

Αποδειξας

Διαχωρισματος

11 / 1126



3.5 Νόσ αν η f παρα/μη σε x_0

Τότε είναι και συνεχής σε x_0

Απόδειξη

$$H(x) - H(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - H(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [H(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Συνεχής σε x_0

3.6 Nдо $(c)' = 0$

Анодулу

Еоту $f(x) = c$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

3.7 Nдо $(x)' = 1$

Анодулу

Еоту $f(x) = x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

3.8 Nдо $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Анодулу

Еоту $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x}^2 - \sqrt{x_0}^2}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

3.10 Ndo $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Anodusu

—OTW $h(x) = f(x) + g(x)$

$$h'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

3.16 Έστω f ορισμένη στο Δ

Αν n f σκευηλ στο Δ τότε αν

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \text{ σημείο του } \Delta.$$

Τότε νύο $f(x)$ σκαθφν.

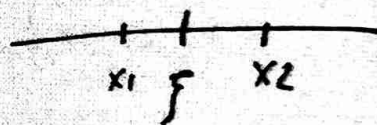
Απόδειξη

Αρκν νύο $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ n $f(x_1) = f(x_2)$

$$\rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$\rightarrow x_1 < x_2$$

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



οπν $f'(x) = 0$ αρα $f'(\xi) = 0$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(x_1) = f(x_2)}}$$

$$\rightarrow x_1 > x_2$$

οποίω/.

3.17

Εστω f, g συναρτήσεις σε Δ .

Αν $f'(x) = g'(x) \quad \forall x$ εσωτερικών σε Δ .

Τότε $f(x) = g(x) + c$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $f'(x) = g'(x)$

$$f'(x) - g'(x) = 0$$

$$[(f-g)(x)]' = 0$$

$$(f-g)(x) = c$$

$$f(x) - g(x) = c$$

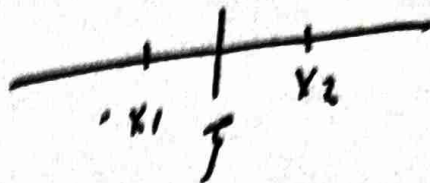
$$f(x) = g(x) + c.$$

3.18 Av $f'(x) > 0$ vdo $f \nearrow$

Anodaly

Costw

$$x_1 < x_2$$



$$f'(f) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

opws $f'(x) > 0$

$$f'(f) > 0$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

⊕

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

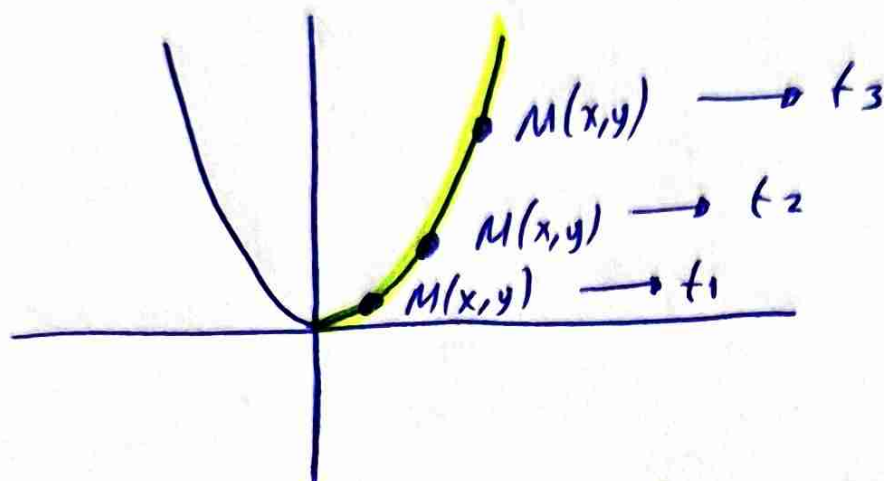
$$\underline{f(x_2) > f(x_1)}$$

$f \nearrow$

Ρυθμός

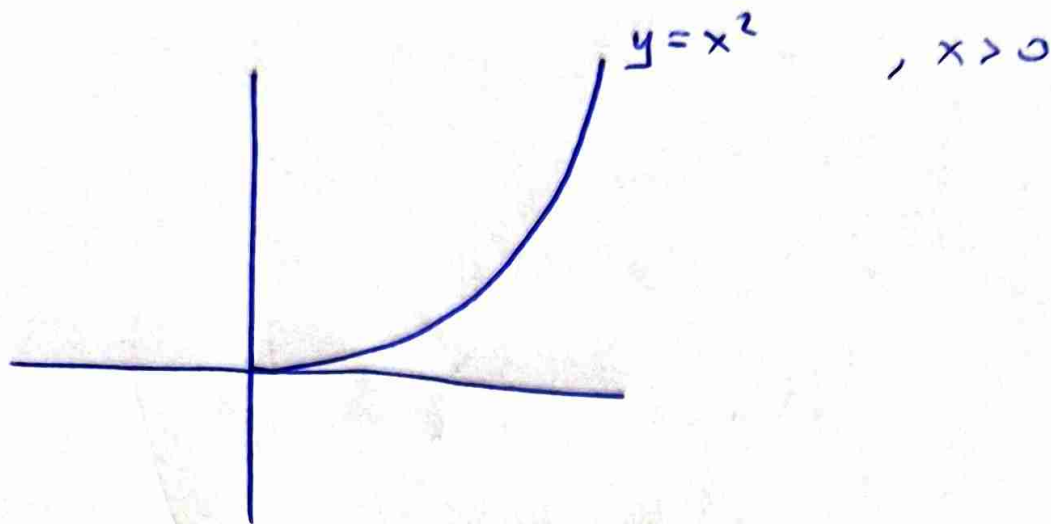
Μεταβολής

$$f(x) = x^2, \quad x > 0$$



Η τετμημένη του υλικού σημείου M
και η τεταγμένη του αλλοιού σφαιρίσκει
του χρόνου άρα $x = x(t)$, $y = y(t)$
φυσικά η τετμημένη και η τεταγμένη
μεταβαλλόνται με ένα ρυθμό.

Ο ρυθμός με τον οποίο
μεταβάλλεται ένα μέγεθος
είναι μετρησιμός και λέγεται
ρυθμός μεταβολής και είναι
η παραγώγος συνάρτησης.



Η τετρήρωη του ολίρου σνμωου Μ
αυξάνεται κατά 1.

Τη χρονική στιγμή t_1 το σνμωο Μ

δνσρχεται από το σνμωο $A(2,4)$

Να βρεθεί τη χρονική στιγμή

t_1 ο ρυθμός ρεταβολής.

Λεξορμια

$$x'(t) = 1$$

$$x(t_1) = 2$$

$$y(t_1) = 4.$$

1. Της τεταγμένης του M

Γνωρίζω ότι $y = x^2$

σος

Η παραγωγή
στο ρυθμό
μεταβολής
δίνεται ως προς t

$$y(t) = x^2(t)$$

$$y'(t) = 2x(t) x'(t)$$

Είναι ο ρυθμός μεταβολής
της τεταγμένης του M
των τυχαία χρονικών στιγμών
 t

$$\text{Για } t = t_1$$

$$y'(t_1) = 2x(t_1) x'(t_1)$$

$$y'(t_1) = 2 \cdot 2 \cdot 1$$

$$y'(t_1) = 4$$

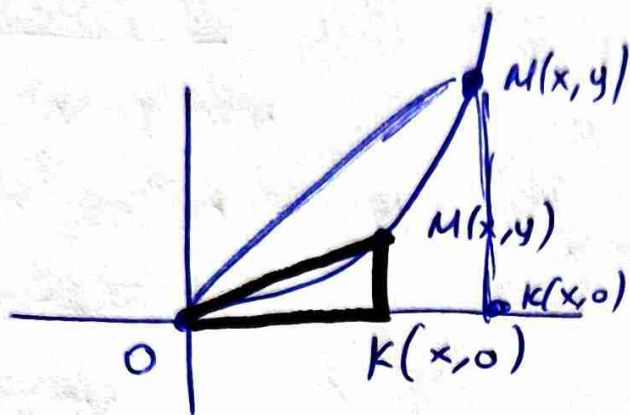
$$\frac{\sum x = 210}{(x^2)' = 2x}$$

$$[(\ln x)^2]' = 2 \ln x (\ln x)' = 2 \ln x \frac{1}{x}$$

$$(f^2(x))' = 2f(x) f'(x)$$

2. του εμβαδού του τριγώνου MOK
 όπου O η αρχή των αξόνων και
 K η προβολή του M στον $x'x$.

Σχολίο



$$E = \frac{B \cdot U}{2}$$

$$E = \frac{x \cdot y}{2}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} x(t) y(t)$$

→ Το εμβαδόν του τριγώνου

των τυχαία χρονική στιγμή t

$$E'(t) = \frac{1}{2} [x'(t) y(t) + x(t) y'(t)]$$

→ ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού των
 τυχαία χρονική στιγμή.

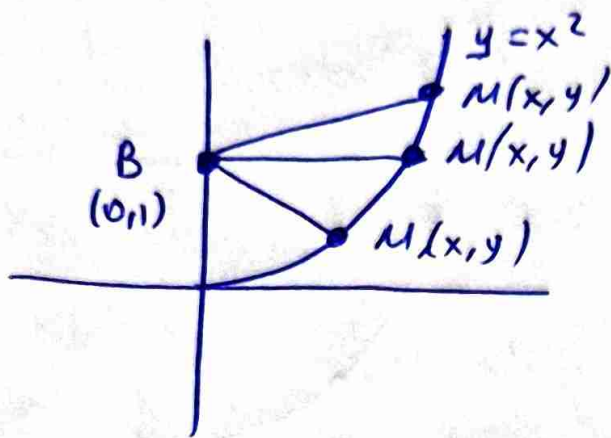
$$\underline{t=t_1} \Rightarrow E'(t_1) = \frac{1}{2} [x'(t_1) y(t_1) + x(t_1) y'(t_1)]$$

$$E'(t_1) = \frac{1}{2} [1 \cdot 4 + 2 \cdot 4] = 6 \Rightarrow \boxed{E'(t_1) = 6}$$

Οποιαδήποτε χρονική
 στιγμή t το ολικό
 εμβαδόν M με τα
 σημεία O, K
 σχηματίζει ορθογώνιο
 τρίγωνο το οποίο
 έχει ένα εμβαδόν
 που ο ρυθμός με
 τον οποίο αλλάζει
 είναι μετρησιμώ!

3. Η απόσταση του M από το

$B(0,1)$



Σχόλιο

Η απόσταση του M από το B αλλάζει με αλ-
γεβρα ο οποίος
συνεπώς μετρήσιμη.

$$d(M, B) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

$$d(M, B) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2(y(t)-1)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}}$$

Η απόσταση του M από το B των τυχαία χρονία στιγμή t

$$\underline{t=t_1}$$

$$d'(t_1) = \frac{x(t_1)x'(t_1) + (y(t_1)-1)y'(t_1)}{\sqrt{x^2(t_1) + (y(t_1)-1)^2}}$$

Σχόλιο

$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d'(t_1) = \frac{2 \cdot 1 + (4-1)4}{\sqrt{4+9}}$$

$$d'(t_1) = \frac{14}{\sqrt{13}}$$

Ενημέρωση

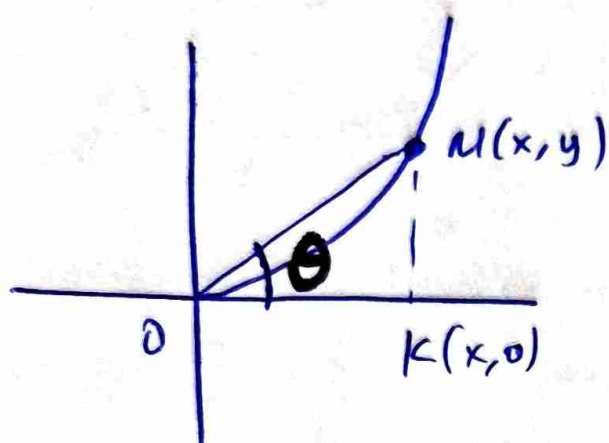
$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}$$

$$d'(t) = \frac{[x^2(t) + (y(t)-1)^2]'}{2\sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2(y(t)-1)(y'(t)-1)}{2\sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2(y(t)-1)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + (y(t)-1)^2}}$$

4. Την γωνία $\theta = \hat{MOK}$ όπου
 O η αρχή των αξόνων και K η
 προβολή του M στον $x'x$.



$$\varepsilon\varphi \hat{\theta} = \frac{MK}{OK}$$

$$\varepsilon\varphi \hat{\theta} = \frac{y}{x}$$

$$\varepsilon\varphi \theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}$$

$$\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \sin^2 \theta(t)$$

↓
 αυτό φαίνεται

πώς είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας.

Σχόλιο

Η γωνία $\hat{MOK}$
 αλλάζει συνεχώς
 και κάθε χρονική
 στιγμή ενώ
 εξαρτάται πλήρως
 από τη θέση του
 M .

Γνωρίζω από τη β' Λυκείου ότι

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

αρα $\sin^2 \theta(t) = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta(t)}$

$$\sin^2 \theta(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2}$$

$$\sin^2 \theta(t) = \frac{1}{1 + \frac{y^2(t)}{x^2(t)}}$$

Αρα συνοψίζω λογικά ότι.

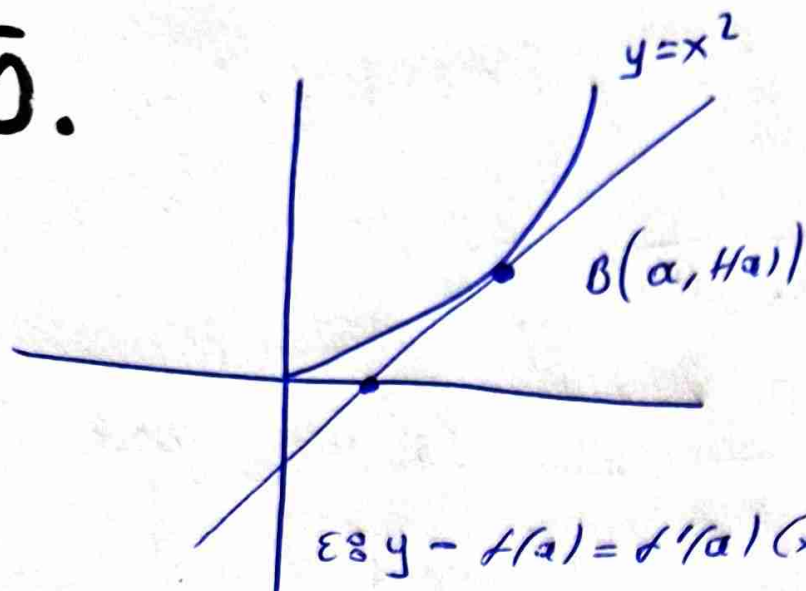
$$\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2(t)}{x^2(t)}}$$

$$\underline{t = t_1}$$

$$\theta'(t_1) = \frac{4 \cdot 2 - 4 \cdot 1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{16}{4}}$$

$$\Rightarrow \theta'(t_1) = 1 \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \left| \theta'(t_1) = \frac{1}{5} \right|.$$

5.



ψάχνω το
ρυθμό μεταβολής
της τριγωνομετρίας
του σήματος στην
την εξωτερική
ευθεία με τον
 $x'x$.

Σχόλια

Το υλικό σήμα M οπών και να βρισκεται
πάνω στην $y = x^2$ σχετίζονται εξωτερικά
ευθεία η οποία με τη σειρά της
τέρμα των $x'x$ σε σήμα με τριγωνομετρίας
ο οποία μεταβάλλεται διαρκώς με
ένα ρυθμό ο οποίος είναι μεταβλητός.

Αρα $\varepsilon: y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Εφαρμόζοντας στο τυχαίο
σημα $M(a, f(a))$ $y - a^2 = 2a(x - a)$

στο τυχαίο

σημα $M(a, f(a))$

Σημείο στην $x'x$
 $y = 0$

$$-a^2 = 2a(x - a)$$

$$-a = 2(x - a)$$

$$- \alpha = 2x - 2\alpha$$

$$2\alpha - \alpha = 2x$$

$$\alpha = 2x$$

$$x = \frac{\alpha}{2}$$

→ Η τετρήραση του
σημασ τωρη τη
εφαρμοσμεν εδωκε
με τον $x'x$.

$$x(t) = \frac{\alpha(t)}{2}$$

$$x'(t) = \frac{\alpha'(t)}{2}$$

$$t = t_1$$

$$x'(t_1) = \frac{1}{2}$$

→ ο αριθμ μεταβολη

την τετρήραση

του του σημασ τωρη
την εφαρμοσμεν εδωκε με τον $x'x$.

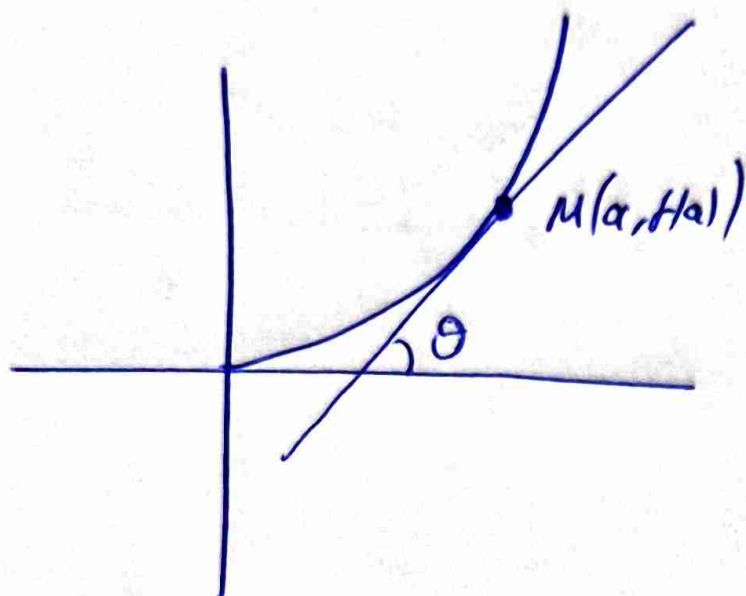
→ Το $\alpha(t)$ μετα
το ποσο που
εναρτε το $x(t)$
σε ολα τα
προηγουμενα
ποσοδιασμετα
δυναται

$$\alpha(t) = 2$$

$$\alpha'(t_1) = 1$$

6.

$$y = x^2$$



ψάχνω το
 ποθω μεταβολή
 της γωνίας θ
 ή οθώρα και
 η γωνία που
 σχηματίζει η
 εφαπτομένη στο
 τυχαίο σημείο Μ
 με τον x'x.

$$\varepsilon \varphi y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$f(a) = a^2$$

$$f'(a) = 2a$$

Γνωρίζω ότι

$$\varepsilon \varphi \hat{\theta} = f'(a)$$

$$\varepsilon \varphi \hat{\theta} = 2a$$

$$\varepsilon \varphi \theta(t) = 2a(t)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \theta'(t) = 2a'(t)$$

$$\theta'(t) = 2a'(t) \sin^2 \theta(t)$$

$$\theta'(t) = 2a'(t) \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 \theta(t)}$$

$$\theta'(t) = \frac{2a'(t)}{1 + [2a(t)]^2}$$

για $t = t_1$:

$$\theta'(t_1) = \frac{2}{17}$$

7. Ας υποθέσουμε τώρα ότι

$$x'(t) > 0.$$

Να ελεγχθεί αν υπάρχει
σημείο στο οποίο ο ρυθμός
μεταβολής της τεταγμένης
να είναι διπλάσιος του ρυθμού
μεταβολής της τετρήκας.

$$y'(t) = 2x'(t)$$

οπότε $y(t) = x^2(t)$

$$y'(t) = 2x(t) x'(t)$$

$$\cancel{2x'(t)} = 2x(t) \cancel{x'(t)}$$

αφού $x'(t) > 0$

$$\cancel{2} = \cancel{2} x(t)$$

$$x(t) = 1$$

$$y(t) = 1$$

$$A(1, 1)$$

Εργασία Ρυθμού μεταβολής

Εστω υλικό σωμα Μ που κινείται
κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3, x > 0$

Η τεττιραση του Μ ελάττωνεται κατά 1.

Εστω t_1 η χρονική στιγμή που το
Μ διαρχεται από τη θέση $A(1, 1)$

Να βρεθεί τη χρονική στιγμή t_1
ο ρυθμός μεταβολής.

1. τη ταχυτητα του Μ

2. του εμβαδού του τριγώνου $\triangle OAC$ όπου
Ο η αρχή των αξόνων και Κ η προβολή
του Μ στον $x'x$

3. της περιμέτρου του ορθογώνιου, ΜΚΟΛ
όπου Ο αρχή αξόνων, Κ προβολή στον $x'x$
και Λ προβολή στον $y'y$.

4. του εμβαδού του κύκλου με κέντρο
το M ο οποίος εφαρτίζεται στον $\chi'\chi$.

5. τη απόστασή του M από την
αρχή των αξόνων.

6. τη γωνία $\hat{\Theta} = \angle O'MK$ όπου O αρχή
αξόνων και K προβολή στον $\chi'\chi$

7. τη τεττιμένη του σιρμού σπέρω
τη εφαπτομένη στο $M(a, f(a))$
με τον $\chi'\chi$.

8. τη γωνία ω που σχηματίζει η
εφαπτομένη τη $(f$ στο $M(a, f(a))$
με τον $\chi'\chi$.