Προετοιμασία

για το

διαγωνισμα

του

φροντιστηριου.

Θεωρία Μαθηματικών Προσανατολισμού

Ερωτήσεις - Απαντήσεις

Επιλεγμένες ενότητες: 1.1, 1.3, 1.6, 1.7, 1.10-1.15, 1.18, 1.21-1.24, 1.26, 2.3, 2.5, 3.4

1.1 - Συνάρτηση

Ερώτηση: Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;
Απάντηση: Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.
Πεδίο ορισμού:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Σύνολο τιμών:

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

1.3 - Ισότητα συναρτήσεων

Ερώτηση: Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
Απάντηση: Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

i. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $A_f = A_g = A$ και
ii. $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

1.6 - Γνησίως αύξουσα συνάρτηση

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

1.7 - Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

1.10 - Γνησίως μονότονη συνάρτηση

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.

1.11 - Ακρότατα συνάρτησης - ολικό μέγιστο

Ερώτηση: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;
Απάντηση: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in A.$$

1.12 - Ακρότατα συνάρτησης - ολικό ελάχιστο

Ερώτηση: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$;
Απάντηση: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in A.$$

1.13 - Συνάρτηση 1-1

Ερώτηση: Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$;
Απάντηση: Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

1.14 - Αντίστροφη συνάρτηση

Ερώτηση: Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

i. Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται;

ii. Με την προϋπόθεση ότι η f αντιστρέφεται, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

Απάντηση:

i. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται όταν είναι $1-1$ στο A.

ii. Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με f^{-1}, τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f και με την οποία κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Δηλαδή:

$$f^{-1} : f(A) \to A, \qquad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

1.15 - Κριτήριο παρεμβολής

Ερώτηση: Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.
Απάντηση: Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

1.18 - Συνέχεια σε σημείο

Ερώτηση: Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;
Απάντηση: Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

1.21 - Συνέχεια σε κλειστό διάστημα

Ερώτηση: Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;
Απάντηση: Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta).$$

1.22 - Θεώρημα Bolzano

Ερώτηση: Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.
Απάντηση: Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0.$$

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (α, β).

1.23 - Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Bolzano

Ερώτηση: Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Bolzano.
Απάντηση: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

1.24 - Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Ερώτηση: Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
Απάντηση: Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε

$$f(x_0) = \eta.$$

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (α, β).

1.26 - Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής

Ερώτηση: Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.
Απάντηση: Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.
Δηλαδή, υπάρχουν δύο, τουλάχιστον, σημεία x_1 και x_2 του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\min f(x) = m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M = \max f(x), \qquad \forall x \in [\alpha,\beta].$$

2.3 - Αντιπαράδειγμα

Ερώτηση: Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι $1-1$ είναι και γνησίως μονότονη.

α'. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β'. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α'. Ψευδής.

β'. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

η οποία είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, η g είναι $1-1$ αφού κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_g το πολύ σ' ένα σημείο, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη, αφού είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$.

Σημείωση: στο αρχικό αρχείο εμφανίζεται στο σημείο αυτό η αναφορά f/C_f· εδώ αποδίδεται ως g/C_g, σύμφωνα με τη συνάρτηση που μόλις ορίστηκε.

2.5 - Αντιπαράδειγμα

Ερώτηση: Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = -\infty,$$

τότε

$$\lim_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big) = 0.$$

α'. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

β'. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α'. Ψευδής.

β'. Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{και} \qquad g(x) = 1 - \frac{1}{x}, \qquad x > 0,$$

τότε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty,$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x}\right)=1.$$

3.4 - Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών - Απόδειξη

Ερώτηση: Να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.
Απάντηση: Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε

$$f(x_0)=\eta.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$, οπότε

$$f(\alpha)<\eta<f(\beta).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-\eta,$$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον,

$$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0 \qquad \text{και} \qquad g(\beta)=f(\beta)-\eta>0,$$

οπότε

$$g(\alpha)g(\beta)<0.$$

Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, συνεπώς υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$g(x_0)=0,$$

δηλαδή

$$f(x_0)=\eta.$$

□

Φορές που έχει «πέσει»	Σωστά - Λάθος 2004 - 2022 (Κανονικές και Επαναληπτικές)	Απάντηση
1	Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.	Σ
1	Η γραφική παράσταση της |f| αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x'x, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.	Σ
1	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\|x\|}$, $x\in\mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.	Σ
1	Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$.	Λ
3	Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.	Λ
1	Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά $fog \neq gof$.	Λ
2	Αν f,g είναι δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A,B αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\emptyset$.	Σ
1	Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3], τότε ορίζεται η $f\circ g$ με πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3].	Λ
2	Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.	Σ

1	Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.	Σ
1	Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.	Σ
1	Αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1}.	Σ
3	Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.	Σ
2	Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.	Σ
1	Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$	Σ
1	Αν μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y,\ y \in f(A)$	Σ
1	Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, για κάθε $x \in A$.	Λ

1	Αν μια συνάρτηση f είναι 1–1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.	Λ
1	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης -f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f	Σ
1	Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.	Λ
1	Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$	Σ
1	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$	Σ
1	Για κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0.	Λ
1	Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \right)$	Σ
1	Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.	Σ

1	Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.	Λ
1	Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0$.	Λ
3	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.	Σ
1	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$	Λ
2	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$	Σ
1	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^{2v+1}}\right)=+\infty$, για κάθε $v\in\mathbb{N}$.	Λ
1	«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=0$».	Λ
1	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right)=+\infty$	Σ

1	Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0	Λ
1	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0	Λ
5	Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.	Σ
2	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0	Σ
2	Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Σ
1	Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$.	Σ
1	Αν είναι $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$	Λ
1	Αν είναι $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$	Λ
1	Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$.	Σ
1	Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$.	Σ
1	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = -\infty$	Λ

3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$	Λ
1	Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1.$	Λ
1	Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0.$	Σ
1	Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0.$	Λ
1	Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$	Λ
1	Ισχύει ότι: $\lvert\eta\mu x\rvert\le\lvert x\rvert$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$	Σ
1	Ισχύει $\lvert\eta\mu x\rvert<\lvert x\rvert$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.	Σ
1	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.	Λ
1	Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.	Σ
1	«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι "1-1" είναι και γνησίως μονότονη.»	Λ
1	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.	Σ

3	Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.	Σ
1	Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.	Λ
2	Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.	Σ
1	Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.	Σ
3	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.	Σ
1	Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή, M, και μια ελάχιστη τιμή, m.	Σ
1	Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.	Λ
1	Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$	Σ

1	Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$	Σ
1	Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.	Σ
1	Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f.	Λ
1	Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.	Σ
1	Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.	Λ
1	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.	Σ
1	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$	Λ

Εύρεση τύπου συνάρτησης

Άσκηση 1

Εκφώνηση. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x+1) = (x+1)e^{-x}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση. Θέτουμε $x + 1 = t$, οπότε $x = t - 1$. Τότε

$$f(t) = te^{-(t-1)} = te^{1-t}.$$

Άρα

$$\boxed{f(x) = xe^{1-x}}.$$

Άσκηση 2

Εκφώνηση. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία

$$x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu\, x, \qquad \forall x \neq 0.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση. Θέτουμε $\frac{1}{x} = t$, άρα $x = \frac{1}{t}$. Για $t \neq 0$ έχουμε

$$\left(\frac{1}{t}\right)^2 f(t) = \eta\mu\left(\frac{1}{t}\right),$$

οπότε

$$f(t) = t^2\, \eta\mu\left(\frac{1}{t}\right).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0,

$$f(0) = \lim_{x\to 0} x^2\, \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right).$$

Από

$$-x^2 \leq x^2\, \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x\to 0} x^2\, \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Άρα

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x^2\, \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}}$$

Άσκηση 3

Εκφώνηση. Έστω συνεχής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και

$$e^{2x} f^2(x) - 2x^2 e^x f(x) = 2x^2 + 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση. Προσθέτουμε x^4 και στα δύο μέλη:

$$e^{2x} f^2(x) - 2x^2 e^x f(x) + x^4 = x^4 + 2x^2 + 1.$$

Άρα

$$\left(e^x f(x) - x^2\right)^2 = (x^2 + 1)^2,$$

οπότε

$$\left|e^x f(x) - x^2\right| = x^2 + 1.$$

Θέτουμε

$$h(x) = e^x f(x) - x^2.$$

Η h είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, διότι $|h(x)| = x^2 + 1 > 0$. Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή

$$h(0) = e^0 f(0) - 0 = 1 > 0,$$

έχουμε $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$e^x f(x) - x^2 = x^2 + 1$$

και επομένως

$$\boxed{f(x) = \frac{2x^2 + 1}{e^x}}.$$

Άσκηση 4

Εκφώνηση. Έστω συνεχής $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ με

$$x^2 + f^2(x) = 3x + 4, \qquad \forall x \in [-1, 4],$$

και $f(0) = -2$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση. Από τη σχέση έχουμε

$$f^2(x) = -x^2 + 3x + 4,$$

άρα

$$|f(x)| = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}.$$

Στο εσωτερικό $(-1, 4)$ ισχύει $-x^2 + 3x + 4 > 0$, οπότε η f δεν μηδενίζεται εκεί και, λόγω συνέχειας, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(0) = -2 < 0$, προκύπτει

$$-f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}.$$

Συνεπώς

$$\boxed{f(x) = -\sqrt{-x^2 + 3x + 4}}, \qquad x \in [-1, 4].$$

Ισότητα - Πράξεις - Σύνθεση συναρτήσεων

Ισότητα συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες όταν έχουν **ίδιο τύπο** και **ίδιο πεδίο ορισμού**. Δηλαδή

$$A_f = A_g \quad \text{και} \quad f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in A_f.$$

Άσκηση 1

Εκφώνηση. Δίνονται, για $x > 0$,

$$f(x) = x - \ln(e^x - 1), \qquad g(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right).$$

Να εξεταστεί αν οι f, g είναι ίσες.

Λύση. Έχουμε

$$A_f = A_g = (0, +\infty).$$

Επίσης

$$g(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) = \ln e^x - \ln(e^x - 1) = x - \ln(e^x - 1) = f(x).$$

Άρα οι δύο συναρτήσεις έχουν ίδιο πεδίο ορισμού και ίδιο τύπο, επομένως

$$\boxed{f = g}.$$

Άσκηση 2

Εκφώνηση. Δίνονται

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(x-2), \qquad A_f = (2, +\infty),$$

και

$$g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right), \qquad A_g = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty).$$

Να εξεταστεί αν οι f, g είναι ίσες.

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$A_f \neq A_g,$$

άρα οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες. Πράγματι, στο κοινό τους μέρος $(2, +\infty)$ ισχύει

$$g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x-2) = f(x),$$

όμως τα πεδία ορισμού τους είναι διαφορετικά. Επομένως

$$\boxed{f \neq g}.$$

Πράξεις συναρτήσεων

Για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x),$$

με

$$A_{f+g} = A_{f-g} = A_{f \cdot g} = A_f \cap A_g.$$

Για το πηλίκο

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

με

$$A_{f/g} = \{x \in A_f \cap A_g : \ g(x) \neq 0\}.$$

Άσκηση 3

Εκφώνηση. Δίνονται

$$f(x) = 4 - \frac{1}{x}, \quad x > 0, \qquad g(x) = \frac{1}{4-x}, \quad x < 4.$$

Να βρεθούν το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο των f, g, μαζί με τα πεδία ορισμού τους.

Λύση. Έχουμε $A_f = (0, +\infty)$ και $A_g = (-\infty, 4)$, άρα

$$A_f \cap A_g = (0, 4).$$

Επομένως

$$(f+g)(x) = 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}, \qquad A_{f+g} = (0,4),$$

$$(f-g)(x) = 4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{4-x}, \qquad A_{f-g} = (0,4),$$

$$(f \cdot g)(x) = \left(4 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{4-x}, \qquad A_{f \cdot g} = (0,4).$$

Για το πηλίκο,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{4-x}}$$

$$= \frac{4x-1}{x}(4-x) = \frac{(4x-1)(4-x)}{x}.$$

Επειδή $g(x) = \frac{1}{4-x} \neq 0$ στο πεδίο ορισμού της,

$$A_{f/g} = (0,4).$$

Σύνθεση συναρτήσεων

Για τη σύνθεση $g \circ f$ πρέπει να ισχύει

$$x \in D_f \quad \text{και} \quad f(x) \in D_g,$$

και τότε

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Αντίστοιχα, για τη σύνθεση $f \circ g$ πρέπει να ισχύει

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f,$$

και τότε

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Άσκηση 4

Εκφώνηση. Δίνονται

$$f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2\ln(x-1),$$

και

$$g : [2, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sqrt{x-2} + 1.$$

Να βρεθούν οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και τα πεδία ορισμού τους.

Λύση. Για $f \circ g$,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2\ln\left(\sqrt{x-2} + 1 - 1\right) \\ &= 2\ln\sqrt{x-2} = \ln(x-2).\end{aligned}$$

Οι συνθήκες ορισμού είναι

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f,$$

δηλαδή

$$x \geq 2 \quad \text{και} \quad \sqrt{x-2} + 1 > 1.$$

Άρα $x > 2$ και

$$\boxed{D_{f \circ g} = (2, +\infty)}.$$

Για $g \circ f$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2\ln(x-1) - 2} + 1.$$

Οι συνθήκες ορισμού είναι

$$x > 1 \quad \text{και} \quad f(x) \geq 2.$$

Άρα

$$2\ln(x-1) \geq 2 \iff \ln(x-1) \geq 1 \iff x-1 \geq e \iff x \geq e+1.$$

Επομένως

$$\boxed{D_{g\circ f} = [e+1, +\infty)}.$$

Θεώρημα Bolzano

Άσκηση 1

Εκφώνηση. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x + x^2 + 3x}{x}, & -\pi \leq x < 0, \\ e^x - x + 3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[-\pi, 1]$.

Λύση. Η f είναι συνεχής στα $[-\pi, 0)$ και $(0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Εξετάζουμε τη συνέχεια στο 0:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + x + 3 \right) = 4,$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (e^x - x + 3) = 4.$$

Επίσης $f(0) = 4$. Άρα η f είναι συνεχής στο 0 και συνεπώς στο $[-\pi, 1]$.

Τέλος,

$$f(-\pi) = \frac{\pi^2 - 3\pi}{-\pi} = 3 - \pi < 0,$$

ενώ

$$f(1) = e + 2 > 0.$$

Άρα

$$f(-\pi) f(1) < 0,$$

οπότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[-\pi, 1]$.

Άσκηση 2

Εκφώνηση. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$3x + \ln x^4 = x^2 + 4$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e)$.

Λύση. Γράφουμε την εξίσωση ως

$$3x + \ln x^4 - x^2 - 4 = 0$$

και θεωρούμε

$$f(x) = 3x + \ln x^4 - x^2 - 4.$$

Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$. Επιπλέον

$$f(1) = -2 < 0,$$

και

$$f(e) = 3e + 4 - e^2 - 4 = 3e - e^2 = e(3 - e) > 0.$$

Άρα $f(1)f(e) < 0$ και, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = 0.$$

Δηλαδή

$$\boxed{3\xi + \ln \xi^4 = \xi^2 + 4}, \qquad \xi \in (1, e).$$

Άσκηση 3

Εκφώνηση. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$\frac{x^2+1}{x-1}+\frac{e^x+1}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

Λύση. Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ των παρονομαστών και παίρνουμε

$$(x^2+1)(x-2)+(x-1)(e^x+1)=0.$$

Θεωρούμε

$$f(x)=(x^2+1)(x-2)+(x-1)(e^x+1),$$

η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$. Υπολογίζουμε

$$f(1)=-2<0, \qquad f(2)=e^2+1>0.$$

Άρα $f(1)f(2)<0$. Από Bolzano υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$, δηλαδή

$$(\xi^2+1)(\xi-2)+(\xi-1)(e^\xi+1)=0.$$

Επειδή $\xi\in(1,2)$, οι παρονομαστές δεν μηδενίζονται, οπότε

$$\boxed{\frac{\xi^2+1}{\xi-1}+\frac{e^\xi+1}{\xi-2}=0}.$$

Άσκηση 4

Εκφώνηση. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, όπου η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, -1)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$x_0\big(f(x_0) - 1\big) = \beta f(x_0) - \alpha.$$

Λύση. Η ζητούμενη σχέση ισοδυναμεί με

$$x(f(x) - 1) - \beta f(x) + \alpha = 0.$$

Θεωρούμε

$$g(x) = x(f(x) - 1) - \beta f(x) + \alpha.$$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή $f(\alpha) = -1$,

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \alpha(f(\alpha) - 1) - \beta f(\alpha) + \alpha \\ &= f(\alpha)(\alpha - \beta) \\ &= -(\alpha - \beta) = \beta - \alpha > 0. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} g(\beta) &= \beta(f(\beta) - 1) - \beta f(\beta) + \alpha \\ &= \alpha - \beta < 0. \end{aligned}$$

Άρα $g(\alpha)g(\beta) < 0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $g(x_0) = 0$. Επομένως

$$\boxed{x_0(f(x_0) - 1) = \beta f(x_0) - \alpha}.$$

Άσκηση 5

Εκφώνηση. Δίνονται

$$f(x) = 3x - e^x, \qquad g(x) = x^2 - 4.$$

a) Να δειχθεί ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(0,1)$.

b) Να δειχθεί ότι οι C_f και C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(-1,0)$.

Λύση. α) Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Έχουμε

$$f(0) = -1 < 0, \qquad f(1) = 3 - e > 0.$$

Άρα, από Bolzano, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = 0.$$

Επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη $\xi \in (0,1)$.

β) Τα κοινά σημεία των C_f, C_g προκύπτουν από την εξίσωση

$$f(x) = g(x) \iff 3x - e^x = x^2 - 4 \iff 3x - e^x - x^2 + 4 = 0.$$

Θεωρούμε

$$\varphi(x) = 3x - e^x - x^2 + 4,$$

η οποία είναι συνεχής στο $[-1,0]$. Έχουμε

$$\varphi(-1) = -3 - e^{-1} - 1 + 4 = -\frac{1}{e} < 0,$$

και

$$\varphi(0) = -1 + 4 = 3 > 0.$$

Άρα, από Bolzano, υπάρχει $\xi \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi) = 0$. Συνεπώς

$$\boxed{f(\xi) = g(\xi)}.$$

Άσκηση 7

Εκφώνηση. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$e^x = 3 - 2x$$

έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

Λύση. Θεωρούμε

$$f(x) = e^x - 3 + 2x.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Έχουμε

$$f(0) = -2 < 0, \qquad f(1) = e - 1 > 0.$$

Άρα, από Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον μία $\xi \in (0, 1)$ με $f(\xi) = 0$.
Επιπλέον

$$f'(x) = e^x + 2 > 0,$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως έχει το πολύ μία ρίζα. Συνεπώς η ρίζα είναι μοναδική.

Άσκηση 9

Εκφώνηση. Έστω συνεχής $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$-1 < f(x) < 0, \qquad \forall x \in [0,1].$$

Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0.$$

Λύση. Η ζητούμενη σχέση ισοδυναμεί με

$$f^2(x) - 2f(x) - 3x = 0.$$

Θεωρούμε

$$g(x) = f^2(x) - 2f(x) - 3x,$$

η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$. Στο $x = 0$,

$$g(0) = f^2(0) - 2f(0) = f(0)(f(0) - 2) > 0,$$

επειδή $-1 < f(0) < 0$ και άρα $f(0) - 2 < 0$.

Στο $x = 1$,

$$g(1) = f^2(1) - 2f(1) - 3 = (f(1) - 3)(f(1) + 1) < 0,$$

διότι $f(1) - 3 < 0$ και $f(1) + 1 > 0$.

Άρα $g(0)g(1) < 0$. Από Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ με $g(x_0) = 0$. Επομένως

$$\boxed{f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0}.$$

Άσκηση 13

Εκφώνηση. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$\ln x = x^2 - 4x + 2$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

Λύση. Θεωρούμε

$$f(x) = \ln x - x^2 + 4x - 2, \qquad x > 0.$$

Η $f(0)$ δεν ορίζεται, αλλά

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Άρα υπάρχει $\alpha > 0$, αρκετά κοντά στο 0, τέτοιο ώστε

$$f(\alpha) < 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, 1]$ και

$$f(1) = 0 - 1 + 4 - 2 = 1 > 0.$$

Επομένως $f(\alpha)f(1) < 0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\alpha, 1) \subset (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = 0.$$

Δηλαδή

$$\boxed{\ln \xi = \xi^2 - 4\xi + 2}, \qquad \xi \in (0,1).$$

Επιλεγμένες ασκήσεις συναρτήσεων

Άσκηση 1 - Άσκηση 3 - Άσκηση 5 - Τυπολόγιο

Άσκηση 1

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - x^2}{x - 2} = -1.$$

Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x) - x^2}{x - 2}, \qquad x \neq 2.$$

Από την υπόθεση,

$$\lim_{x \to 2} g(x) = -1.$$

Για $x \neq 2$ ισχύει

$$f(x) = g(x)(x - 2) + x^2.$$

Άρα

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \left(\lim_{x \to 2} g(x)\right) \left(\lim_{x \to 2}(x - 2)\right) + \lim_{x \to 2} x^2 = (-1) \cdot 0 + 4 = 4.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 2,

$$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 4 > 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν μηδενίζεται. Επομένως δεν μπορεί να αλλάζει πρόσημο, διότι διαφορετικά, από το θεώρημα Bolzano, θα υπήρχε σημείο στο οποίο $f(x) = 0$. Αφού $f(2) > 0$, καταλήγουμε ότι

$$\boxed{f(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3 - \sqrt{x+1}.$$

Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και, στη συνέχεια, το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$f(x) = \ln k,$$

ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου $k > 0$.

Λύση.

Από $x + 1 \geq 0$ έχουμε

$$D_f = [-1, +\infty).$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f. Πράγματι, αν $x_1 < x_2$, τότε

$$x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x_1+1} < \sqrt{x_2+1} \Rightarrow -\sqrt{x_1+1} > -\sqrt{x_2+1}$$

και επομένως

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Επιπλέον,

$$f(-1) = 3, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Άρα

$$\boxed{\Sigma\Tau_f = (-\infty, 3]}.$$

Για την εξίσωση $f(x) = \ln k$ διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\ln k > 3$, δηλαδή $k > e^3$, τότε $\ln k \notin \Sigma\Tau_f$ και η εξίσωση δεν έχει ρίζα.
- Αν $\ln k \leq 3$, δηλαδή $0 < k \leq e^3$, τότε $\ln k \in \Sigma\Tau_f$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.

$0 < k \leq e^3$	μία ρίζα
$k > e^3$	καμία ρίζα

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1, & x \leq 0, \\ \text{συν}\, x - x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

a) Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής στο $[-1, \pi]$.
b) Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x}.$$
c) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
d) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες.
e) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right)$ τέτοιο ώστε
$$7f(\xi) = 4f\left(\frac{1}{6}\right) + 3f\left(\frac{1}{7}\right).$$
f) Να λυθεί η ανίσωση
$$f\big(1 - f(x)\big) - f\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

α) Εφαρμογή Θ.Μ.Ε.Τ.

Η f είναι συνεχής στα $[-1, 0]$ και $(0, \pi]$ ως πολυωνυμική και ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων αντίστοιχα. Στο 0 έχουμε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^3 + 2x + 1) = 1$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\text{συν}\, x - x) = 1.$$

Επίσης $f(0) = 1$. Άρα

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1,$$

οπότε η f είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$. Επομένως, ως συνεχής σε κλειστό διάστημα, ικανοποιεί το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής στο $[-1, \pi]$.

β) Υπολογισμός ορίου

Για $x \to 0^-$,

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{x^3 + 2x + 1 - 1}{x} = x^2 + 2 \longrightarrow 2.$$

Για $x \to 0^+$,

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{\text{συν}\, x - x - 1}{x} = \frac{\text{συν}\, x - 1}{x} - 1 \longrightarrow -1,$$

αφού

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{συν}\, x - 1}{x} = 0.$$

Τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, επομένως

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} \text{ δεν υπάρχει.}}$$

γ) Σύνολο τιμών

Για $x \le 0$, η συνάρτηση $f_1(x) = x^3 + 2x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, αν $x_1 < x_2$, τότε

$$x_1^3 < x_2^3, \qquad 2x_1 < 2x_2$$

και άρα $f_1(x_1) < f_1(x_2)$. Επίσης

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty, \qquad f_1(0) = 1.$$

Άρα

$$\Sigma\mathrm{T}_{f_1} = (-\infty, 1].$$

Για $0 < x \le \pi$, η συνάρτηση $f_2(x) = \sigma\upsilon\nu\, x - x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Αν $0 < x_1 < x_2 \le \pi$, τότε

$$\sigma\upsilon\nu\, x_1 > \sigma\upsilon\nu\, x_2 \qquad \text{και} \qquad -x_1 > -x_2,$$

οπότε $f_2(x_1) > f_2(x_2)$. Επιπλέον,

$$\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = 1, \qquad f_2(\pi) = -1 - \pi.$$

Άρα

$$\Sigma\mathrm{T}_{f_2} = [-1-\pi, 1).$$

Συνεπώς

$$\boxed{\Sigma\mathrm{T}_f = (-\infty, 1]}.$$

δ) Οι ρίζες της $f(x) = 0$

Στο $(-\infty, 0]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, με

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad f(0) = 1 > 0.$$

Άρα υπάρχει μοναδική ρίζα $x_1 < 0$.

Στο $(0, \pi]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 > 0, \qquad f(\pi) = -1 - \pi < 0.$$

Άρα υπάρχει μοναδική ρίζα $x_2 \in (0, \pi)$. Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες και είναι ετερόσημες.

ε) Ύπαρξη του ξ

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right]$. Από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad x \in \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right].$$

Ειδικότερα,

$$m \leq f\left(\frac{1}{7}\right) \leq M \quad \text{και} \quad m \leq f\left(\frac{1}{6}\right) \leq M.$$

Πολλαπλασιάζοντας με 3 και 4 αντίστοιχα και προσθέτοντας,

$$7m \leq 3f\left(\frac{1}{7}\right) + 4f\left(\frac{1}{6}\right) \leq 7M.$$

Άρα

$$m \leq \frac{3f\left(\frac{1}{7}\right) + 4f\left(\frac{1}{6}\right)}{7} \leq M.$$

Ο αριθμός στο μέσο ανήκει στο σύνολο τιμών της f στο παραπάνω διάστημα. Επομένως, από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right)$$

τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{7}\right) + 4f\left(\frac{1}{6}\right)}{7},$$

δηλαδή

$$\boxed{7f(\xi) = 4f\left(\frac{1}{6}\right) + 3f\left(\frac{1}{7}\right)}.$$

στ) Τροποποιημένο τελευταίο ερώτημα

Θέλουμε

$$f\big(1 - f(x)\big) < f\left(x + \frac{1}{2}\right), \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε

$$f(x) = \text{συν}\, x - x$$

και

$$0 < 1 - f(x) = 1 - \text{συν}\, x + x < \pi, \qquad 0 < x + \frac{1}{2} < \pi.$$

Στο $(0, \pi]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$$f\big(1 - f(x)\big) < f\left(x + \frac{1}{2}\right) \iff 1 - f(x) > x + \frac{1}{2}.$$

Επομένως

$$1 - (\text{συν}\, x - x) > x + \frac{1}{2} \iff 1 - \text{συν}\, x > \frac{1}{2} \iff \text{συν}\, x < \frac{1}{2}.$$

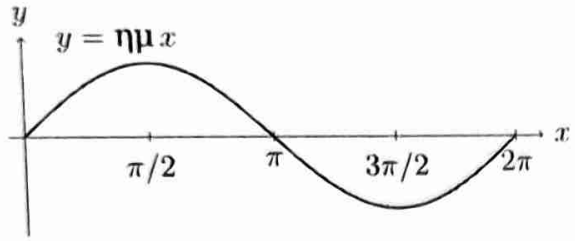
Στο $(0, \frac{\pi}{2}]$ η συνx είναι γνησίως φθίνουσα και συν$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, άρα

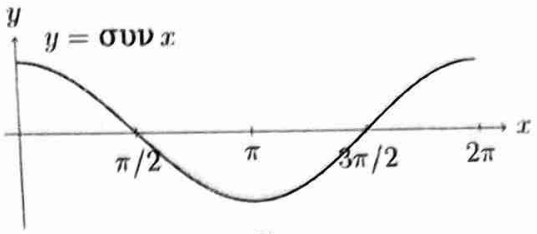
$$\text{συν}\, x < \frac{1}{2} \iff x > \frac{\pi}{3}.$$

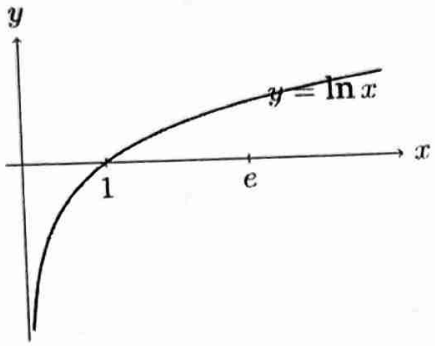
Συνεπώς

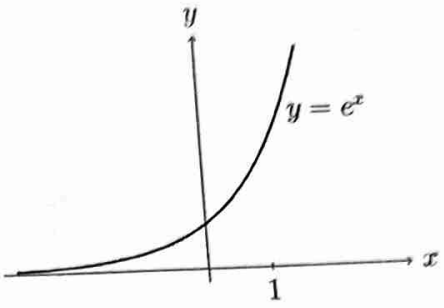
$$\boxed{x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]}.$$

Τυπολόγιο









Βασικές τιμές και όρια για $\ln x$:

$$\ln e = 1, \qquad \ln 1 = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Βασικές τιμές και όρια για e^x:

$$e^0 = 1, \qquad e^1 = e,$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

Χρήσιμες σχηματικές μορφές ορίων (με θετικά πρόσημα):

$$\frac{0}{+\infty} = 0, \qquad \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$

Μεγάλη Προσοχή

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x + \eta\mu x \leq x f(x) \leq 2x^2 + x + \eta\mu x$$

1. Βρες $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Αν $x < 0$

$$\frac{x + \eta\mu x}{x} \geq f(x) \geq \frac{2x^2 + x + \eta\mu x}{x}$$

$$1 + \frac{\eta\mu x}{x} \geq f(x) \geq 2x + 1 + \frac{\eta\mu x}{x}$$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(1 + \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 2$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(2x + 1 + \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 2$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2.$$

Av $x > 0$

$$1 + \frac{\ln x}{x} \leq f(x) \leq 2x + 1 + \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} 1 + \frac{\ln x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} 2x + 1 + \frac{\ln x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 .$$

Apa $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

Εφαρμογή

Αν ήταν αλλιώς η ανισοσύτα.

$$\eta\mu x \le x f(x+1) \le x$$

ψάχνω $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Θέτω $x+1 = t$

$x = t-1$

$$\eta\mu(t-1) \le (t-1) f(t) \le t-1$$

ή $\eta\mu(x-1) \le (x-1) f(x) \le x-1$

$x > 1$

$$\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \le f(x) \le \frac{x-1}{x-1}$$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \overset{\substack{x-1=t \\ x\to 1 \\ t\to 0}}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\eta\mu t}{t} = 1$

- $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Σύνολο Τιμών

1. $D_f = \mathbb{R}$, $f \nearrow$ $\quad \Sigma T_f = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right)$

2. $D_f = \mathbb{R}$, $f \searrow$ $\quad \Sigma T_f = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \right)$.

3. $D_f = (1, 2)$ $f \nearrow$ $\quad \Sigma T_f = \left(\lim\limits_{x \to 1^+} f(x), \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \right)$

4. $D_f = (1, 2)$ $f \searrow$ $\quad \Sigma T_f = \left(\lim\limits_{x \to 2} f(x), \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \right)$.

5. $D_f = [1, 2)$ $f \nearrow$ $\quad \Sigma T_f = \left[f(1), \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \right)$

6. $D_f = (-\infty, 1)$ $f \searrow$ $\quad \Sigma T_f = \left(\lim\limits_{x \to 1^-} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \right)$,

Έστω $f \downarrow$ και $g(x) = f(1-e^x)$

Μονοτονία $g(x)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2}$

$$1 - e^{x_1} > 1 - e^{x_2}$$

$$f(1-e^{x_1}) < f(1-e^{x_2})$$

$$g(x_1) < g(x_2)$$

$g \nearrow$