Ασκηση 1

Να βρεθουν οι κοινες λυσεις των ανισωσεων.

$$\begin{cases} x^2 - 2|x| + 1 > 0 \\ x^2 - x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

- $x^2 - 2|x| + 1 > 0$

$|x|^2 - 2|x| + 1 > 0$

Θετω $|x| = t$

$t^2 - 2t + 1 > 0$

t		1	
t^2-2t+1	$+$		$+$

$t \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$t < 1$ ή $t > 1$

$|x| < 1$ ή $|x| > 1$

$-1 < x < 1$ ή $x > 1$ ή $x < -1$

$x \in (-1, 1)$ $\quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$x^2 - x \geq 0$

$x(x-1) \geq 0$

0 1

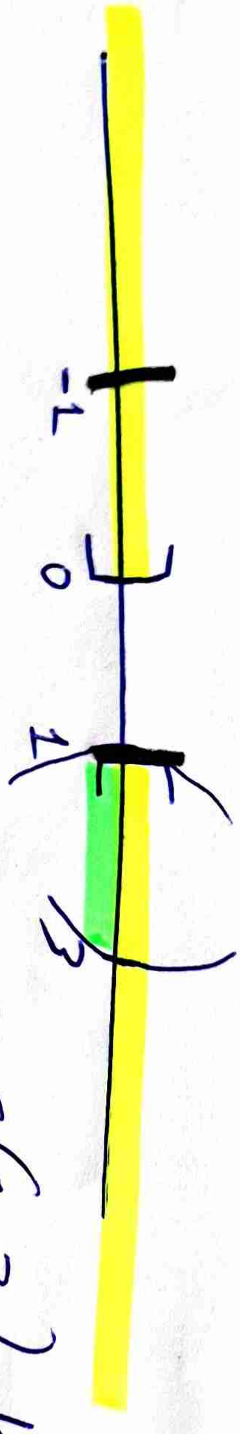
x		0		1	
x^2-x	$+$		$-$		$+$

$x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

$x^2 - 4x + 3 < 0$

x		1		3	
x^2-4x+3	$+$		$-$		$+$

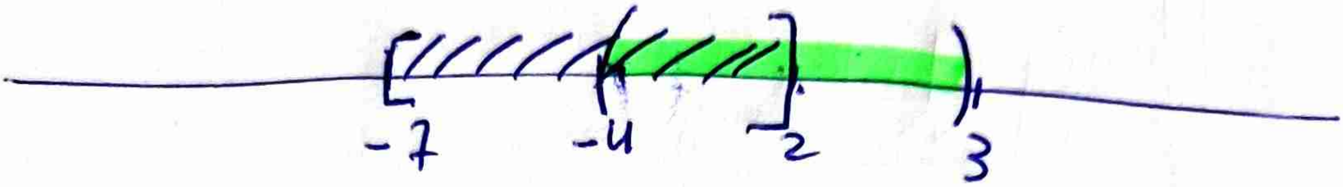
$x \in (1, 3)$.



$x \in (1, 3)$

Ασκηση 2.

$x \in [-7, 2]$ $x \in (-4, 3)$



$x \in (-4, 2]$

Ασκήσεις

1. $(\lambda-1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 2 = 0$

$\Delta > 0$ $\qquad\qquad$ $\lambda \neq 1$

$(-2\lambda)^2 - 4(\lambda-1)(3\lambda-2) > 0$

$4\lambda^2 - 4(3\lambda^2 - 2\lambda - 3\lambda + 2) > 0$

$4\lambda^2 - 12\lambda^2 + 8\lambda + 12\lambda - 8 > 0$

$-8\lambda^2 + 20\lambda - 8 > 0$

$\boxed{-2\lambda^2 + 5\lambda - 2 > 0}$

$\Delta = 25 - 4(-2)(-2)$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$\lambda = \dfrac{-5 \pm 3}{-4}$ $\quad \frac{1}{2}, \quad 2$

λ		$\frac{1}{2}$	2	
$-2\lambda^2+5\lambda-2$	$-$	$+$		$-$

$\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$\Rightarrow \lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2)$.

2.

$$-4x^2+(\lambda+3)x-\lambda=0$$

$$\Delta<0$$

$$(\lambda+3)^2-4(-4)(-\lambda)<0$$

$$\lambda^2+6\lambda+9-16\lambda<0$$

$$\lambda^2-10\lambda+9<0$$

λ		1		9	
$\lambda^2-10\lambda+9$	+		-		+

$$\lambda\in(1,9).$$

3. $x^2 + (\lambda+5)x - \lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0.$

$\Delta > 0$

$(\lambda+5)^2 - 4(-\lambda^2+2\lambda+8) > 0$

$\lambda^2 + 10\lambda + 25 + 4\lambda^2 - 8\lambda - 32 > 0$

$5\lambda^2 + 2\lambda - 7 > 0$

λ		$-\frac{7}{5}$		1	
$5\lambda^2+2\lambda-7$	$+$		$-$		$+$

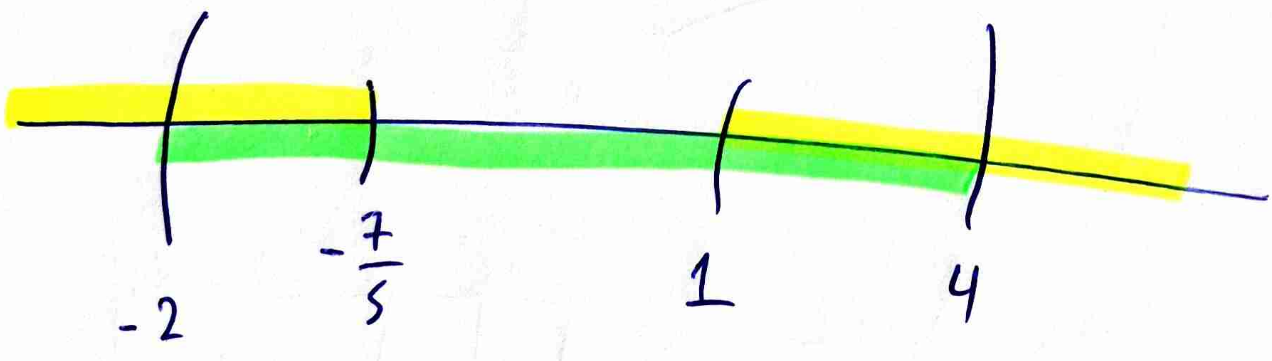
$\lambda \in (-\infty, -\frac{7}{5}) \cup (1, +\infty).$

$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$

$-\lambda^2 + 2\lambda + 8 > 0$

λ		-2		4	
$-\lambda^2+2\lambda+8$	$-$		$+$		$-$

$\lambda \in (-2, 4)$



$x \in (-2, -\frac{7}{5}) \cup (1, 4).$

4. $x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda = 0$

$\Delta > 0$

$(\lambda-3)^2 - 4\lambda > 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4\lambda > 0$

$\lambda^2 - 10\lambda + 9 > 0$

λ		1		9	
$\lambda^2 - 10\lambda + 9$	+		-		+

$\lambda \in (-\infty, 1) \cup (9, +\infty)$

5. $(\lambda+5)x^2 + (\lambda+2)x + 1$

$\Delta < 0$ και $\underline{\underline{\lambda \neq -5}}$

$(\lambda+2)^2 - 4(\lambda+5) < 0$

$\lambda^2 + \cancel{4\lambda} + 4 - \cancel{4\lambda} - 20 < 0$

$\lambda^2 - 16 < 0$

λ		-4		4	
λ^2-16	$+$		$-$		$+$

$\lambda \in (-4, 4)$

6. $(\lambda-1)x^2+4x+\lambda+2$ Θετικό

$\Delta<0$ και $\lambda-1>0$

$4^2-4(\lambda-1)(\lambda+2)<0$ $\lambda>1$

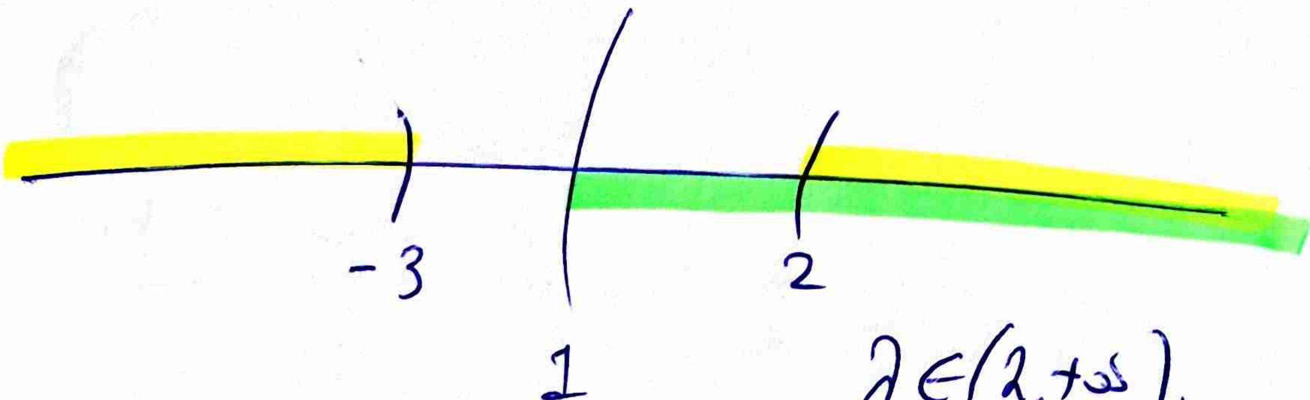
$16-4(\lambda^2+\lambda-2)<0$

$4-\lambda^2-\lambda+2<0$

$-\lambda^2-\lambda+6<0$

λ		-3		2	
$-\lambda^2-\lambda+6$	$-$		$+$		$-$

$\lambda\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$



$\lambda\in(2,+\infty)$.

7.

$$\underbrace{-x^2+(\lambda-5)x+\lambda-8 \le 0}_{\text{Αληθεύει.}}$$

Αρνητικό: $-x^2+(\lambda-5)x+\lambda-8$

$\Delta \le 0$ και $\alpha < 0$

$-1 < 0$ ✓

$$(\lambda-5)^2-4(-1)(\lambda-8)\le 0$$

$$\lambda^2-10\lambda+25+4(\lambda-8)\le 0$$

$$\lambda^2-10\lambda+25+4\lambda-32\le 0$$

$$\lambda^2-6\lambda-7\le 0$$

λ		-1		7	
$\lambda^2-6\lambda-7$	$+$		$-$		$+$

$\lambda \in [-1, 7]$

8. $x^2 - \lambda x + \lambda - 3 = 0$.

$\Delta = \lambda^2 - 4(\lambda - 3)$

$\Delta = \lambda^2 - 4\lambda + 12$

$\Delta^* = 16 - 4 \cdot 12 = 16 - 48 < 0$

αρα αφου $\Delta^* < 0$ το τριωνυμο

$\Delta = \lambda^2 - 4\lambda + 12$ διατηρει

σταθερο προσημο.

ομοσημο του α.

$\Delta > 0$ ✓

9. Νδο $27 - (x+2)^2 > -2(x-3)(x+3)$

$27 - (x^2+4x+4) > -2(x^2-9)$

$27 - x^2 - 4x - 4 > -2x^2 + 18$

$x^2 - 4x + 5 > 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$

αρα το $x^2 - 4x + 5$ διατηρει

σταθερο προσημο ομοσημο

του α αρα θετικο.

10. α) $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2}) = (x-1)(2x+1)$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$ — 1, $-\frac{1}{2}$

β) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

$\Delta = 0$

Β' τρόπος

Αφού $\Delta = 0$ έχω διπλή ρίζα

$x_1 = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$

Άρα $4x^2 - 4x + 1 = 4(x - \frac{1}{2})^2 =$

$= 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) =$

$= (2x-1)(2x-1) = (2x-1)^2$

1. Δίνεται το τριώνυμο $A = x^2 - 4x + 3$.

(α) Να βρεθεί πίνακας προσήμου.

x		1		3	
x^2-4x+3	+		−		+

(β) Να λυθεί η ανίσωση $A \leq 0$

$$A \leq 0$$

$$x \in [1, 3].$$

(γ) Να απλοποιηθεί η παράσταση K αφού πρώτα βρεθούν τα $x \in R$ ώστε να ορίζεται

$$K = \frac{x^2 - 1}{A}.$$

Η K ορίζεται αν $x \in R - \{1, 3\}$.

$$K = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-3)} = \frac{x+1}{x-3}$$

(δ) Να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης

$$\ominus = \frac{\left(\frac{2026}{2025}\right)^2 - 4\cdot\frac{2026}{2025} + 3}{0{,}9^2 - 4\cdot 0{,}9 + 3} < 0$$

$\oplus$

Το $\frac{2026}{2025} \in (1,3)$ άρα $\left(\frac{2026}{2025}\right)^2 - 4\frac{2026}{2025} + 3 < 0$

Το $0{,}9 \in (-\infty, 1)$ άρα $0{,}9^2 - 4\cdot 0{,}9 + 3 > 0$

(ε) Αν $\lambda \in (-1,1)$ να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης $K = \lambda^2 - 4|\lambda| + 3$.

Αφού $\lambda \in (-1,1) \Rightarrow -1 < \lambda < 1$

$|\lambda| < 1$

$|\lambda|^2 - 4|\lambda| + 3 > 0$