Ανεβάζουμε επίπεδο

Άσκηση 1

(α) Νδο $a^2+a+1>0$

$$2a^2+2a+2>0$$

$$a^2+\underbrace{a^2+2a+1}+1>0$$

$$a^2+(a+1)^2+1>0$$ ✓

(β) Νδο $a^2+\frac{1}{a^2} \geq a+\frac{1}{a}$, $a\neq 0$.

$$a^4+1 \geq a^3+a$$

$$\underbrace{a^4+1-a^3-a} \geq 0$$

$$a^3(a-1)-(a-1) \geq 0$$

$$(a-1)(a^3-1) \geq 0$$

$$(a-1)(a-1)(a^2+a+1) \geq 0 \Rightarrow (a-1)^2(a^2+a+1) \geq 0$$

Άσκηση 2

Αν $x < y < 0$

(α) Συγκρίνε $(x-2y)^2$ και $y(4y-3x)$

Έστω $(x-2y)^2 < y(4y-3x)$

$x^2 - 4xy + 4y^2 < 4y^2 - 3xy$

$x^2 - xy < 0$

$x(x-y) < 0$

- $x < y \Rightarrow x - y < 0$
- $x < 0$

Άρα $(x-2y)^2 > y(4y-3x)$.

(B) Σύγκριση $\frac{x}{x-2}$ και $\frac{y}{y-2}$

Θέτω $\frac{x}{x-2} < \frac{y}{y-2}$

Θυμίζω $x < y < 0$

$$\frac{x(y-2)}{x-2} > y$$

$$x(y-2) < y(x-2)$$

$$xy - 2x < yx - 2y$$

$$2y - 2x < 0$$

$$y - x < 0$$

$$y < x$$

Άτοπο!

Άρα $\frac{x}{x-2} > \frac{y}{y-2}$.

Άσκηση 3

(α) Νδο $a^2+\beta^2 \geq 2a\beta$

$a^2 - 2a\beta + \beta^2 \geq 0$

$(a-\beta)^2 \geq 0$ ✓

(β) Νδο αν $x, y, w > 0$ τότε

$(x^2+1)(y^2+4)(w^2+9) \geq 48xyw.$

- $x^2+1^2 \geq 2 \cdot x \cdot 1$
- $y^2+2^2 \geq 2 \cdot y \cdot 2$
- $w^2+3^2 \geq 2 \cdot w \cdot 3$

} (1)

$(x^2+1)(y^2+4)(w^2+9) \geq 2x \cdot 4y \cdot 6w$

$(x^2+1)(y^2+4)(w^2+9) \geq 48xyw.$

Άσκηση 4

(α) Αν $x, y > 0$ τότε $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

$x^2 + y^2 \geq 2xy$

$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$(x-y)^2 \geq 0$ ✓

(β) Να δειχθεί ότι $\alpha, \beta, \gamma > 0$ τότε

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} \geq 6$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \geq 6$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} \geq 6$$

- $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} \geq 2$
- $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \geq 2$
- $\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} \geq 2$

$+$ ✓

Άσκηση 5

(α) Νδο $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$

$$2x^2+2y^2 \geq x^2+2xy+y^2$$

$$x^2-2xy+y^2 \geq 0$$

$$(x-y)^2 \geq 0.$$

(β) Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha+\beta=1$

i) Νδο $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \geq 4$

$\beta = 1-\alpha$

$$\beta+\alpha \geq 4\alpha\beta$$

$$1 \geq 4\alpha\beta$$

$$1 \geq 4\alpha(1-\alpha)$$

$$1 \geq 4\alpha-4\alpha^2$$

$$4\alpha^2-4\alpha+1 \geq 0$$

$$(2\alpha-1)^2 \geq 0$$ ✓

11/ Vdo $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

$$\boxed{x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2}$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

- $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \geq 4$

$$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \geq 5$$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq 25$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Άσκηση 6

Αν $\alpha+\beta=8 \Rightarrow \underline{\alpha=8-\beta}$

(α) Νδο $\alpha\beta \le 16$

$(8-\beta)\beta \le 16$

$8\beta-\beta^2 \le 16$

$0 \le \beta^2-8\beta+16$

$0 \le (\beta-4)^2$

(β) Νδο $\alpha\beta \le 8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) \quad \forall x \neq 0$.

Αν δώσω ότι $16 \le 8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

Τότε $\alpha\beta \le 16 \le 8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$\Rightarrow \alpha\beta \le 8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$$16 \le 8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$2 \le x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$2x^2 \le x^4+1 \Rightarrow 0 \le x^4-2x^2+1$$

$$0 \le (x^2-1)^2$$

✓

(β) Νδο $\alpha^2+\beta^2 \ge \frac{32}{x^2+1}$

Γνωρίζω ότι $8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) \ge \alpha\beta \quad \forall x$

$$8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) \ge 16 \ge \alpha\beta$$

$$8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) \ge \alpha\beta$$ ✓

Ασκήσεις στις Ανισότητες

Να αιτιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Άσκηση 1

Αν $\alpha + \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha + \beta)$

β) $\dfrac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^3$

Άσκηση 2

Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει:

α) $\alpha^2 + \beta^2 + 20 \leq 4(2\beta - \alpha)$

β) $2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \leq 2\alpha(3 - \beta)$

Άσκηση 3

Αν $\alpha < \beta < \gamma$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\alpha\beta + \beta\gamma$ και $\beta^2 + \alpha\gamma$

β) $\alpha\beta + \alpha\gamma$ και $\alpha^2 + \beta\gamma$

Άσκηση 4

Αν $-2 < \alpha < -1$ και $-4 < \beta < -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $4\alpha - 2\beta + 1$

β) $2 - 3\alpha\beta$

γ) $2\alpha^2 + \beta^2$

δ) $\beta^2 - \alpha^3$

ε) $(\alpha + 2)^2 - 2\beta$

στ) $1 - \dfrac{\alpha}{\beta}$

Άσκηση 5

α) Να αποδείξετε ότι $4\alpha^2 + 2\alpha + 1 > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι

$$4\alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq \frac{12\alpha^2}{4\alpha^2 + 2\alpha + 1}$$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Άσκηση 6

Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

β) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

Άσκηση 7

α) Για κάθε $\alpha > 0$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2.$$

β) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} \geq 2.$$

Άσκηση 8

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

β) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \geq \alpha + \beta + \gamma$

γ) $8(\alpha^4 + \beta^4) \geq (\alpha + \beta)^4$