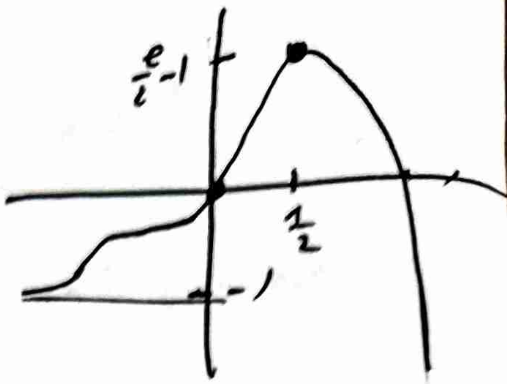
$$e^a-a e^a=e^{-a}$$

$$e^{2a}-a e^{2a}=1$$

$$e^{2a}(1-a)-1=0$$

$$e^{2a}-e^{2a}\cdot a-1$$

$$h(x) = e^{2x}(1-x) - 1$$



$$h'(x) = 2e^{2x}(1-x) - e^{2x}$$

$$h'(x) = e^{2x}\left(2(1-x) - 1\right)$$

$$h'(x) = e^{2x}(1-2x)$$

$\rightarrow$ $h'(x) = 0 \Rightarrow 1 = 2x$

$$x = \frac{1}{2}$$

x		$1/2$	
h'	$+$		$-$
h	-1 $\nearrow$	$\frac{e}{2}-1$	$\searrow$ $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{2x}(1-x) - 1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{e^{-2x}} - 1 =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{-2e^{-2x}} - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{2\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 1 = e \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{e}{2} - 1 > 0$$

$1{,}35 - 1 > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}(1-x) = -\infty$$

$x < \frac{1}{2}$

- h συνεχής
- $h \uparrow$
- $\Sigma T_h = (-1, \frac{e}{2} - 1)$

Το $0 \in \Sigma T_h$

άρα $\exists!\, \xi_1$ τ.ω

$h(\xi_1) = 0$

$x \geq \frac{1}{2}$

- h συνεχής
- $h \downarrow$
- $\Sigma T_h = (-\infty, \frac{e}{2} - 1]$

Το $0 \in \Sigma T_h$

άρα $\exists!\, \xi_2$

τ.ω $h(\xi_2) = 0$

36.

Ενότητα 27

$f(x) = x^2 - 8\ln x \quad , x > 0$

ⓐ $f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = 2\,\frac{x^2-4}{x}$

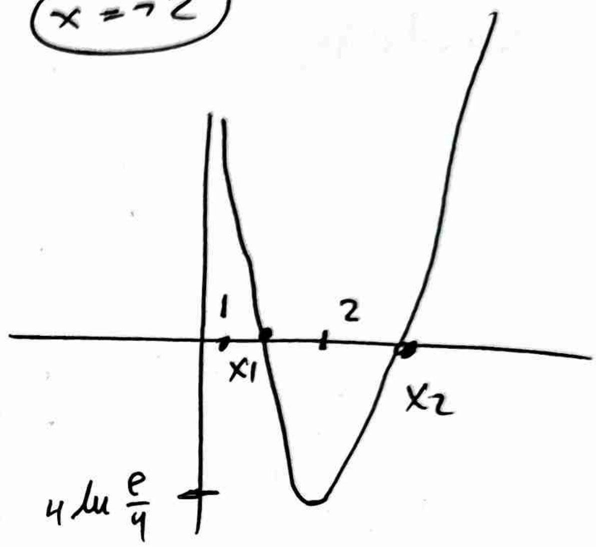
$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$x = 2$ $\quad$ $x = -2$

x	0	2	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$+\infty \searrow$		$\nearrow +\infty$

$f(x) \geq f(2)$

$f(x) \geq 4 - 8\ln 2$



$f(2) = 4 - 8\ln 2 = 4(1 - 2\ln 2) = 4(\ln e - \ln 4) = 4\ln\frac{e}{4} < 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 8\ln x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 8\ln x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \cancel{\frac{8\ln x}{x^2}}^{\,0}\right) = +\infty$

$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{8\ln x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{8}{x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8}{2x^2} = 0$

$x < 2$

- f συνεχής
- $f \downarrow$
- $\Sigma T_f = \left(4\ln\frac{5}{4}, +\infty\right)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists! \, x_1$ τ.ω.

$f(x_1) = 0$

$x \geq 2$

- f συνεχής
- $f \uparrow$
- $\Sigma T_f = \left[4\ln\frac{5}{4}, +\infty\right)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists! \, x_2$ τ.ω.

$f(x_2) = 0$

(B) Έστω $x_1 \leq 1$

$f \downarrow$

$f(x_1) \geq f(1)$

$0 \geq 1$

Άτοπο! $\underline{\underline{x_1 > 1}}$

(γ) $f(x) = f(1)$ αδύνατη $(0,1)$.

$0 < x < 1$

$f \downarrow$

$f(x) > f(1)$

$f(x) = f(1)$ αδύνατη

46. $f(x) = e^{-x} - \frac{2}{x}$, $x \neq 0$

(α) $f'(x) = -e^{-x} + \frac{2}{x^2}$

$f'(x) = -\frac{1}{e^x} + \frac{2}{x^2} = \frac{2e^x - x^2}{e^x}$

$\varphi(x) = 2e^x - x^2$

$\varphi'(x) = 2e^x - 2x = 2(e^x - x) > 0$

$\varphi \nearrow$

• $e^x \geq x + 1$

$e^x - x \geq 1$

$e^x - x > 0$

x	
φ'	$+$
φ	$-\infty \nearrow +\infty$ $\quad \Sigma T\varphi = \mathbb{R}$.
f'	
f	

$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} 2e^x - x^2 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(2 - \frac{x^2}{e^x}\right) = +\infty$

• φ συνεχής

• φ ↗

• $\Sigma T_\varphi = \mathbb{R}$

Το $0 \in \Sigma T_\varphi$

Άρα $\exists!\, x_0$ τ.ω $\varphi(x_0) = 0$.

x		x_0		0	
$\varphi(x)$	↗ −	0	↗ +	||	↗ +
$f'(x)$	−		+	||	+
$f(x)$	↘		↗	||	↗

Έστω $x_0 > 0 \Rightarrow \varphi(x_0) > \varphi(0) \Rightarrow 0 > 2$ Άτοπο

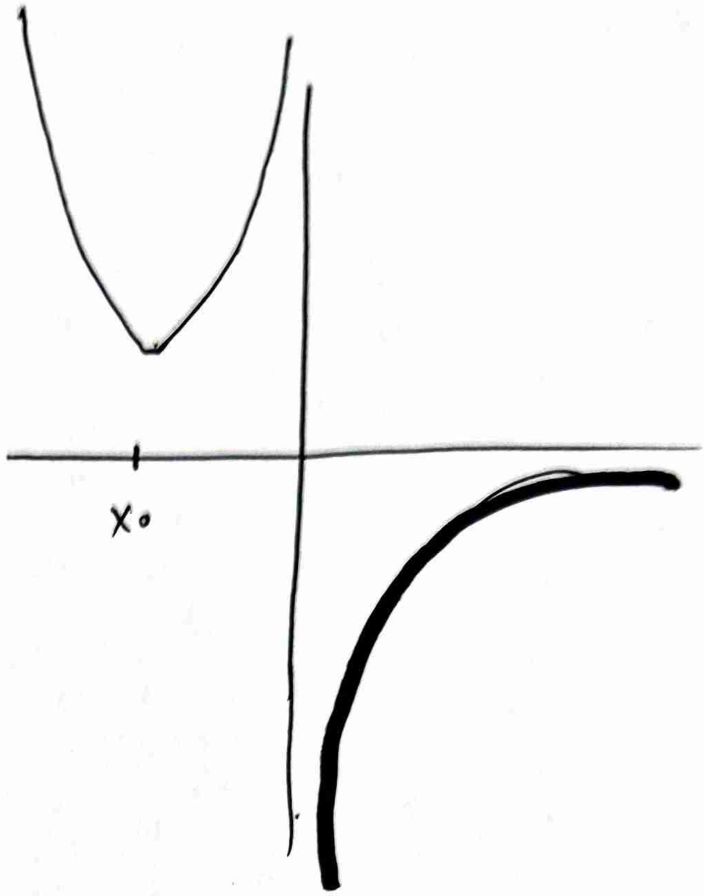
άρα $x_0 < 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$



$x > 0$

$f(x) = x - \ln x$

$-$ $\quad$ $+$

$\cdot\ \ln x \le x - 1$

$1 \le x - \ln x$

$0 < x - \ln x$

Λιστα Ασκησεων

29

13

15

16

27

48
Να τη
λυσω εγω

49

53

54

30

Να λυσουμε
1 2 5 6
15.