Άσκηση 1

Δίνεται $f(x) = e^x + x^3 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) $f'(x) = e^x + 3x^2 > 0$ $\quad f \nearrow$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ &\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{aligned}\right\} \Sigma T_f = \mathbb{R}.$$

(β) $e^x = 1 - x^3$

$e^x + x^3 - 1 = 0$

$f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(0)$

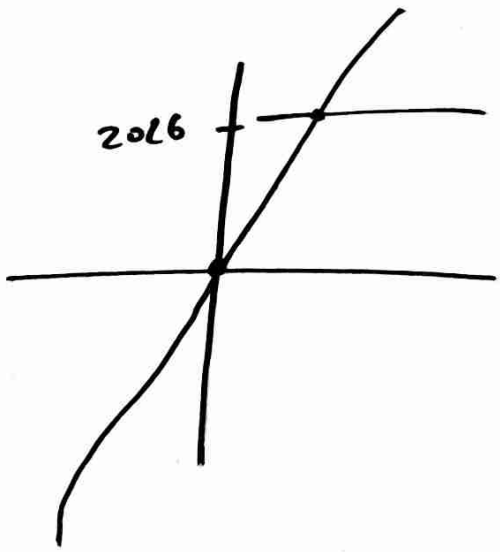
f 1-1

$\underline{x = 0}$

(γ) $e^x + x^3 = 2027$

$e^x + x^3 - 1 = 2026$

$f(x) = 2026$



- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = \mathbb{R}$

Το $2026 \in \Sigma T_f$ άρα $\exists! \xi$ τω $f(\xi) = 2026$

(δ) $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$y - 0 = 1(x-0)$

$y = x$

extra ερωτημα

Να βρεθει το οριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{f(x) - x}$$

$$\to \lim_{x \to 0^+} \ln x \, \frac{1}{f(x)-x} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

κυρτοτητα $f(x)$

$f'(x) = e^x + 3x^2$

$f''(x) = e^x + 6x > 0 \quad \forall x > 0$

f κυρτη $\forall x > 0$

$f(x) > x \Rightarrow f(x) - x > 0$

Ασκηση 2

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

(α) Συνολο Τιμων

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

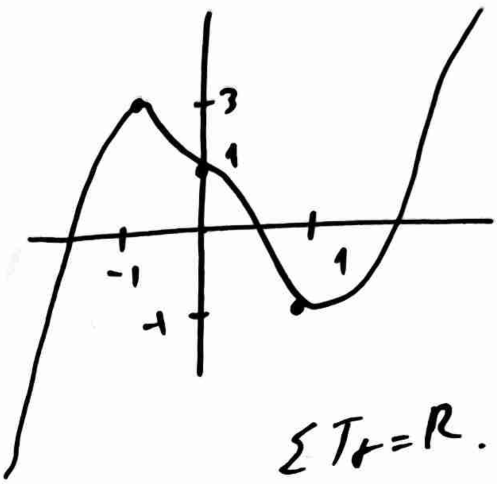
x		-1		1	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(-1) = 3$

$f(1) = -1$



$ΣΤ_f = \mathbb{R}$.

(β) $x < -1$

- f συνεχης
- $f \nearrow$
- $ΣΤ_f = (-\infty, 3)$

Το $0 \in ΣΤ_f$

αρα $\exists!\ \xi_1 < 0$

τ.ω $f(\xi_1) = 0$

$-1 \leq x \leq 1$

- f συνεχης
- $f \searrow$
- $ΣΤ_f = [-1, 3]$

Το $0 \in ΣΤ_f$

αρα $\exists!\ \xi_2$ τ.ω

$f(\xi_2) = 0$

Εστω $\xi_2 < 0 \Rightarrow f(\xi_2) > f(0)$

$0 > 1$ Ατοπο!

$x > 1$

- f συνεχης
- $f \nearrow$
- $ΣΤ_f = [-1, +\infty)$

Το $0 \in ΣΤ_f$

αρα $\exists!\ \xi_3$

τ.ω

$f(\xi_3) = 0$

(γ) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

x		0	
f''	$-$		$+$
f	$\cap$		$\cup$

$y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$y - 1 = -3(x-0)$

$\boxed{y = -3x + 1}$

(δ) $y - f(2) = f'(2)(x-2)$

$y - 3 = 9(x-2)$

$y = 9x - 15$

Αφού f κυρτή $\forall x \geq 2$ $\quad f(x) \geq 9x - 15$

(ε) $e < \pi$

$f\uparrow$ εκεί

$f(e) < f(\pi)$

$e^3 - 3e + 1 < \pi^3 - 3\pi + 1$

$e^3 - 3e < \pi^3 - 3\pi$

$e^3 - \pi^3 < 3e - 3\pi$

$\cancel{(e-\pi)}(e^2 + e\pi + \pi^2) < 3\cancel{(e-\pi)}$

$e^2 + e\pi + \pi^2 > 3$

26. $f(x)=e^x \qquad f'(x)=e^x$

Ενότητα 27

$g(x)=2\sqrt{x} \qquad g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{cases} f'(a)=g'(\beta) \\ f(a)-a f'(a) = g(\beta)-\beta g'(\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^a = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow \sqrt{\beta}=\frac{1}{e^a} \Rightarrow \sqrt{\beta}=e^{-a} \\ e^a - a e^a = 2\sqrt{\beta} - \beta \frac{1}{\sqrt{\beta}} \end{cases}$$

$\beta = e^{-2a}$

$$e^a - a e^a = 2\cdot e^{-a} - e^{-2a}\cdot e^a$$

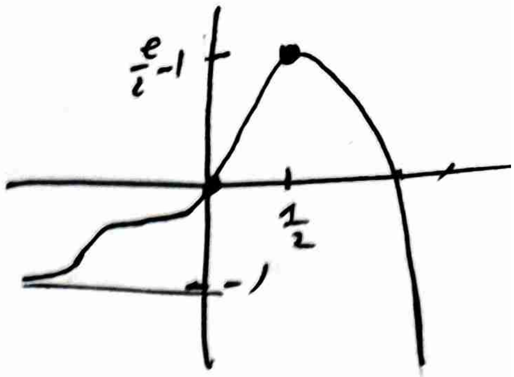
$$e^a - a e^a = 2e^{-a} - e^{-a}$$

$$e^a - a e^a = e^{-a}$$

$$e^{2a} - a e^{2a} = 1$$

$$e^{2a}(1-a) - 1 = 0$$

$$h(x) = e^{2x}(1-x) - 1$$



$$h'(x) = 2e^{2x}(1-x) - e^{2x}$$

$$h'(x) = e^{2x}\left(2(1-x) - 1\right)$$

$$h'(x) = e^{2x}(1-2x)$$

$\rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow 1 = 2x$

$$x = \frac{1}{2}$$

x		$1/2$	
h'	$+$		$-$
h	-1 $\nearrow$	$\frac{e}{2}-1$	$\searrow$ $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x}(1-x) - 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{e^{-2x}} - 1 =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-2e^{-2x}} - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$h\left(\tfrac{1}{2}\right) = e^{2\frac{1}{2}}\left(1-\tfrac{1}{2}\right) - 1 = e\cdot\tfrac{1}{2} - 1 = \tfrac{e}{2} - 1 > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}(1-x) = -\infty$$

$x < \frac{1}{2}$

- h συνεχ.
- h $\uparrow$
- $\Sigma T_h = \left(-1, \frac{e}{2} - 1\right)$

Το $0 \in \Sigma T_h$

άρα $\exists!\ \xi_1$ τ.ω

$h(\xi_1) = 0$

$x \geq \frac{1}{2}$

- h συνεχ.
- h $\downarrow$
- $\Sigma T_h = \left(-\infty, \frac{e}{2} - 1\right]$

Το $0 \in \Sigma T_h$

άρα $\exists!\ \xi_2$

τ.ω $h(\xi_2) = 0$

29. $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$

(a) $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$

$$f''(x) = 2e^{x-2} - 2 = 2\left(e^{x-2} - 1\right)$$

$$\to f''(x) = 0 \Rightarrow e^{x-2} - 1 = 0$$

$$e^{x-2} = 1$$

$$x - 2 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

x		2	
f''	$-$		$+$
f'	$+\infty \searrow$	-2	$\nearrow +\infty$
f			

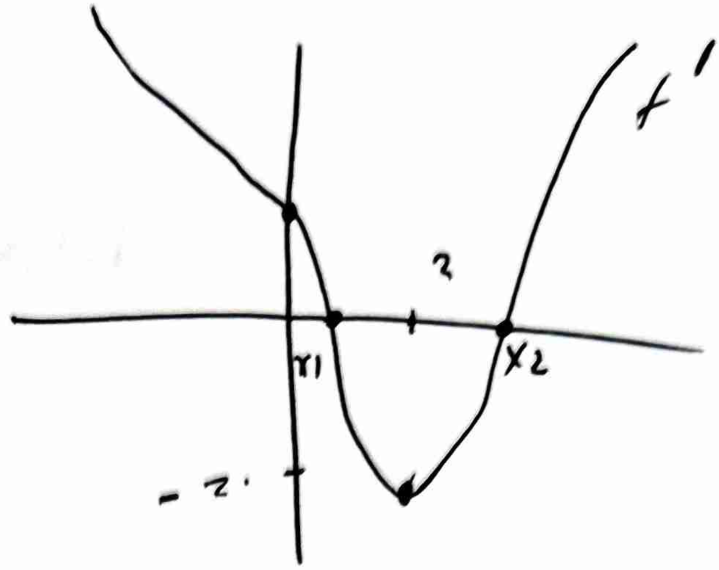
$$f'(x) \geq f'(2)$$

$$f'(x) \geq -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} 2e^{x-2} - 2x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} 2e^{x-2} - x^2 = \lim_{x\to+\infty} e^{x-2}\left(2 - \frac{x^2}{e^{x-2}}\right) = +\infty$$

$$\to \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{x-2}} = 0$$



$x<2$

- f' συνεχ
- $f' \downarrow$
- $\Sigma T_{f'} = (-2, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_{f'}$

άρα $\exists!\, x_1$ τ.ω.

$f'(x_1) = 0$

$x \geq 2$

- f' συνεχ
- $f' \nearrow$
- $\Sigma T_{f'} = [-2, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_{f'}$

άρα $\exists!\, x_2$ τ.ω.

$f'(x_2) = 0$.

x		x_1		2		x_2	
f'	$+$ $\searrow$	0	$-$ $\searrow$		$-$ $\nearrow$	0	$+$ $\nearrow$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(B) $f(x) = f(1)$

$\forall x \in (x_1, x_2)$ $f \downarrow$ $\Rightarrow$ f 1-1

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

Έστω $2 > x_1 \geq 1$

$f'(x_1) \leq f'(1)$

$0 \leq \frac{2}{e} - 2$

$2 \leq \frac{2}{e}$ Άτοπο.

άρα $x_1 < 1$

άρα το $1 \in (x_1, x_2)$

Αποδείχθηκε.

28. ⓐ $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{e^x} + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - x^2}{x^2 e^x}$$

$$\varphi(x) = e^x - x^2$$

$$\varphi'(x) = e^x - 2x$$

$$\varphi''(x) = e^x - 2$$

$\rightarrow$ $e^x - 2 = 0$

$e^x = 2$

$\underline{\underline{x = \ln 2}}$

x		0		$\ln 2$	
φ''	$-$	‖	$-$	0	$+$
φ'	$\searrow^{+}$	‖	$\searrow^{+}$	0	$\nearrow^{+}$
φ	$\nearrow$	‖	$\nearrow$		$\nearrow$
f'		‖			
f		‖			

$\varphi'(x) \geq \varphi'(\ln 2)$

$\varphi'(x) \geq$

$$\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$$
$$= 2(1 - \ln 2)$$
$$= 2(\ln e - \ln 2)$$
$$= 2\left(\ln \frac{e}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\Sigma T_\varphi = R$$

- φ συνεχ.
- $\varphi \nearrow$
- $\Sigma T_\varphi = R$

Το $0 \in \Sigma T_\varphi$ άρα $\exists!\, x_0$ τ.ω $\varphi(x_0)=0$

x		x_0	
φ	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

(i) Νδο $f(x_0) = \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0}$

$$f(x_0) = e^{-x_0} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0}$$

$$f'(x_0)=0 \Rightarrow -e^{-x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 0$$

$$e^{-x_0} = \frac{1}{x_0^2}$$

|| Βασικη Ασκηση κλαδωτη

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x \ , \ x \leq 0 \\ x^2 - 2x \ , \ x > 0 \end{cases}$$

(α) Ειναι συνεχης στο 0;

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 e^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 - 2x = 0$$

$\Big\}\ \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$f(0) = 0$ Αφου $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$ συνεχης στο 0!

(β) Ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.

Ειναι συνεχης στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ως π.σ.σ

Αφου ειναι και συνεχης στο 0 ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.

(γ) i) $f(-1) = \frac{1}{e} > 0$

$f(1) = -1 < 0$

$\Big\}\ f(-1) f(1) < 0$

f συνεχης $[-1, 1]$

Bolzano ok!

$$f(-1) = \frac{1}{e}$$

$$f(1) = -1$$

$\left.\begin{matrix} f(-1) = \frac{1}{e} \\ f(1) = -1 \end{matrix}\right\} f(-1) \neq f(1)$

ΘΕΤ ok!

f συνεχής $[-1,1]$

iii) Η f συνεχής $[-1,1]$ ΘΜΕΤ ok!

(δ) Είναι παρ/μη στο 0;

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 e^x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-2}{1} = -2$$

Η f όχι παρ/μη στο 0!

(ε) Είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$.

Ενώ είναι παρ/μη $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

ω/ π.π.σ δεν είναι παρ/μη στο 0

άρα δεν είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$.

3) i) Αφού δεν είναι παραγ/μη στο 0 δεν είναι στο $[-1,1]$ άρα δεν ισχύει ο Rolle

ii) ορισμένα ισχύει το ΘΜΤ στο $[-1,1]$.

iii) Η f συνεχής $[0,2]$ γιατί είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η παραγ/μη $(0,2)$ ως π.π.σ.

$f(0)=0$
$f(2)=0$ } Rolle ok ✓

iv) ορισμένα ΘΜΤ ok στο $[0,2]$.

(η) $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ // ΕΑΒ

$f'(\xi)=\lambda_{AB}=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}$

Αρκεί νδο $\exists\ \xi\in(0,3)$ τ.ω $f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}$

Το ΘΜΤ ικανοποιείται στο $[0,3]$

άρα $\exists\ \xi\in(0,3)$ τ.ω $f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}$

$$2\xi - 2 = \frac{3-0}{3}$$

$$2\xi - 2 = 1$$

$$2\xi = 3$$

$$\xi = \frac{3}{2} \checkmark$$

(19) Αφού f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 το 0 είναι κρίσιμο σημείο.

$x \le 0$

$$f_1(x) = x^2 e^x$$

$$f_1'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$$

$$f_1'(x) = e^x(2x + x^2)$$

$$\rightarrow 2x + x^2 = 0$$

$$x(2+x) = 0$$

$\boxed{x=0}$ Κ.Σ $\boxed{x=-2}$ Κ.Σ

$x > 0$

$$f_2(x) = x^2 - 2x$$

$$f_2'(x) = 2x - 2$$

$$\rightarrow 2x - 2 = 0$$

$\boxed{x=1}$

Κ.Σ.

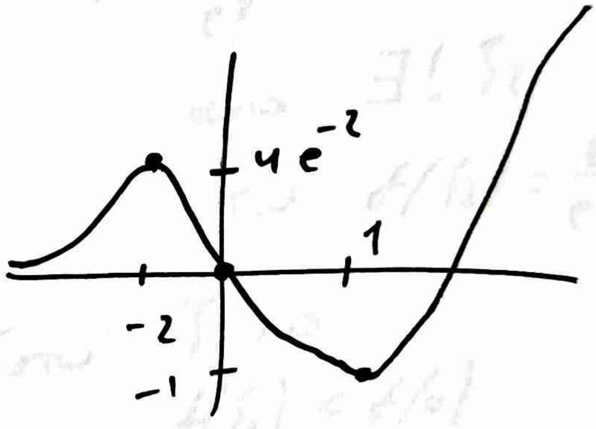
i

x		-2		0		1	
f_1'	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
f_2'					$-$	0	$+$
f'	$+$		$-$		$-$		$+$
f	0 ↗	$4e^{-2}$	↘		↘		↗

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

$$f(-2) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$$



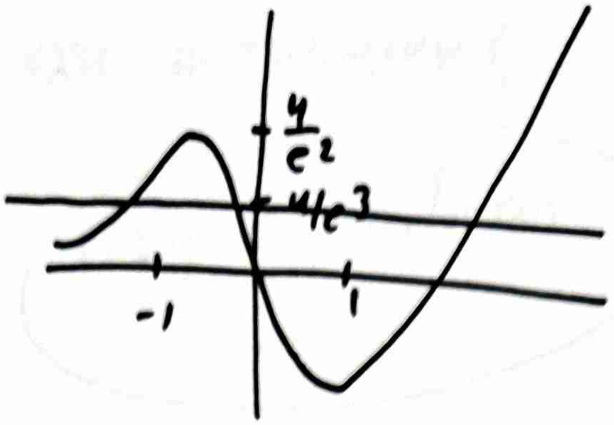
$$f(1) = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Sigma T_f = [-1, +\infty)$$

$e^3 f(x) = 4$

$f(x) = \frac{4}{e^3}$



$x < -1$

- f συνεχής
- $f \uparrow$
- $\Sigma T_f = \left(0, \frac{4}{e^2}\right)$

Το $\frac{4}{e^3} \in \Sigma T_f$.

άρα $\exists! \, \xi_1 < 0$

$f(\xi_1) = \frac{4}{e^3}$

$-1 \leq x \leq 1$

- f συνεχής
- $f \downarrow$
- $\Sigma T_f = \left[-1, \frac{4}{e^2}\right]$

Το $\frac{4}{e^3} \in \Sigma T_f$

άρα $\exists! \, \xi_2$

τ.ω $f(\xi_2) = \frac{4}{e^3}$

Έστω $\xi_2 > 0$

$f(\xi_2) < f(0)$

$\frac{4}{e^3} < 0$ Άτοπο

άρα $\xi_2 < 0$

$x > 1$

- f συνεχής
- $f \uparrow$
- $\Sigma T_f = [-1, +\infty)$

Το $\frac{4}{e^3} \in \Sigma T_f$

άρα $\exists \, \xi_3 > 0$ τ.ω $f(\xi_3) = \frac{4}{e^3}$.

(α) Αφού $D_f = \mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφη.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\varepsilon_1 : y = 0$ οριζόντια $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ δεν έχει οριζόντια στο $+\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x} = +\infty$ όχι πλάγια.

(β) i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2 - 2x}$

$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$

$-\frac{1}{x^2 - 2x} \leq \frac{\eta\mu x}{x^2 - 2x} \leq \frac{1}{x^2 - 2x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x^2 - 2x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 - 2x} = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,ημ\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{ημ\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}}_{\underline{1}}\,\frac{1}{x^2}\,f(x) = 1\cdot 1 = 1$$

$$\to \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x}{x^2} = 1$$

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x)+ημx$

$$-1 \le ημx \le 1$$

$$x^2-2x-1 \le x^2-2x+ημx \le x^2-2x+1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} x^2-2x-1 = +\infty \\ \\ \lim_{x\to+\infty} x^2-2x+1 = +\infty \end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} f(x)+ημx = +\infty$$

iv) $$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{f(x)+1}}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = -1$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)}{x-1} = 1$$

Το όριο δεν υπάρχει.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} - x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} = -1$$