Άσκηση 1 505

1. Αν $x<2$ βρείτε $A=|3x-6|-|4-2x|+x$

$A=|\overset{(-)}{3x-6}|-|\overset{(+)}{4-2x}|+x = -3x+6-(4-2x)+x$ (*)

- $x<2 \Rightarrow 3x<6 \Rightarrow 3x-6<0$
- $x<2 \Rightarrow -2x>-4 \Rightarrow 4-2x>0$

(*) $-3x+6-4+2x+x = 2.$

2. Αν $-1<x<3$ βρείτε $A=|\overset{(+)}{x+2}|+|\overset{(-)}{x-4}|$

- $-1<x<3 \Rightarrow 1<x+2<5$
- $-1<x<3 \Rightarrow -5<x-4<-1$

$A=x+2-x+4 = 6$

3. Αν $\alpha<-1<\beta$ βρείτε $A=|\overset{(-)}{\alpha+1}|-|\overset{(+)}{\beta+1}|+|\overset{(+)}{\beta-\alpha}|$

- $\alpha<-1 \Rightarrow \alpha+1<0$
- $\beta>-1 \Rightarrow \beta+1>0$
- $\alpha<\beta \Rightarrow 0<\beta-\alpha$

$A=-\alpha+1-(\beta+1)+\beta-\alpha = -\alpha+1-\beta-1+\beta-\alpha = -2\alpha.$

Άσκηση 2 505

Βρες x, y ώστε $x^2+y^2-10x+4y=-29$

$x^2+y^2-10x+4y+29=0.$

$(x^2-10x+25)+(y^2+4y+4)=0$

$(x-5)^2+(y+2)^2=0$

$x-5=0$ και $y+2=0$

$x=5$ $y=-2$

Άσκηση 3

1. Νδο $|a||B| = |a \cdot B|$

Απόδειξη

$$(|a||B|)^2 = |aB|^2$$

$$|a|^2 \cdot |B|^2 = (aB)^2$$

$$a^2 \cdot B^2 = a^2 B^2$$ ✓

$$|a|^2 = a^2$$

2. Να δ.ο $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Απόδειξη

$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

$|\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2$

$(\alpha+\beta|)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha\beta| + \beta^2$

$2\alpha\beta \leq 2|\alpha\beta|$

$\alpha\beta \leq |\alpha\beta|$

που ισχύει γιατί $|x| \geq x$ ✓

Άσκηση 4

1. Έστω $1 < x < 2$

i) $2x-3$

- $1 < x < 2 \Rightarrow 2 < 2x < 4 \Rightarrow -1 < 2x-3 < 1$

ii) $2-3x$

- $1 < x < 2 \Rightarrow -3 > -3x > -6$

$$-1 > 2-3x > -4$$

iii) x^2-x

- $1 < x < 2 \Rightarrow 1 < x^2 < 4$ (+)
- $1 < x < 2 \Rightarrow -1 > -x > -2 \Rightarrow -2 < -x < -1$

$$-1 < x^2-x < 3$$

iv/. $\frac{1}{x} + x^3$

• $1 < x < 2 \Rightarrow 1 > \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$

• $1 < x < 2 \Rightarrow 1 < x^3 < 8$ ⊕

$$\frac{3}{2} < x^3 + \frac{1}{x} < 9$$

2. i/ $2x - 3y$

• $1 < x < 2 \Rightarrow 2 < 2x < 4 \Rightarrow 4 > 2x > 2$

• $2 < y < 3 \Rightarrow -6 > -3y > -9$ ⊖

$$-2 > 2x - 3y > -7$$

ii/ $2 - xy$

• $1 < x < 2$
• $2 < y < 3$
} ⊙ $2 < xy < 6 \Rightarrow -2 > -xy > -6$

$$0 > 2 - xy > -4$$

III) $\frac{x}{y} - (x-1)^2$

- $1 < x < 2 \Rightarrow 2 > x > 1$
- $2 < y < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{y} > \frac{1}{3}$

$\Big\}$ ① $1 > \frac{x}{y} > \frac{1}{3}$

- $1 < x < 2 \Rightarrow 0 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < (x-1)^2 < 1$

$0 > -(x-1)^2 > -1$

$1 > \frac{x}{y} - (x-1)^2 > -\frac{2}{3}$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Απόλυτη τιμή • Ιδιότητες ισοτήτων και ανισοτήτων • Ταυτότητες • Διαστήματα

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος, χωρίς αιτιολόγηση. **(5 μ.)**

1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x| \geq x$. ☑ Σ ☐ Λ
2. Αν $\alpha\beta = \alpha\gamma$, τότε $\beta = \gamma$. ☐ Σ ☑ Λ
3. Η απόσταση των αριθμών x και 5 είναι $|x - 5|$. ☑ Σ ☐ Λ
4. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$. ☐ Σ ☑ Λ
5. Αν $-4 < x < -2$, τότε $x^2 > 4$. ☑ Σ ☐ Λ

Α3. Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες, ώστε να προκύπτουν αληθείς ταυτότητες. **(6 μ.)**

1. $(\alpha - \beta + \gamma)^2 =$ $\alpha^2 + (-\beta)^2 + \gamma^2 + 2(\alpha)(-\beta) + 2\alpha\cdot\gamma + 2(-\beta)\gamma$
2. $\alpha^3 + \beta^3 =$ $(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
3. $(2\alpha - \beta)^2 =$ $4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2$
4. $(\alpha + 3\beta)(\alpha - 3\beta) =$ $\alpha^2 - 9\beta^2$

Α4. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνθήκη της Στήλης Α με το σωστό διάστημα της Στήλης Β. **(5 μ.)**

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $x \leq -2$	α. $x \in (-2, 2)$
2. $x > 3$	β. $x \in (3, +\infty)$
3. $-1 \leq x < 4$	γ. $x \in (-\infty, -2]$
4. $\lvert x\rvert < 2$	δ. $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
5. $x \neq 1$	ε. $x \in [-1, 4)$
