ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σύντομη επαναληπτική εργασία

Ανισότητες · Απόλυτη τιμή · Τετράγωνα παραστάσεων

Α. Ανισότητες και όρια παραστάσεων

1. Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:
   $\alpha.\ x+y$ $\quad \beta.\ 3x-y$ $\quad \gamma.\ xy$ $\quad \delta.\ \dfrac{x}{y}$

2. Αν $-2 \le x < 1$ και $3 < y \le 5$, να βρείτε τα όρια των παραστάσεων:
   $\alpha.\ x-y$ $\quad \beta.\ 2x+y$ $\quad \gamma.\ 2y-x$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:
   $\alpha.\ -3 < 2x+1 \le 7$ $\quad \beta.\ 1 \le 5-2x < 9$

4. Να γράψετε τα παρακάτω σύνολα σε μορφή διαστημάτων ή ενώσεων διαστημάτων:
   $\alpha.\ -1 \le x < 4$ $\quad \beta.\ x \le -2$ ή $x > 3$ $\quad \gamma.\ x > 1$

Β. Απόλυτη τιμή

5. Αν $-2 < x < 1$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
   $\alpha.\ A = |x+2| + |x-3|$ $\quad \beta.\ B = |x-2| - |x+4|$

6. Αν $\alpha < \beta < \gamma$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
   $\alpha.\ A = |\alpha-\beta| + |\beta-\gamma| - |\alpha-\gamma|$
   $\beta.\ B = |\alpha-\gamma| + |\gamma-\beta|$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:
   $\alpha.\ |x-2| < 3$ $\quad \beta.\ |2x+1| \ge 5$

Γ. Τετράγωνα και εφαρμογές

8. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 11 > 0$.

9. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει $x^2 + y^2 - 6x + 4y = -13$.

10. Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{|x|^3 - 5x^2}{|x| - 5}$. Να βρείτε:
    $\alpha.$ το πεδίο ορισμού της A, $\quad \beta.$ την απλούστερη μορφή της,
    $\gamma.$ τις τιμές του x για τις οποίες $A \ge 25$.

1. ⓐ $x+y$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ 1<x<3 \\ \cdot\ 2<y<4 \end{array}\right\}$ ⊕ $\boxed{3<x+y<7}$

ⓑ $3x-y$

$\cdot\ 1<x<3 \Rightarrow 3<3x<9 \Rightarrow -9<-3x<-3$

$\cdot\ 2<y<4 \Rightarrow -2>-y>-4$ ⊕

$\boxed{-7<3x-y<-1}$

ⓒ xy

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ 1<x<3 \\ \cdot\ 2<y<4 \end{array}\right\}$ ⊙ $\boxed{2<xy<12}$

ⓓ $\frac{x}{y}$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ 1<x<3 \Rightarrow 3>x>1 \\ \cdot\ 2<y<4 \Rightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{y}>\frac{1}{4} \end{array}\right\}$ ⊙ $\boxed{\frac{3}{2}>\frac{x}{y}>\frac{1}{4}.}$

9. $x^2+y^2-6x+4y=-13$

$x^2+y^2-6x+4y+13=0$

$x^2-6x+9+y^2+4y+4=0$

$(x-3)^2+(y+2)^2=0$

$x=3 \qquad y=-2$

8. No $x^2+y^2-2x+6y+11 \geq 0$

$x^2-2x+1+y^2+6y+9+1>0$

$(x-1)^2+(y+3)^2+1>0.$

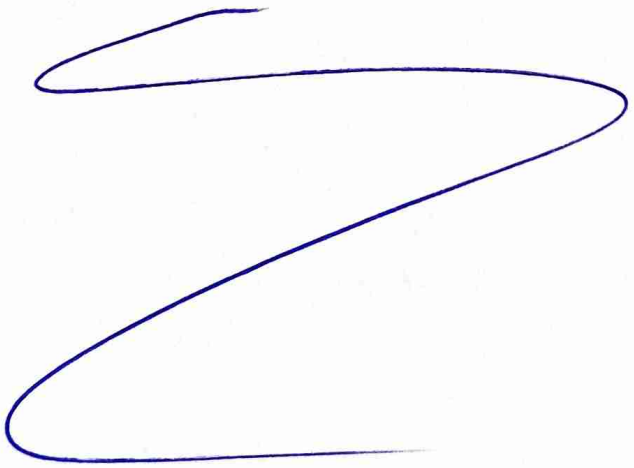
4. (a) $-1 \leq x < 4$

$\Rightarrow x \in [-1, 4)$

(B) $x \leq -2$ ni $x > 3$

$x \in (-\infty, -2] \cup (3, +\infty)$

(A) $x > 1 \Rightarrow x \in (1, +\infty)$



5. ⓐ $A = \overset{+}{|x+2|} + \overset{-}{|x-3|} = x+2-x+3 = \underline{\underline{5}}$

- $-2 < x < 1 \Rightarrow 0 < x+2 < 3$
- $-2 < x < 1 \Rightarrow -5 < x-3 < -2$

ⓑ $B = \overset{-}{|x-2|} - \overset{+}{|x+4|} = -x+2-(x+4) = \underline{\underline{-2x-2}}$

- $-2 < x < 1 \Rightarrow -4 < x-2 < -1$
- $-2 < x < 1 \Rightarrow 2 < x+4 < 5$

6. ⓐ $A = \overset{-}{|\alpha-\beta|} + \overset{-}{|\beta-\gamma|} - \overset{-}{|\alpha-\gamma|} = -\alpha+\beta-\beta+\gamma-(-\alpha+\gamma)$

$= -\alpha+\gamma+\alpha-\gamma$

$= 0.$

- $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha-\beta < 0$
- $\beta < \gamma \Rightarrow \beta-\gamma < 0$
- $\alpha < \gamma \Rightarrow \alpha-\gamma < 0$

ⓑ $B = \overset{-}{|\alpha-\gamma|} + \overset{+}{|\gamma-\beta|} = -\alpha+\gamma+\gamma-\beta =$

$= 2\gamma-\alpha-\beta.$

- $\alpha < \gamma \Rightarrow \alpha-\gamma < 0$
- $\beta < \gamma \Rightarrow \gamma-\beta > 0$

SOS

1. Αλλαγη φορα σε ανισοτητα

οταν

1. $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$ α, β αρνητικα
2. $\alpha < \beta \Rightarrow -\alpha > -\beta$
3. $\alpha < \beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

2. $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

$(\alpha+\beta-\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+(-\gamma)^2+2\alpha\beta+2\beta(-\gamma)$

$+2\alpha(-\gamma)$.

3. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

4. $(-a+b)^2=(b-a)^2=b^2-2ab+a^2$

$(-a-b)^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

5. $1\le x\le 2 \longrightarrow x\in[1,2]$

$1<x<2 \longrightarrow x\in(1,2)$

$1\le x<2 \longrightarrow x\in[1,2)$

$x\le 1 \longrightarrow x\in(-\infty,1]$

$x<1 \longrightarrow x\in(-\infty,1)$

$x\ge 2 \longrightarrow x\in[2,+\infty)$

$x>2 \longrightarrow x\in(2,+\infty)$.

$x \leq 1$ и $x \geq 4 \longrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

6. $|a| \cdot |\beta| = |a\beta|$

Доведіть

$(|a||\beta|)^2 = |a\beta|^2$

$|a|^2 |\beta|^2 = (a\beta)^2$

$a^2 \beta^2 = a^2 \beta^2$ ✓

7. $|a+\beta| \leq |a| + |\beta|$

Доведіть

$|a+\beta|^2 \leq (|a| + |\beta|)^2$

$(a+\beta)^2 \leq |a|^2 + 2|a||\beta| + |\beta|^2$

$a^2 + 2a\beta + \beta^2 \leq a^2 + 2|a\beta| + \beta^2$

$2a\beta \leq 2|a\beta| \longrightarrow |a\beta| \geq a\beta$ ✓