# Προετοιμασία για το διαγωνισμα της αλγεβρας

Β' Λυκειου

8/3/26.

$\boxed{4:30-6:30}$

# Θεωρια

**1.** Η διαιρεση του $P(x)$ με το $x-\rho$ δινει υπολοιπο $P(\rho)$

Αποδειξη

$$P(x) = (x-\rho)\,\pi(x) + \upsilon$$

$x=\rho$

$$P(\rho)=(\rho-\rho)\,\pi(\rho)+\upsilon$$

$$P(\rho)=\upsilon$$

**2.** Το $x-\rho$ ειναι παραγοντας του $P(x)$ αν και μονο αν $P(\rho)=0$.

Αποδειξη

"$\Longrightarrow$" Αν το $x-\rho$ παραγοντας νδο $P(\rho)=0$

$$P(x) = (x-\rho)\cdot\pi(x)$$

$x=\rho$

$$P(\rho) = (\rho-\rho)\,\pi(\rho)$$

$$P(\rho) = 0 \quad ✓$$

"$\Leftarrow$" Αν το $P(\rho)=0$ νδο $x-\rho$ παραγοντας

$$P(x) = (x-\rho)\,\pi(x) + \upsilon$$

$\underline{x=\rho}$

$$P(\rho) = (\rho-\rho)\,\pi(\rho) + \upsilon$$

$$0 = 0 + \upsilon$$

$$\upsilon = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P(x) = (x-\rho)\,\pi(x)}}$$

το $x-\rho$ παραγοντας

**3.** Νδο η ακεραια ριζα ενος πολυωνυμου διαιρει το σταθερο ορο.

## Αποδειξη

$$P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Εστω οτι $\rho$ ριζα ακεραια.

$$P(\rho) = 0 \Leftrightarrow a_v \rho^v + a_{v-1} \rho^{v-1} + \dots + a_1 \rho + a_0 = 0$$

$$\rho \left( a_v \rho^{v-1} + a_{v-1} \rho^{v-2} + \dots + a_1 \right) = -a_0$$

Το $\rho$ παραγοντας του $a_0$

αρα το $\rho$ διαιρει το σταθερο ορο.

4. Ο αριθμος ν λεγεται βαθμος του πολυωνυμου, τα σταθερα πολυωνυμα εχουν βαθμο μηδεν ενω το μηδενικο πολυωνυμο δεν εχει βαθμο.

5. Δυο πολυωνυμα ειναι ισα αν εχουν ιδιο βαθμο και ιδιους συντελεστες

6. Ο αριθμος ρ ειναι ριζα ενος πολυωνυμου αν το μηδενιζει δηλαδη αν $P(\rho)=0$.

7. Ο σταθερος ορος του πολυωνυμου $P(x)$ ειναι το $P(0)$ ενω το γινομενο των συντελεστων του πολυωνυμου ειναι $P(1)$.

## Ταυτοτητα ευκλειδειας διαιρεσης

1. $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$

ο βαθμος του υπολοιπου πρεπει να ειναι μικροτερος του διαιρετη.

2. Αν το $\upsilon(x)=0$ δηλαδη $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)$ τοτε η διαιρεση λεγεται τελεια. Τοτε λεμε οτι:

→ Το $\Delta(x)$ διαιρειται απο το $\delta(x)$

→ Το $\delta(x)$ διαιρει το $\Delta(x)$

→ Το $\delta(x)$ ειναι διαιρετης ή παραγοντας του $\Delta(x)$

# Ασκηση 1

Εστω πολυωνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + 2$

Το $x-1$ ειναι παραγοντας;

$\hookrightarrow P(1) = 2 \neq 0$ ΟΧΙ !

Το $x+1$ ειναι παραγοντας;

$\hookrightarrow P(-1) = 0$ ΝΑΙ ΕΙΝΑΙ.

Το $(x-1)(x+1)$ ειναι παραγοντας;

$\hookrightarrow$ ΟΧΙ γιατι το $x-1$ δεν ειναι!

# Η διαιρεση $P(x):(x-\rho)$

Στην ουσια μιλαμε για διαιρεση οπου ο διαιρετης ειναι πολυωνυμο 1ου βαθμου.

Εδω γνωριζουμε οτι:

1. $P(x) = (x-\rho)\pi(x) + \upsilon$ οπου $\upsilon = P(\rho)$.
2. Αν $P(x) = (x-\rho)\pi(x)$ δηλαδη το $x-\rho$ ειναι παραγοντας του $P(x)$ τοτε $P(\rho)=0$

Για την ακριβεια ολα τα παρακατω ειναι ισοδυναμα.

$$\left.\begin{array}{l}
\rightarrow \text{Το } x-\rho \text{ διαιρει το } P(x) \\
\rightarrow \text{Η διαιρεση } P(x):(x-\rho) \text{ ειναι τελεια.} \\
\rightarrow \text{Το } x-\rho \text{ ειναι παραγοντας του } P(x) \\
\rightarrow \text{Το } \rho \text{ ειναι ριζα του } P(x) \\
\rightarrow \text{Το } P(x) \text{ διαιρειται με το } x-\rho \\
\rightarrow \text{Το } x-\rho \text{ ειναι διαιρετης του } P(x)
\end{array}\right\} P(\rho)=0.$$

## Προσοχη

1. Εαν το $P(x)$ εχει παραγοντα το $(x-\alpha)(x-\beta)$ αν και μονο αν το $P(x)$ εχει παραγοντες το $x-\alpha$ και το $x-\beta$.

2. Ενα πολυωνυμο $P(x)$ με βαθμο $\nu$ εχει το πολυ $\nu$ ριζες. Εαν καποια απο αυτες τις ριζες ειναι ακεραιος αριθμος τοτε σιγουρα διαιρει τον σταθερο ορο του $P(x)$. Εαν ο σταθερος ορος δεν εχει ακεραιους διαιρετες τοτε το $P(x)$ δεν εχει ακεραιες ριζες.

# Ασκηση 19

Δινεται το πολυωνυμο

$P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x + \lambda - 2$

Να βρεις το βαθμο του $P(x)$ για τις διαφορες τιμες του $\lambda \in R$.

Ειναι $\lambda^3 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) = 0$

$\lambda = 0$ ή $\lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 = 4$

$\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$.

1. Αν $\lambda = 0$ τοτε $P(x) = -2$ ειναι σταθερο πολυωνυμο με βαθμο μηδεν.

2. Αν $\lambda = 2$ τοτε $P(x) = 0$ ειναι μηδενικο πολυωνυμο και δεν εχει βαθμο.

3. Αν $\lambda = -2$ τοτε $P(x) = 8x - 4$ ειναι 1ου βαθμου πολυωνυμο.

4. Αν $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq -2$

# Σχόλιο

Το πολυώνυμο

$$P(x) = \lambda x^4 - (\lambda - 1)x^2 + 5x + 6$$

$\lambda \in R$

**δεν** είναι πάντα 4ου βαθμού

Μόνο αν $\lambda \neq 0$ είναι 4ου βαθμού

# Ασκηση 23

Να γινουν οι παρακατω διαιρεσεις

ⓐ $(2x^4 - 7x^3 + 18x + 2) : (x^2 - 3x + 1)$

## Καθετη διαιρεση

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - 7x^3 + 18x + 2 & x^2 - 3x + 1 \\
\hline
-[2x^4 - 6x^3 + 2x^2] & 2x^2 - x - 5 \\
\hline
-x^3 - 2x^2 + 18x + 2 & \\
-[-x^3 + 3x^2 - x] & \\
\hline
-5x^2 + 19x + 2 & \\
-[-5x^2 + 15x - 5] & \\
\hline
14x + 7 &
\end{array}
$$

## Ταυτοτητα Ευκλειδιας διαιρεσης

$$2x^4 - 7x^3 + 18x + 2 = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 - x - 5) + 4x + 7$$

Η συγκεκριμενη διαιρεση δεν γινεται να γινει με αλλο τροπο.

(β) $(x^3-5x+3):(x+2)$

Σε αυτή τη διαίρεση ο διαιρέτης $\delta(x)=x+2$ είναι 1ου βαθμού. Εννοείται ότι μπορούμε να εκτελέσουμε κάθετη διαίρεση. Όταν ο διαιρέτης είναι της μορφής $x-\rho$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Horner.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 3 & -2 \\ \downarrow & -2 & 4 & 2 & \\ \hline \underbrace{1 \quad -2 \quad -1}_{\text{πηλίκο}} & & & \boxed{5} & \end{array}$$

$\boxed{5} \rightarrow$ υπόλοιπο.

$$\text{Είναι } \underbrace{x^3-5x+3}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x+2)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(x^2-2x-1)}_{\pi(x)} + \underbrace{5}_{\upsilon}$$

# Ασκηση 24

Δινεται $P(x) = 2x^3 + x^2 - 22x + 24$

(α) ΝΔΟ το $2x-3$ ειναι παραγοντας του $P(x)$

Αρκει νδο η $P(x) : (2x-3)$ ειναι τελεια.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | -22 | 24 | $\frac{3}{2}$ |
| ↓ | 3 | 6 | -24 | |
| 2 | 4 | -16 | 0 | |

(β) Να παραγοντοποιηθει το $P(x)$

Ειναι $P(x) = \left(x-\frac{3}{2}\right)(2x^2+4x-16)$.

συμφωνα με την ταυτοτητα της ευκλειδειας διαιρεσης.

$$P(x) = (2x-3)(x^2+2x-8).$$

# Ασκηση 25

Δινεται $P(x)=x^4-3x^3+ax^2+(a^2-4a-8)x+a^2-21$

Να βρεθει το α αν η διαιρεση $P(x):(x^2+1)$ ειναι τελεια.

$$\begin{array}{l|l} x^4-3x^3+ax^2+(a^2-4a-8)x+a^2-21 & x^2+1 \\ \hline -[x^4+x^2] & x^2-3x+a-1 \\ -3x^3+(a-1)x^2+(a^2-4a-8)x+a^2-21 & \\ -[-3x^3-3x] & \\ (a-1)x^2+(a^2-4a-5)x+a^2-21 & \\ -[(a-1)x^2+a-1] & \\ (a^2-4a-5)x+a^2-a-20 & \end{array}$$

Για να ειναι τελεια η διαιρεση πρεπει

$$\begin{cases} a^2-4a-5=0 \iff \boxed{a=5} \text{ ή } \boxed{a=-1} \\ a^2-a-20=0 \quad \boxed{a=5} \quad \boxed{a=-4} \end{cases}$$

Αρα $a=5$

# Ασκηση 26

Δινεται το πολυωνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 14x + B$.

Το $x-3$ ειναι παραγοντας του $P(x)$ και

το υπολοιπο της διαιρεσης του $P(x)$ με

το $x+1$ ειναι 36.

Να βρεθουν τα $\alpha, B$ και να παραγοντοποιηθει

το $P(x)$

Αφου το $x-3$ ειναι παραγοντας ειναι $P(3)=0$

Αφου το υπολοιπο της διαιρεσης του $P(x)$ με

το $x+1$ ειναι 36 ειναι $P(-1)=36$.

Αρα $\begin{cases} P(3)=0 \Leftrightarrow 27 + 9\alpha - 42 + B = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + B = 15 \\ P(-1)=36 \Leftrightarrow -1 + \alpha + 14 + B = 36 \Leftrightarrow \alpha + B = 23 \end{cases}$

Συνεπως $\alpha = -1$ και $B = 24$

Αρα $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

Αφου το $x-3$ ειναι παραγοντας το 3 ειναι ριζα

του $P(x)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | -14 | 24 | 3 |
| ↓ | 3 | 6 | -24 | |
| 1 | 2 | -8 | 0 | |

$P(x) = (x-3)(x^2+2x-8)$

$P(x) = (x-3)(x+4)(x-2)$.

# Ασκηση 27

(α) Δινεται το $P(x)=x^3+4x^2+ax+B$ το οποιο

εχει παραγοντα το $x^2+2x-3$

Να βρεθουν τα $a, B$

Ειναι $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

Αρα $P(-3)=0 \iff -3a+B=-9$ και $P(1)=0 \iff a+B=-5$ $\Big\}$ $a=1$, $B=-6$

(β) Δινεται το $P(x)=x^3+ax^2+B$ το οποιο

εχει παραγοντα το $x^2-4x+4$.

Να βρεθουν τα $a, B$.

Εδω δεν δουλευει ο προηγουμενος τροπος.

Ειναι $x^2-4x+4=(x-2)^2$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & a & 0 & B & 2 \\ \downarrow & 2 & 2a+4 & 4a+8 & \\ 1 & a+2 & 2a+4 & \boxed{4a+B+8} & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & a+2 & 2a+4 & 2 \\ \downarrow & 2 & 2a+8 & \\ 1 & a+4 & \boxed{4a+12} & \end{array}$$

Πρεπει

$$\begin{cases} 4a+B+8=0 \\ 4a+12=0 \end{cases}$$

$\boxed{a=-3}$

$\boxed{B=4}$

# Ασκηση 28

Το υπολοιπο της $P(x):(x-2)$ ειναι $1$

και με το $P(x):(x+3)$ ειναι $-14$

Να βρεθει το υπολοιπο της διαιρεσης

του $P(x)$ με το $x^2+x-6$.

Δινεται οτι $P(2)=1$ και $P(-3)=-14$

Συμφωνα με την ταυτοτητα ευκλειδειας διαιρεσης

$$P(x)=\underbrace{(x^2+x-6)}_{\text{2ου βαθμου}}\pi(x)+u(x).$$

2ου βαθμου αρα $u(x)$ 1ου βαθμου

Συνεπως $\boxed{P(x)=(x^2+x-6)\pi(x)+ax+B.}$

$P(2)=2a+B=1$

$P(-3)=-3a+B=-14$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+B=1 \\ -3a+B=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a=3 \\ B=-5 \end{matrix}$$

(η) $6x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4 = 0$

Διαιρετά του 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -5 | -15 | 0 | 4 | -1 |
| ↓ | -6 | 11 | 4 | -4 | |
| 6 | -11 | -4 | 4 | 0 | |

$(x+1)(6x^3 - 11x^2 - 4x + 4) = 0$

$x+1=0$ ή $6x^3 - 11x^2 - 4x + 4 = 0$

$\boxed{x=-1}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | -11 | -4 | 4 | 2 |
| ↓ | 12 | 2 | -4 | |
| 6 | 1 | -2 | 0 | |

$(x-2)(6x^2 + x - 2) = 0$

$x-2=0$ ή $6x^2 + x - 2 = 0$

$\boxed{x=2}$ $\boxed{x = \frac{1}{2}}$ $\boxed{x = -\frac{2}{3}}$

θ) $\sqrt{x+2}+x=4$

$x+2\geq 0$ και $4-x\geq 0$

$x\geq -2$ $\quad x\leq 4$

$x\in[-2,4]$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=4-x$

$x+2=(4-x)^2$

$x+2=16-8x+x^2 \quad \Leftrightarrow$

$x^2-9x+14=0$

$\boxed{x=2}$ $\quad \cancel{\boxed{x=7}}$

ι) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$

$3x+1\geq 0$ και $x+4\geq 0$

$x\geq -\frac{1}{3}$ $\quad x\geq -4$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=1+\sqrt{x+4}$

$x\in[-\frac{1}{3},+\infty)$

$3x+1=1+2\sqrt{x+4}+x+4$

$2x-4=2\sqrt{x+4}$

$x-2=\sqrt{x+4}$

πρπ $\quad x-2\geq 0$

$x\geq 2$

$(x-2)^2=x+4$

άρα $x\in[2,+\infty)$

$x^2-4x+4=x+4$

$x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$

$\cancel{\boxed{x=0}}$ $\quad \boxed{x=5}$

(ρ) $x^6 - 7x^2 - 6 = 0$

$(x^2)^3 - 7x^2 - 6 = 0$ $\qquad x^2 = t$

$t^3 - 7t - 6 = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 & -1 \\ \downarrow & -1 & 1 & 6 & \\ 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$(t+1)(t^2 - t - 6) = 0$

$t+1=0$ ή $t^2 - t - 6 = 0$

$t=-1$ $\qquad t=3$ $\qquad t=-2$

$x^2=-1$ $\qquad x^2=3$ $\qquad x^2=-2$

Αδυνατη $\qquad \boxed{x=\pm\sqrt{3}}$ $\qquad$ Αδυνατη.

(ν) $1 - \dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{3x^2}{x^2-4} + \dfrac{3}{2-x}$

$1 - \dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{3x^2}{(x-2)(x+2)} - \dfrac{3}{x-2}$

Περιορισμοι

$x \neq 2$

$x \neq -2$

ΕΚΠ: $(x-2)(x+2)$

$(x-2)(x+2) - (2x-1)(x-2) = 3x^2 - 3(x+2)$

$x^2 - 4 - (2x^2 - 4x - x + 2) = 3x^2 - 3x - 6$

$x^2 - 4 - 2x^2 + 4x + x - 2 = 3x^2 - 3x - 6$

$-x^2 + 5x - 6 = 3x^2 - 3x - 6 \iff 4x^2 - 8x = 0$

$4x(x-2) = 0$

$\boxed{x=0}$ $\qquad \cancel{\boxed{x=2}}$

# Άσκηση 33

Να λυθούν οι ανισώσεις!

(α). $x^2-2x-3 \geq 0$

| $x$ | $-1 \quad 3$ |
|---|---|
| $x^2-2x-3$ | $+ \; 0 \; - \; 0 \; +$ |

$x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

(β) $4x^2+4x+1>0$

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ |
|---|---|
| $4x^2+4x+1$ | $+ \; 0 \; +$ |

$x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.

(γ) $x^2-3x+4 \leq 0$

| $x$ | |
|---|---|
| $x^2-3x+4$ | $+$ |

Αδύνατη!

(δ) $(x-2)(x^2-3x-4)(x^2+6x+9)(x^2-x+2)<0$

2 4 -1 -3

| $x$ | $-3 \quad -1 \quad 2 \quad 4$ |
|---|---|
| $x-2$ | $- \mid - \mid - \; 0 \; + \mid +$ |
| $x^2-3x-4$ | $+ \mid + \; 0 \; - \mid - \; 0 \; +$ |
| $x^2+6x+9$ | $+ \; 0 \; + \mid + \mid + \mid +$ |
| $x^2-x+2$ | $+ \mid + \mid + \mid + \mid +$ |
| $P(x)$ | $- \mid - \mid + \mid - \mid +$ |

$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (2, 4)$

ε) $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 < 0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | -15 | 19 | 30 | -1 |
| ↓ | -1 | 4 | 11 | -30 | |
| 1 | -4 | -11 | 30 | 0 | |

$(x+1)(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) < 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -4 | -11 | 30 | 2 |
| ↓ | 2 | -4 | -30 | |
| 1 | -2 | -15 | 0 | |

$(x+1)(x-2)(x^2 - 2x - 15) < 0$

-1 2 5 -3

$1 - 3 - 13 + 15$

$-16 + 16$

| x | | -3 | | -1 | | 2 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x+1 | − | | − | 0 | + | | + | | + |
| x-2 | − | | − | | − | 0 | + | | + |
| $x^2-2x-15$ | + | 0 | − | | − | | − | 0 | + |
| P(x) | + | | − | | + | | − | | + |

$x \in (-3, -1) \cup (2, 5)$.

③ $$\frac{(x+2)(x^2-9)}{-x^2-2x+3} \geq 0$$

Βρισκω τις ριζες καθε παραγοντα και φτιαχνω πινακακι.

| $x$ | | $-3$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ |
| $x^2-9$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $-x^2-2x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $P(x)$ | $+$ | ‖ | $+$ | | $-$ | ‖ | $+$ | | $-$ |

$$x \in (-\infty,-3) \cup (-3,-2] \cup (1,3]$$

η) $$\frac{x^3+6x^2-x}{x^2-x+3} < 2$$

Εδω μπορω να κανω "χιαστι" αφου το $x^2-x+3$ ειναι θετικη ποσοτητα αφου $\Delta<0$ και $\alpha>0$

$$x^3+6x^2-x < 2(x^2-x+3)$$

$$x^3+6x^2-x < 2x^2-2x+6$$

$$x^3+4x^2+x-6 < 0$$

$$(x-1)(x^2+5x+6) < 0$$

| $x$ | | $-3$ | | $-2$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^2+5x+6$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $P(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |

$$x \in (-\infty,-3) \cup (-2,1).$$

(κ) $\sqrt{x+7} \leq x+1$

Πρέπει $x+7 \geq 0$

$x \geq -7$

<u>και</u>

$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

άρα $x \geq -1$

$x+7 \leq (x+1)^2$

$x+7 \leq x^2+2x+1$

$0 \leq x^2+x-6$

| $x$ | $-3$ $\quad$ $2$ |
|---|---|
| $x^2+x-6$ | $+$ $0$ $-$ $0$ $+$ |

$x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$.

Συνεπώς δεκτά είναι $x \in [2, +\infty)$.

(λ) $x \geq \dfrac{x+8}{x-1}$

Εδώ το $x-1$ δεν έχει σταθερό πρόσημο συνεπώς δεν επιτρέπεται το "χιαστί"

Είναι $x - \dfrac{x+8}{x-1} \geq 0 \iff \dfrac{x^2-x}{x-1} - \dfrac{x+8}{x-1} \geq 0$

$\dfrac{x^2-x-x+8}{x-1} \geq 0 \iff \dfrac{x^2-2x+8}{x-1} \geq 0$

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2x+8$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | |
| $P(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | | |

$x \in [-2, 1) \cup [4, +\infty)$.

(θ) $\sqrt{2x+6} - \sqrt{9-x} \leq 0$

Πρέπει $2x+6 \geq 0$

$x \geq -3$

και

$9-x \geq 0$

$x \leq 9$

$\Leftrightarrow x \in [-3, 9]$

$\sqrt{2x+6} \leq \sqrt{9-x}$

$2x+6 \leq 9-x$

$3x \leq 3$

$x \leq 1$ άρα $x \in [-3, 1]$

(ι) $\sqrt{x+10} \geq x-2$

πρέπει $x+10 \geq 0$

$x \geq -10$

1. Αν $x-2<0$ δηλαδή $x<2$

τότε η ανίσωση είναι αόριστη δηλαδή $x \in [-10, 2)$

2. Αν $x-2 \geq 0$ δηλαδή $x \geq 2$ τότε

$x+10 \geq (x-2)^2 \Leftrightarrow x+10 \geq x^2-4x+4$

$0 \geq x^2-5x-6$

| $x$ | $-1 \quad 6$ |
|---|---|
| $x^2-5x-6$ | $+ \; 0 \; - \; 0 \; +$ |

$x \in [-1, 6]$

Συνολικά $x \in [-10, 6]$.

# Σχολιο

Οταν γνωριζω οτι

το $\kappa$ ειναι ριζα του πολυωνυμου

$$P(x) = x^4 - 5x - 1$$

Τοτε αυτο σημαινει οτι

$$P(\kappa) = 0$$

$$\kappa^4 - 5\kappa - 1 = 0$$

# Ασκηση

Εστω $P(x) = 12x^3 - 8x^2 - 10x + a$ το οποιο εχει παραγοντα το $3x+1$

**1.** Βρει το α

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | −8 | −10 | α | $-\frac{1}{3}$ |
| ↓ | −4 | 4 | 2 | |
| 12 | −12 | −6 | $\boxed{a+2=0}$ | |

$\Rightarrow \underline{\underline{a=-2}}$

**2.** Να λυθει η ανισωση

$$P(x) \leq 3x+1$$

$$12x^3 - 8x^2 - 10x - 2 \leq 3x+1$$

$$12x^3 - 8x^2 - 13x - 3 \leq 0$$

Δοκιμη Horner με τα $\pm 1 \pm 3$

Δεν δουλευει Τιποτα!

Χασαμε!

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(12x^2 - 12x - 6\right)$$

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right) 6 \left(2x^2 - 2x - 1\right)$$

$$\boxed{P(x) = 2\,(3x+1)\,(2x^2 - 2x - 1)}$$

Η ανισωση πλεον γινεται.

$$P(x) \leq 3x + 1$$

$$2(3x+1)(2x^2 - 2x - 1) \leq 3x + 1$$

$$2(3x+1)(2x^2 - 2x - 1) - (3x+1) \leq 0$$

$$(3x+1)(4x^2 - 4x - 2 - 1) \leq 0$$

$$(3x+1)(4x^2 - 4x - 3) \leq 0$$

$$(3x+1)(4x^2-4x-3) \le 0$$

$-\frac{1}{3}$

$$\Delta = 16+48$$

$$\Delta = 64$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{8} \quad \frac{3}{2}, \; -\frac{1}{2}$$

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $3x+1$ | $-$ | $-$ 0 | $+$ | $+$ |
| $4x^2-4x-3$ | $+$ 0 | $-$ | $-$ 0 | $+$ |
| $Q(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right].$$

# Σχολιο

Οταν μια πολυωνυμικη συναρτηση $P(x)$ διερχεται απο σημειο $A(2,4)$ τοτε $P(2)=4$.

1. Σημειο τομης $x'x$ : $P(x)=0$
2. Η $C_p$ (γραφικη παρασταση του $P$) να ειναι πανω απο τον $x'x$
   $\Rightarrow P(x)>0$