Ασκηση 505 1

Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχης και $f(x) \neq 0$

και $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - x^2}{x-2} = -1$

Ν.δ.ο $f(x) > 0$

Λυση

Θεωρω συναρτηση $g(x) = \dfrac{f(x) - x^2}{x-2}$

αρα $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -1.}$

Λογω ως προς $f(x)$

$g(x)(x-2) = f(x) - x^2$

$\boxed{g(x)(x-2) + x^2 = f(x)}$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x)(x-2) + x^2 = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$-1 \cdot 0 + 4 = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Дано $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

Дано и $f(x)$ непрерывна

$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 4$

$\boxed{f(2) = 4}$

Дано $f(x) \neq 0$ для непрерывной,

тогда $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$

при $f(2) = 4$

при $f(x) > 0$.

Ασκηση sos 2

Εστω $f:[-2,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχ.

$f^2(x) - 1 = 2f(x) + x$. $f(3)=3$

Να βρεθει ο τυπος της $f(x)$

Λυση

$f^2(x) - 2f(x) = x+1$

$f^2(x) - 2\cdot 1 \cdot f(x) + 1^2 = x+1+1^2$

$(f(x)-1)^2 = x+2$

$(f(x)-1)^2 = \sqrt{x+2}^2$

$|f(x)-1| = |\overset{\oplus}{\sqrt{x+2}}|$

$|h(x)| = \sqrt{x+2}$.

Pitd $h(x)$

$h(x) = 0$

$|h(x)| = 0$

$\sqrt{x+2} = 0$

$x+2 = 0$

$x = -2$

x	-2	
$h(x)$		$+$

$h(3) = f(3) - 1$

$h(3) = 3 - 1$

$h(3) = 2$

$h(x) > 0$

Apa $|h(x)| = \sqrt{x+2}$ (+)

$h(x) = \sqrt{x+2}$

$f(x) - 1 = \sqrt{x+2}$

$f(x) = \sqrt{x+2} + 1$

Άσκηση sos 3

Δίνεται $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)$ και στη συνέχεια το πλήθος ριζών της εξίσωσης.

$f(x) =$ lik $\forall x \in R$.

Πρέπει $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

Άρα $D_f = [-1, +\infty)$

Μονοτονία

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1+1 < x_2+1 \Rightarrow \sqrt{x_1+1} < \sqrt{x_2+1}$

$-\sqrt{x_1+1} > -\sqrt{x_2+1}$

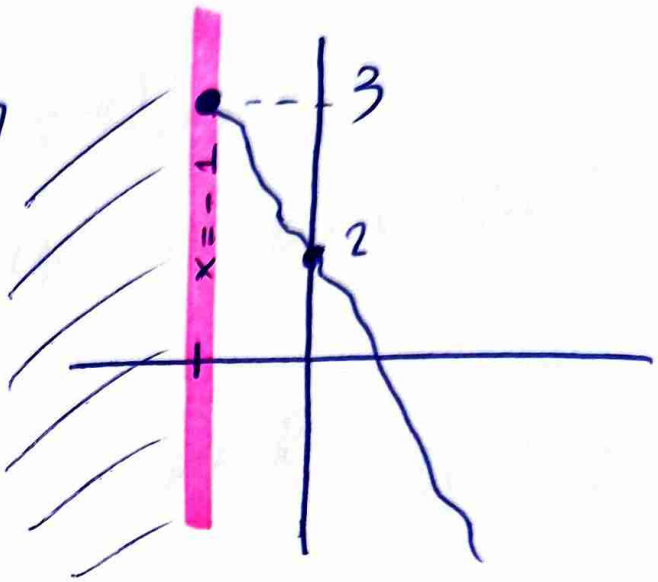
$3-\sqrt{x_1+1} > 3-\sqrt{x_2+1}$

$f(x_1) > f(x_2)$ $\forall$

• $f(-1) = 3 - \sqrt{-1+1} = 3 - 0 = 3$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \sqrt{x+1} = -\infty$.

$\sum T_f = (-\infty, 3]$



Πλήθος ρίζων $f(x) = \lambda$ ⟶ $f(x) = \lambda$

Αν $\lambda > 3$ δηλαδή $\ln k > 3$

$e^{\ln k} > e^3$

$k > e^3$ τοτε 0 ρίζες

Αν $\lambda \leq 3$ δηλαδή $k \leq e^3$ τοτε

1 ρίζα.

Άσκηση 505 4

Έστω $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=\ln x-1$

Να βρεθεί η $h(x)=(f\circ g)(x)$.

Να δείξετε η $h(x)$ αντιστρέφεται και να βρεθεί

η $h^{-1}(x)$.

$D_f=R^*$ $D_g=(0,+\infty)$

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{\ln x-1}$$

$x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$

$x>0$ $\ln x-1\neq 0$

$\ln x\neq 1$

$e^{\ln x}\neq e^1$

$x\neq e$.

$D_h=(0,e)\cup(e,+\infty)$.

Έστω $h(x_1) = h(x_2)$

$$\frac{1}{\ln x_1 - 1} = \frac{1}{\ln x_2 - 1}$$

$$\ln x_2 - 1 = \ln x_1 - 1$$

$$\ln x_2 = \ln x_1$$

$$x_1 = x_2$$ ή 1-1

Θέτω $h(x) = y$

$$y = \frac{1}{\ln x - 1}$$

$$y(\ln x - 1) = 1$$

$$y \ln x - y = 1$$

$$y \ln x = y + 1$$

$$\ln x = \frac{y+1}{y}, \quad y \neq 0$$

$$e^{\ln x} = e^{\frac{y+1}{y}}$$

$$x = e^{\frac{y+1}{y}}$$

$$\boxed{h^{-1}(x) = e^{\frac{x+1}{x}}}$$

$x > 0$ car $x \neq e$

$e^{\frac{y+1}{y}} > 0$ ✓

$e^{\frac{y+1}{y}} \neq e^1$

$\frac{y+1}{y} \neq 1$

$y + 1 \neq y$

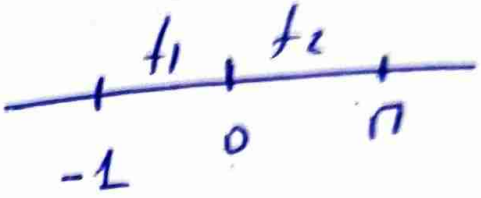
$1 \neq 0$ ✓

$D_{h^{-1}} = \mathbb{R}^*$

Άσκηση 505

Έστω $f(x) = \begin{cases} x^3+2x+1, & x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

(α) Ικανοποιείται το ΘΜΕΤ στο $[-1, \pi]$;



- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^3+2x+1 = +1$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sigma\upsilon\nu x - x = 1$

Άρα $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ τότε

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 1}$$

Το $f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow f(0) = 1$

Άρα $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ Συνεχής στο 0.

Η $f(x)$ είναι συνεχής σε $[-1,0)$ και $(0,\pi]$

αλλά δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$ άρα η f συνεχής $[-1,\pi]$

συνεπώς ικανοποιεί το ΘΜΕΤ στο

$[-1,\pi]$.

(B) Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+2x+1-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x^2+2)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} x^2+2 = 2$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin x - 1}{x} - \frac{x}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin x - 1}{x} - 1 \right) = 0 - 1 = -1$$

Άρα τα πλάγια ορια διαφορα
συσπιλ το ορισ δεν υπαρχι

(8) Σύνολο Τιμών της $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^3+2x+1, & x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - x, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

$x \le 0$

$f_1(x) = x^3+2x+1$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$ (+)
- $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1+1 < 2x_2+1$

$f(x_1) < f(x_2)$

$f \uparrow$

$0 < x \le \pi$

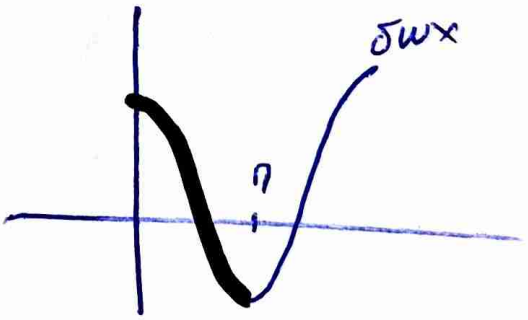
$f_2(x) = \sigma\upsilon\nu x - x$

- $x_1 < x_2 = -x_1 > -x_2$ (+)
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2$

$\sigma\upsilon\nu x_1 - x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2 - x_2$

$f(x_1) > f(x_2)$

$f \downarrow$

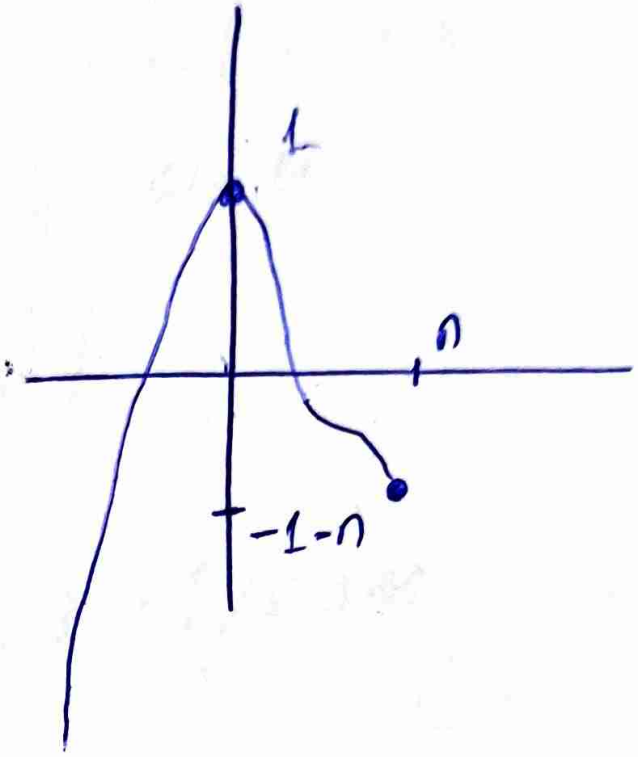


x	$-\infty$		0		π
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-1-\pi$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3+2x+1 = -\infty$
- $f(0) = 1$
- $f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi - \pi = -1-\pi$

$\sum T_f = (-\infty, 1]$

(δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.



$x \le 0$

- f συνεχής
- $f \uparrow$
- $\Sigma_f = (-\infty, 1]$

Το $0 \in \Sigma_f$

άρα $\exists!\, x_1 < 0$ τ.ω

$f(x_1) = 0$.

$0 < x \le n$

- f συνεχής
- $f \downarrow$
- $\Sigma_f = [-1-n, 1)$

Το $0 \in \Sigma_f$

άρα $\exists!\, x_2 > 0$ τ.ω

$f(x_2) = 0$

(ε) Νδο υπαρχει τουλαχιστον $\xi \in \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right)$.

τω $7f(\xi) = 4f\left(\frac{1}{6}\right) + 3f\left(\frac{1}{7}\right)$

Η $f(x)$ συνεχης στο $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right]$ αρα

απο ΘΜΕΤ $m \le f(x) \le M$

$\forall x \in \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right]$

$m \le f\left(\frac{1}{7}\right) \le M \Rightarrow 3m \le 3f\left(\frac{1}{7}\right) \le 3M$ (+)

$m \le f\left(\frac{1}{6}\right) \le M \Rightarrow 4m \le 4f\left(\frac{1}{6}\right) \le 4M$

$7m \le 3f\left(\frac{1}{7}\right) + 4f\left(\frac{1}{6}\right) \le 7M$

$m \le \dfrac{3f\left(\frac{1}{7}\right) + 4f\left(\frac{1}{6}\right)}{7} \le M.$

Ο αριθμος $\dfrac{3f\left(\frac{1}{7}\right) + 4f\left(\frac{1}{6}\right)}{7} \in \Sigma T f$

αρα $\exists\, \xi \in \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right]$ τ.ω $f(\xi) = \dfrac{3f\left(\frac{1}{7}\right) + 4f\left(\frac{1}{6}\right)}{7}$.

⑦ Να λυθεί η ανίσωση $\forall x \geq 0$

$$f(1-f(x)) - f(x^2) < 0$$

$$f(1-f(x)) < f(x^2)$$

↑ ④ ↑ ④

$f \downarrow$

- $x^2 \geq 0$
- $f(x) \leq 1 \Rightarrow 1 - f(x) \geq 0$ από ΣΤf $= (-\infty, 1]$

$$1 - f(x) > x^2$$

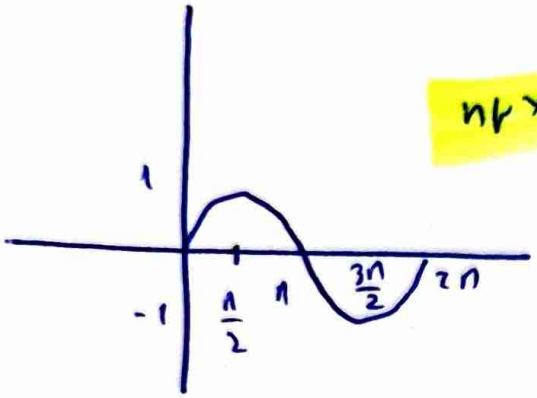
$$1 - (\sigma\upsilon x - x) > x^2$$

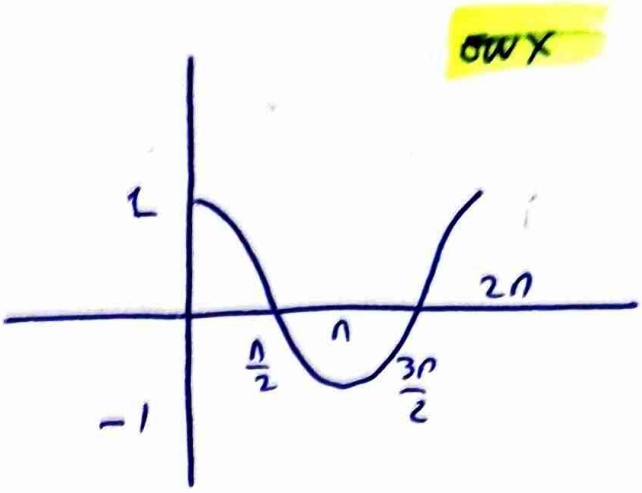
$$1 - \sigma\upsilon x + x > x^2$$

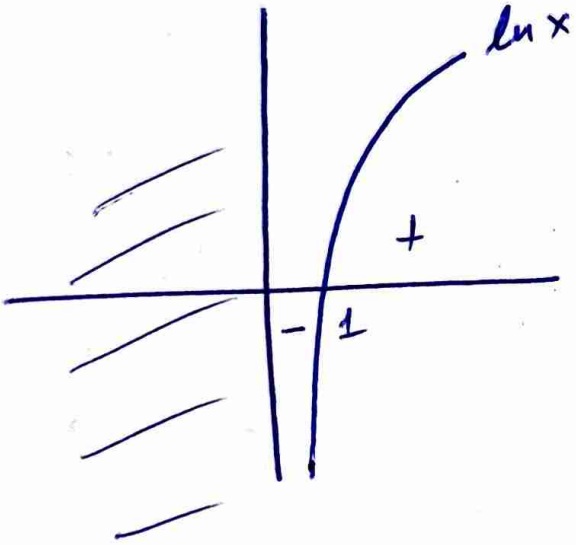
$$1 - \sigma\upsilon x + x - x^2 > 0$$

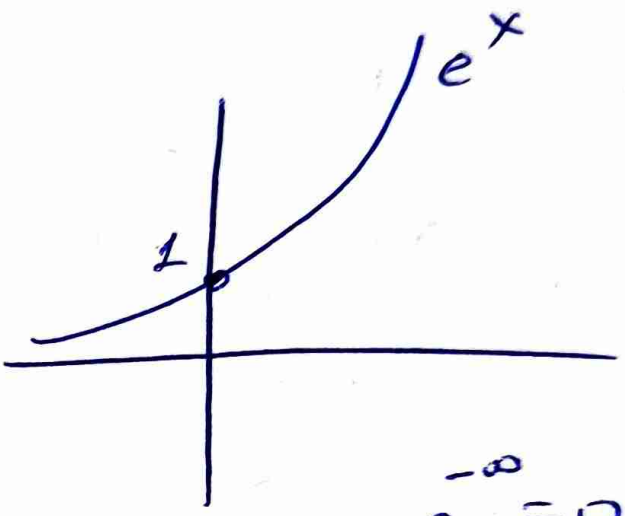
Δεν λύνεται ακόμη!

Τριγωνομετρία









$e^{-\infty} = 0$

$e^{0} = 1$

$e^{+\infty} = +\infty$

$e^{1} = e$

$\ln e = 1$ $\quad \ln 0 = -\infty$

$\ln 1 = 0$ $\quad \ln +\infty = +\infty$

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty \cdot \frac{1}{0} = \infty \cdot \infty = \infty$$