15 Το Θεώρημα του Fermat.

ⓐ. Έστω $f(x) = 2\alpha \ln x - \frac{\beta}{x} + 3\alpha$

η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο 1 το 5. Βρείτε α, β.

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1

το 1 είναι εσωτερικό του $(0, +\infty)$

και η f παρ/μη στο 1

τότε $f'(1) = 0$. και $f(1) = 5$

$$f'(x) = 2\alpha \cdot \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2}$$

$f'(1) = \boxed{2\alpha + \beta = 0}$

$f(1) = \boxed{-\beta + 3\alpha = 5}$ $\oplus$ $5\alpha = 5$

$\alpha = 1$

$\beta = -2$.

(B) Εστω οτι $f(x) = e^x - \alpha x$

και $f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Νδο $\alpha = 1$.

Απο ανισοτητα σε ισοτητα

• $f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$

Ακροτατο στο 0

Fermat

$\underline{\underline{f'(0) = 0}}$.

$f'(x) = e^x - \alpha$

$f'(0) = 1 - \alpha = 0$

$\underline{\underline{\alpha = 1}}$

γ) Εστω $f: R \to R$ παρ/μη $f'(0)=1$

$f^3(x) + e^x = f(f(x)) + x \quad \forall x \in R$.

Νδο η f δεν εχει ακροτατα.

Εστω οτι η f εχει ακροτατο στο x_0 αρα απο Fermat

$f'(x_0)=0$.

$3f^2(x) f'(x) + e^x = f'(f(x)) f'(x) + 1$

$\underline{x = x_0}$

$\cancel{3f^2(x_0) f'(x_0)} + e^{x_0} = \cancel{f'(f(x_0)) f'(x_0)} + 1$

$e^{x_0} = 1$

$x_0 = 0$

αρα $f'(0)=0$ Ατοπο γιατι $f'(0)=1$

αρα δεν εχει ακροτατα

16 Επίλυση Εξισώσεων.

(α). Έστω $f(x) = x^2 + \ln x - 1$, $x > 0$

Να λυθεί η εξίσωση $(x^2+1)^2 + \ln(x^2+1) = 1$

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$

$f'(x) > 0$

$f \nearrow$

$(x^2+1)^2 + \ln(x^2+1) - 1 = 0$

$f(x^2+1) = 0$

$f(x^2+1) = f(1)$

f 1-1

$x^2+1 = 1$

$x^2 = 0$

$x = 0$

(β) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 = 1 - \ln x$

$$\underbrace{x^2 - 1 + \ln x}_{f(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$f(x) = f(1)$

f 1-1

$\underline{\underline{x = 1}}$

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ γιατί $x > 0$

$f \nearrow \Rightarrow f$ 1-1,

(γ) Έστω $f' \nearrow$. Να λυθεί η εξίσωση

$$f(|ημx| + 3) - f(|ημx|) = f(x+3) - f(x)$$

$g(x) = f(x+3) - f(x)$

$g(|ημx|) = g(x) \longrightarrow g$ 1-1

$|ημx| = x$

$\underline{\underline{x = 0}}$

$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow$

- $x < x + 3 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x+3)$

$f'(x+3) - f'(x) > 0$

δ) Έστω $f(x) = e^{-x} + x - 1$.

Να λυθεί η εξίσωση $f(e^{x-1} - 1) + f(x^5) = f(x^3)$

στο $(0, +\infty)$.

$f'(x) = -e^{-x} + 1$

• $x > 0$ $\qquad f \nearrow$

$-x < 0$

$e^{-x} < e^0$

$e^{-x} < 1$

$-e^{-x} > -1$

$1 - e^{-x} > 0$

$f'(x) > 0$

$f(e^{x-1} - 1) + f(x^5) - f(x^3) = 0$

προφανής ρίζα : $x = 1$.

• $x > 1$

→ $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow e^{x-1} > e^0 \Rightarrow e^{x-1} > 1 \Rightarrow e^{x-1} - 1 > 0$

$f(e^{x-1} - 1) > 0$

→ $x^3 < x^5 \Rightarrow f(x^3) < f(x^5) \Rightarrow f(x^5) - f(x^3) > 0$ (+)

$f(e^{x-1} - 1) + f(x^5) - f(x^3) > 0$.

• $x<1$

$\rightarrow$ $x<1 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow e^{x-1}<e^{0} \Rightarrow e^{x-1}<1$

$$e^{x-1}-1<0$$

$$f(e^{x-1}-1)<f(0)$$

$$f(e^{x-1}-1)<0$$

+

$\rightarrow$ $x^5<x^3 \Rightarrow f(x^5)<f(x^3) \Rightarrow f(x^5)-f(x^3)<0$

$$\boxed{f(e^{x-1}-1)+f(x^5)-f(x^3)<0}$$

Άρα μοναδική ρίζα $x=1$.

(ε) · $2x\,\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x = \pi$ $\quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\underbrace{2x\,\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x - \pi}_{f(x)} = 0$$

$f(-\frac{\pi}{2}) = \dots = 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = \dots = 0$

} προφανείς ρίζες $x = -\frac{\pi}{2}$ $x = \frac{\pi}{2}$.

$f'(x) = 2\cancel{\eta\mu x} + 2x\,\sigma\upsilon\nu x - 2\cancel{\eta\mu x}$

$f'(x) = 2x\,\underset{+}{\sigma\upsilon\nu x}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Έχω δύο διαστήματα μονοτονίας άρα η $f(x)$ έχει το πολύ δύο ρίζες.
Έχω βρει ήδη δύο, άρα έχει δύο.

(3) $x^2 = 2^x$ στο $(0, +\infty)$

προφανείς ρίζες $x=2$, $x=4$

$\ln x^2 = \ln 2^x$

$2\ln x = x \ln 2$

$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{\ln 2}{2}$

$$\boxed{g(x) = \frac{\ln x}{x}}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$\rightarrow g'(x) = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$

$x = e$

x		e	
g'	$+$		$-$
g	$\nearrow$		$\searrow$

Η $g(x)$ έχει 2 διαστήματα μονοτονίας

άρα η εξίσωση $g(x) = \frac{\ln 2}{2}$ έχει το πολύ 2 ρίζες

Έχω βρει ήδη 2 ρίζες άρα τέλος

(η). $x \ln x = 2x - e$

$\underbrace{x \ln x - 2x + e}_{f(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Στο $x = e$ εχω ελαχιστο

$x = e$

$f'(x) = \ln x + 1 - 2$

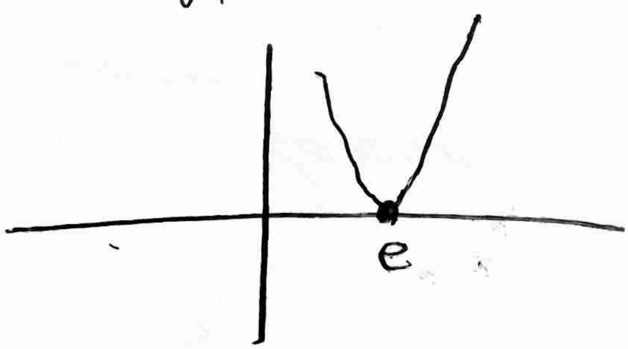
$f'(x) = \ln x - 1$

→ $\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

x		e	
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

$f(x) \geq f(e)$

$f(x) \geq 0$



8. $3^x + 4^x = 5^x$

$$\frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} = \frac{5^x}{5^x}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

$$\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1}_{f(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$f(x) = f(2)$

f 일-1

$x = 2$.

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} \\ &\cdot\ x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} \end{aligned}\right\} +$$

$f \downarrow$.

(i) $x^2+4x+5 = 5e^x$

$$\frac{x^2+4x+5}{e^x} = 5$$

$$\underbrace{(x^2+4x+5)e^{-x} - 5}_{f(x)} = 0 \quad \Rightarrow f(x) = 0$$

$f(x) = f(0)$

f 8 $1-1$

$\underline{\underline{x=0}}$

$$f'(x) = (2x+4)e^{-x} - (x^2+4x+5)e^{-x}$$

$$f'(x) = (2x+4-x^2-4x-5)e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2-2x-1)e^{-x}$$

$$f'(x) = -(x^2+2x+1)e^{-x}$$

$$\boxed{f'(x) = -(x+1)^2 e^{-x}} \le 0$$

$f \downarrow$

17

Απόδειξη ανισοτήτων.

(01) , Νδο $e^x \geq 1-\sqrt{x}$ $\forall x \geq 0$

$\underbrace{e^x - 1 + \sqrt{x}}_{f(x)} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$f'(x) = e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

$f \nearrow$

Άρα Αν $x \geq 0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) \geq f(0)$

$f(x) \geq 0$

$e^x - 1 + \sqrt{x} \geq 0$

$e^x \geq 1 - \sqrt{x}$

(B) Νδο $e^x \geq x+1$. $x \in \mathbb{R}$

$$e^x - x - 1 \geq 0$$

$$f(x) \geq 0$$

x		0	
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

$$f'(x) = e^x - 1$$

$\rightarrow$ $e^x - 1 = 0$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$f(x) \geq f(0)$$

$$f(x) \geq 0$$

$$e^x - x - 1 \geq 0$$

$$e^x \geq x+1$$

(γ) Έστω $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$$

x		1	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f(x) \geq f(1)$$

$$\underline{\underline{f(x) \geq 2}}$$

i) Αν $x>2$ νδο $f(x)>13$.

$\rightarrow$ Αν $x>2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(2) \Rightarrow f(x) > 13$.

ii) Αν $x>1$ νδο $f(\sqrt{x}) > 2$

$\rightarrow$ $x>1 \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{x} > 1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\sqrt{x}) > f(1)$

$f(\sqrt{x}) > 2$

iii) Αν $x>1$ νδο $f(f(x)) > 13$.

$\rightarrow$ Αν $x>1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 2$

$f(f(x)) > f(2)$

$f(f(x)) > 13$.

iv) Αν $1<\alpha<\beta$ τοτε νδο $(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)>4$

$$\alpha<\beta \Rightarrow f(\alpha)<f(\beta) \Rightarrow \alpha^4-4\alpha+\cancel{5}<\beta^4-4\beta+\cancel{5}$$

$$a^4-\beta^4<4a-4\beta$$

$$a^4-\beta^4<4(a-\beta)$$

$$\frac{a^4-\beta^4}{a-\beta}>4 \Leftrightarrow \frac{(a^2-\beta^2)(a^2+\beta^2)}{a-\beta}>4$$

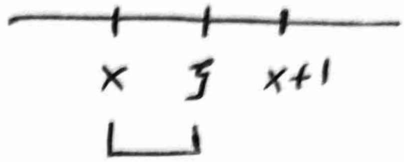
$$\frac{\cancel{(a-\beta)}(\alpha+\beta)(a^2+\beta^2)}{\cancel{a-\beta}}>4$$

$$(a+\beta)(a^2+\beta^2)>4.$$

(δ) Έστω $f' \nearrow$

i) Ν.δ.ο $f'(x) + f(x) < f(x+1)$

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$$

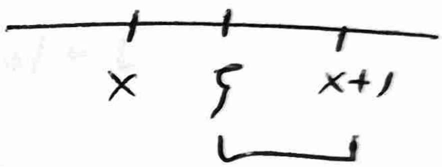


$x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x)$

$$\boxed{f'(x) + f(x) < f(x+1)}$$

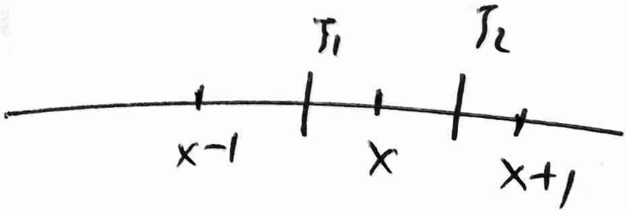
ii). Ν.δ.ο $f(x+1) - f'(x+1) < f(x)$



$\xi < x+1 \Rightarrow f'(\xi) < f'(x+1)$

$$\boxed{f(x+1) - f(x) < f'(x+1)}$$

iii) Ν.δ.ο $2f(x) < f(x+1) + f(x-1)$



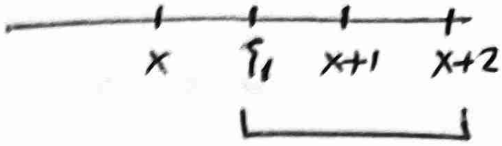
$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x-(x-1)} = f(x) - f(x-1)$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$$

$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow f(x) - f(x-1) < f(x+1) - f(x)$

$$\boxed{2f(x) < f(x+1) + f(x-1)}$$

iv). Ν.δ.ο $f(x+1) < f'(x+2) + f(x)$



$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$$

$$\xi_1 < x+2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(x+2)$$

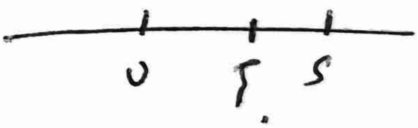
$$f(x+1) - f(x) < f'(x+2)$$

$$\boxed{f(x+1) < f'(x+2) + f(x)}$$

v) Έστω ότι $2 \le f'(x) \le 4$ και

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και $f(0) = 1$

Ν.δ.ο $11 \le f(5) \le 21$.



$$f'(\xi) = \frac{f(5)-f(0)}{5-0} = \frac{f(5)-1}{5}$$

όμως $2 \le f'(x) \le 4$

$$2 \le f'(\xi) \le 4$$

$$2 \le \frac{f(5)-1}{5} \le 4$$

$$10 \le f(5) - 1 \le 20$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{11 \le f(5) \le 21}}$$

ε) Έστω $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1)=1$

$$x f'(x) + 1 < x e^{x-1} \quad \forall x>0.$$

Ν.δ.ο. $f(x) < e^{x-1} - \ln x$, $\forall x>1$

$$\underbrace{f(x) - e^{x-1} + \ln x}_{g(x)} < 0$$

$$g'(x) = f'(x) - e^{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{\overset{-}{x f'(x) - x e^{x-1} + 1}}{x}$$

$g'(x) < 0$

$g \downarrow$.

<u>Άρα</u>

$\forall x>1 \Rightarrow g(x) < g(1)$

$$f(x) - e^{x-1} + \ln x < 0$$

$$\boxed{f(x) < e^{x-1} - \ln x}$$

3. Έστω $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ με $f(1)=0$.

Αν $\forall x>0 \quad x f'(x) < f(x) + x^2 συνx$

νδο $f(x) < x\,ημx \ , \ \forall x>1$

Είναι $x f'(x) - f(x) < x^2 συνx$

$$\frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} < συνx$$

$$\frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} - συνx < 0$$

$$\Big(\underbrace{\frac{f(x)}{x} - ημx}_{g(x)}\Big)' < 0$$

$$g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow$$

$\forall x>1 \Rightarrow g(x) < g(1)$

$$\frac{f(x)}{x} - ημx < 0 \Rightarrow f(x) < x\,ημx$$