

Προστοιραδια
Διαγωνισματος

8/3/26

ΕΤΕΛΕΥΣΕΝ
ΥΔΥ

25 εως 32

Μπαρτα

Θαυρια

1.38	2.9	3.19
1.39	2.10	3.20
1.40	2.11	3.21
1.41		
1.42	2.12	3.22
1.43		
1.44		
1.45		
1.46		
1.47		
1.48		
1.49		

Άσκηση 505 1

Η $f(x) = ax^4 + bx^3$ παρουσιάζει τοπικό
ακρότατο στο 1 το -1 . Βρε a, b .

- Άρα η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1.
- Το 1 είναι τοπικό του f .
- Η f παρ/κη στο 1.

Από Fermat $f'(1) = 0$

Επίσης $f(1) = -1$.

$$\text{Άρα } f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$$

$$\begin{cases} f'(1) = 4a + 3b = 0 \\ f(1) = a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 3b = 0 \\ -3a - 3b = +3 \end{cases}$$

$$a = 3$$

$$b = -4$$

Άσκηση 202

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισμένη ώστε

$$(x-1)f(x) \geq e^{x-1} - 1 \quad \forall x > 0$$

$$\text{Νόο } f(1) = 1$$

Από ανίσωτητα

σε ισότητα

$\Rightarrow$ Fermat

$$\text{Αφού } (x-1)f(x) \geq e^{x-1} - 1$$

$$(x-1)f(x) - e^{x-1} + 1 \geq 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\varphi(x)}$$

$$\varphi(x) \geq 0$$

$$\varphi(x) \geq \varphi(1)$$

Έστω ελάχιστο στο 1

Ακροατα στο 1

φ παρ/κη στο 1

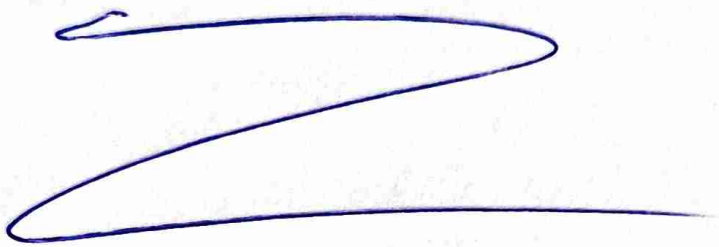
Το 1 εσωτερικό του $(0, +\infty)$

$$\Rightarrow \text{Fermat } \varphi'(1) = 0.$$

$$\psi'(x) = f(x) + (x-1)f'(x) - e^{x-1}$$

$$\psi'(1) = f(1) - 1 = 0$$

$$f(1) = 1.$$



Άσκηση 505 3

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παράγωγη με $f'(0) = 1$

$$\forall x \quad f(f(x)) + e^{f(x)} = e^x - x$$

Νόο u f δν έχει ακρότατα

Έστω ότι u f έχει ακρότατο
στο x_0 . Η f παράγωγη στο x_0
και το x_0 εσωτερικό του $\mathbb{R}$.

Fermat $f'(x_0) = 0$

$$f'(f(x)) f'(x) + f'(x) e^{f(x)} = e^x - 1$$

$$\underline{x = x_0}$$

$$f'(f(x_0)) f'(x_0) + f'(x_0) e^{f(x_0)} = e^{x_0} - 1$$

$$0 + 0 = e^{x_0} - 1 \Rightarrow e^{x_0} = 1$$

$$\underline{\underline{x_0 = 0}}$$

Άρα $f'(0) = 0$ Άρα! γιατί $f'(0) = 1$
Άρα δν έχει ακρότατα.

$$\underline{\sum x \cdot \omega}$$

$$(f^2(x))' = 2f(x) f'(x)$$

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x)$$

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

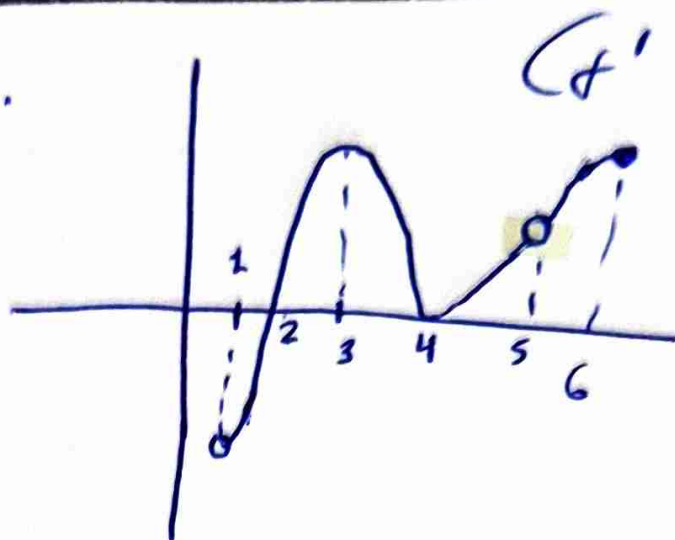
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) g'(x)$$

$$(\sin f(x))' = \cos f(x) \cdot f'(x)$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{f^2(x)} f'(x)$$

Άσκηση 505 4

$f: [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχ.



1. κρίσιμα σημεία

- Είναι τα εσωτερικά σημεία, που η $f(x)$ δεν είναι παραγωγισίμη.

~~1~~, (5) $\longrightarrow$ κρίσιμα σημεία,
Λόγω αλυσ. εσωτερικά.

- Π.7α τμή $f'(x)$ πάντα εσωτερικά.

(2), (4)

κρίσιμα σημεία.

2. πιθανά θέσει ακροατών

κρίσιμα σημεία $\in 2, 4, 5$

Άκρα κλειστά $\in 1, 6$.

Monozonia - wprost z

x	2	
f'	-	+
f		

x	3	4
f'		
f		

4. Еураси опиш

(a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f'(x)} = +\infty$

यदि $f'(x) > 0$

kovta 520 4

(B) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f'(x)}$ $\begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f'(x)} = -\infty \\ \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f'(x)} = +\infty \end{cases}$

Δα
υποψηφ.

Άσκηση 5055

Απόδειξη ανισότητας

Νόο $e^x + 50x > 2 + x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x > 0$

$$\underbrace{e^x + 50x - 2 - x + \frac{x^3}{6}}_{\varphi(x)} > 0$$

$$\varphi'(x) = e^x - 50x - 1 + \frac{3}{6}x^2$$

$$\varphi'(x) = e^x - 50x - 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\varphi'(0) = 0$$

$$\varphi''(x) = e^x - 50x + x$$

$$\varphi''(0) = 0$$

$$\varphi'''(x) = e^x + 1 + 50x > 0 \quad \text{για} \quad 50x > -1$$

x	0
φ'''	+
φ''	$\nearrow 0^+$
φ'	$\nearrow 0^+$
φ	$\nearrow$

$$x > 0 \Rightarrow \varphi'''(x) > \varphi'''(0) \Rightarrow \varphi''(x) > 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \varphi'(x) > \varphi'(0) \Rightarrow \varphi'(x) > 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) > 0$$

✓

Άσκηση 505 6

Δίνεται $f(x) = e^{x-1} - \ln x + 1, x > 0$

1. Συναρτησιότητα

$$f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \quad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$$

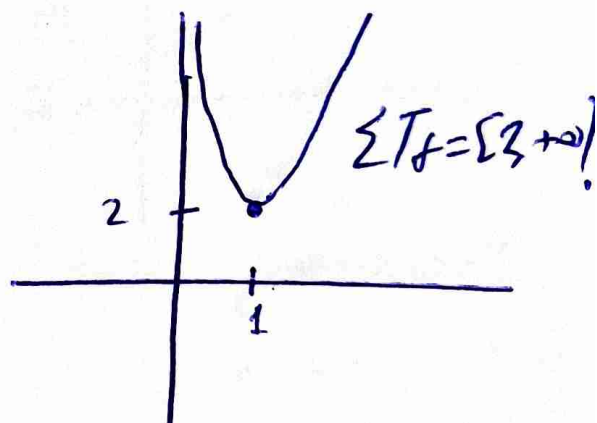
x	0	1
f''	+	+
f'	↘ -	↗ +
f	↘	↗

$$f(x) \geq f(1)$$

$$f(x) \geq 2$$

$$x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} - \ln x + 1) \stackrel{+\infty - \infty}{\underset{\text{k.π το } e^{x-1}}{=}} \frac{+\infty - \infty}{e^{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} \left(1 - \frac{\ln x}{e^{x-1}} + 1 \right) = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x e^x} = 0$$

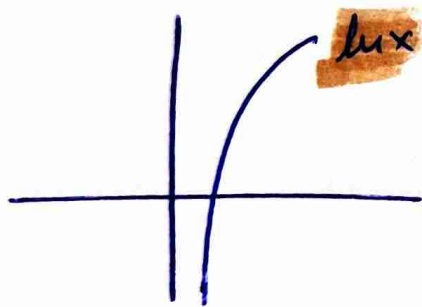
$\Sigma x > 2, 1, 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x \xrightarrow{0 \cdot \infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \xrightarrow{+\infty - \infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\Sigma x > 2, 1, 0$

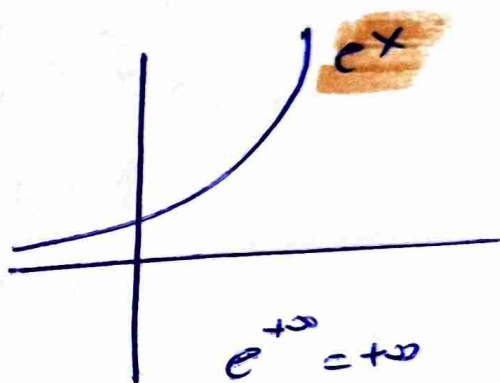


$$\ln(+\infty) = +\infty$$

$$\ln 0 = -\infty$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

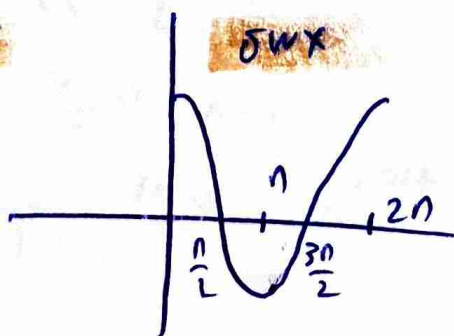
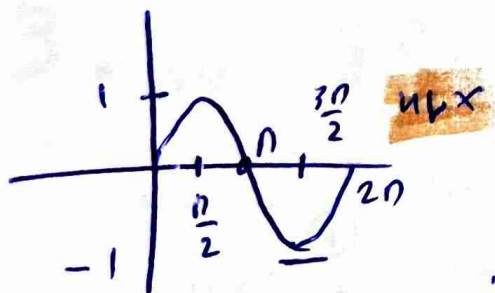


$$e^{+\infty} = +\infty$$

$$e^{-\infty} = 0$$

$$e^0 = 1$$

$$e' = e$$



2. Να λυθεί η εξίσωση $f(f(x^2+1)-1)=2$

$$f(f(x^2+1)-1)=2$$

Γνωρίζουμε ότι το $A(1,2)$ είναι ολικό ελάχιστο

από ΜΟΝΟ το $f(1)=2$

$$f(\underline{1})=2$$

$$\Rightarrow f(x^2+1)-1=1$$

$$f(\underline{1})=2$$

$$x^2+1=1$$

$$x^2=0$$

$$\underline{\underline{x=0}}$$

3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(x^{2026})=4$

• $f(x) \geq 2$ To " $=$ " $x=1$

• $f(x^{2026}) \geq 2$ To " $=$ " $x^{2026}=1 \Rightarrow x=1$ ή $x=-1$

$$f(x)+f(x^{2026}) \geq 4 \quad \text{To " $=$ " για } \underline{\underline{x=1}}$$

4. Bpd $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)(f(x)-2)}$

Еще $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \cdot \frac{1}{\underline{f(x)-2}} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$
 $\oplus$ так $f(x) \geq 2$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

5. На 2udu и известно $f(H(x)) > e + \ln \frac{e}{2}$

$$f(H(x)) > e + \ln e - \ln 2$$

$$f(H(x)) > e + 1 - \ln 2$$

$$f(H(x)) > f(2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f(x) \geq 2 \\ \bullet 2 \geq 2 \end{array} \right\} \forall x \geq 2 \text{ и } f \nearrow$$

Ара $f(x) > 2$

$x \neq 1$

Άσκηση 505 7

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

1. Να δο η $f(x)$ έχη παρασώσιμο κρίσιμο
σημείο το $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Επίσης $f(1) = 1$ άρα αφού $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$
η $f(x)$ είναι συνεχής στο 1.

Η $f(x)$ συνεχής στο $(0, 1)$ και $(1, \infty)$
ως π.σ.σ άρα η $f(x)$ συνεχής
σε όλο το πεδίο ορισμού της,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\ln x}{x} + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\ln x}{x}}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{2x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\ln x}{x} - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2}}{\frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x - 1)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Η $f(x)$ δεν είναι παρ/μη στο $x_0 = 1$.

αρα το $x_0 = 1$ είναι ισοδύναμο σημείο.

Προσέχουμε να βρούμε τη $f'(x)$

$$\underline{0 < x < 1}$$

$$f_1(x) = \frac{\ln x}{x} + 1$$

$$f_1'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2}$$

$$f_1'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\rightarrow f_1'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$\boxed{x = e}$$

$$T_0 \quad x_0 = 1$$

είναι το πρώτο

κρίσιμο σημείο.

$$\underline{x > 1}$$

$$f_2(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

$$f_2'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$f_2'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$\bullet \ln x \leq x - 1$$

$$\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$$

$$\ln 1 - \ln x \leq \frac{1}{x} - 1$$

$$-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$$

$$\underline{-\ln x - \frac{1}{x} + 1 \leq 0}$$

$$f_2'(x) \leq 0$$

$$T_0 \quad " " \quad \cancel{x \neq 1}$$

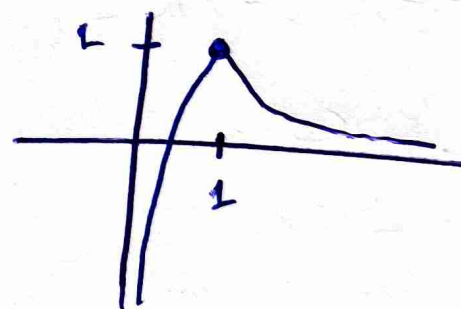
2. Να βρεθεί το σύνολο Τεμν των $f(x)$

Για το σύνολο Τεμν χρειαζόμαστε
μονοτονία και όρια.

x	0	1	e	$+\infty$
f_1'	+		+	-
f_2'			-	-
f'	+		-	-
f	$-\infty$	1		0

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$= -\infty (+\infty) + 1 = -\infty$$

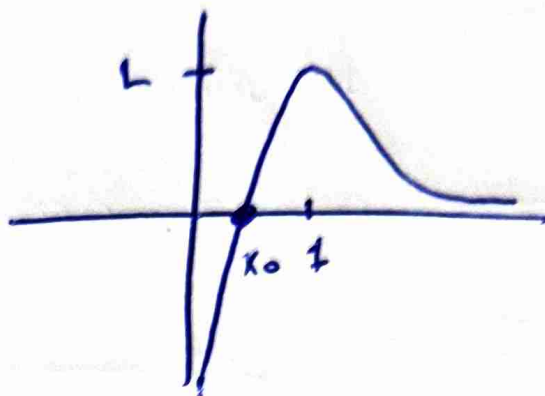


$$\bullet f(1) = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\Sigma T_f = (-\infty, 1]$$

3. Νόμο η επίμονου $f(x)=0$ έχου
μοναδική ρίζα.



$$0 < x \leq 1$$

• f συνεχής

• $f \uparrow$

$$\cdot \Sigma T_f = (-\infty, 1]$$

$$\tau_0 \quad 0 \in \Sigma T_f$$

αρα $\exists! x_0$ τ.ω

$$f(x_0) = 0$$

$$\frac{x > L}{\Sigma T_f = (0, 1)}$$

$$\tau_0 \quad 0 \notin \Sigma T_f.$$

4. Αν η $F(x)$ είναι παραγωγώσα τμή $f(x)$
στο $[1, +\infty)$ ισχύει $(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2)$
 $\forall x > 1$

$$F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & | & | & | & | & & \\ & 1 & \xi_1 & x & \xi_2 & x^2 & \end{array}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{F' = f'} F'(\xi_1) > F'(\xi_2) \Rightarrow \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x - 1)}$$

$$\Rightarrow F(x) - F(1) > \frac{F(x^2) - F(x)}{x} \Rightarrow xF(x) - xF(1) > F(x^2) - F(x) \\ xF(x) + F(x) > F(x^2) + xF(1) \Rightarrow (x+1)F(x) > F(x^2) + xF(1)$$

5. Να βρεθούν οι ασυμπτωτές

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ άρα η ευθεία $\varepsilon: x = 0$
είναι κατακόρυφη ασυμπτωτή

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ άρα η ευθεία $\varepsilon: y = 0$
είναι οριζόντια ασυμπτωτή
όσο $+\infty$.

Алгебра 8

$$\text{Состав} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 5$$

1. Bpd ∞ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{Состав} \quad \frac{f(x)}{x^2} = g(x)$$

$$f(x) = g(x)(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Bpd ∞ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 g(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \frac{x^2}{\ln x} =$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$= 5 \cdot +\infty$
 $= +\infty$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt[4]{x}) - \sin^2 x}{\sqrt[4]{x}}$$

or $f(0)=1$,
 $f'(0)=1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt[4]{x}) - (1 - \sqrt[4]{x})}{\sqrt[4]{x}} \quad \underline{\underline{\sqrt[4]{x} = t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 1 + t}{t} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \quad \Bigg| \quad \frac{f'(t) + 1}{1}$$

$$= \frac{1+1}{1} = 2.$$

Άσκηση 505 //

Δίνεται $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$

1. Να βρεθεί η επτοχική

$$f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$$

$$f''(x) = 2e^{x-2} - 2$$

$$\rightarrow f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2e^{x-2} - 2 = 0$$

$$e^{x-2} = 1$$

$$x-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=2}$$

x	2	
f''	-	+
f	↷	↶

$$y - f(2) = f'(2)(x-2)$$

$$y + 2 = -2(x-2)$$

$$y + 2 = -2x + 4$$

$$\boxed{y = -2x + 2}$$

$$\forall x < 2 \quad f \text{ κοίτη} \quad f(x) < -2x + 2$$

$$\forall x > 2 \quad f \text{ κυρτή} \quad f(x) > -2x + 2$$

2. Não $f(\sqrt{x}+2) > -2\sqrt{x}-2.$

То $\sqrt{x}+2 > 2$ апа $f(\sqrt{x}+2) > -2(\sqrt{x}+2)+2$

$$f(\sqrt{x}+2) > -2\sqrt{x}-2.$$

Άσκηση 505 9

Δίνεται $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

1. Να δειχθεί $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1} \quad \forall x > 0$

$$\underbrace{\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}_{g(x)} > 0$$

Αρκεί να δειχθεί

$$g(x) > 0$$

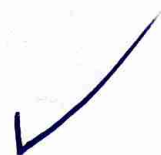
$$\forall x > 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} > 0 \quad g \uparrow$$

$$\forall x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0)$$

$$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} > 0$$



2. Να δο η f αντιστρέφεται και
να βρω το πασι σποκου τω
αντιστροφω

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$ αρα αντιστρέφεται.

$$D_{f^{-1}} = \Sigma T_f = (0, 1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

3. Να δο $f(x) > 2^{f(x)} - 1 \quad \forall x > 0$

$$f(x) + 1 > 2^{f(x)} \Rightarrow \ln(f(x) + 1) > \ln 2^{f(x)}$$

$$\ln(f(x) + 1) > f(x) \ln 2 \Rightarrow \frac{\ln(f(x) + 1)}{f(x)} > \ln 2$$

$$f(f(x)) > f(1) \Rightarrow f(x) < 1 \text{ now } 10x \text{ etc.}$$

Άσκηση 505 10

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

1. Να δειχθεί ότι f είναι γνησίως αύξουσα.

$$f'(x) = 1 + \frac{x \ln x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + x \ln x - \ln x}{x^2}$$

$$\varphi(x) = x^2 + x \ln x - \ln x$$

$$\varphi'(x) = 2x + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 2x + \ln x$$

$$\varphi'(x) = x(2 + \ln x) > 0$$

x	0
φ'	+
φ	↗ +
f'	+
f	↗

$x > 0 \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0)$
 $\varphi(x) > 0$

2. Να δείχθεί ότι αν $x > 1$ τότε $f(x^2) + \ln x > f(x)$

$$f(x^2) + \ln \frac{x^2}{x} > f(x)$$

$$f(x^2) + \ln x^2 - \ln x > f(x)$$

$$f(x^2) + \ln x^2 > f(x) + \ln x$$

$$g(x) = f(x) + \ln x$$

$$g(x^2) > g(x)$$

Monotonie von $g(x)$

$$g(x) = f(x) + \ln x$$

$$g'(x) = f'(x) + \frac{1}{x} > 0$$

gP

Apa n anwachsen $g(x^2) > g(x)$

gP

$$x^2 > x$$

$$x > 0$$

$$x > 1$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

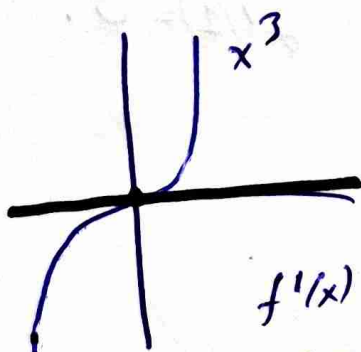
α. Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

β. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

γ. Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f στο x_0 είναι οριζόντια, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο.

δ. Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



$$f'(x) = 3x^2 \geq 0$$

$f \nearrow$

$$y - f(x) = f'(x)(x - x_0)$$

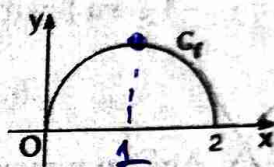
$$y = 0 \quad x = x_0$$

ε. Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ . Σ

στ. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Λ

ζ. Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. Σ

η. Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f είναι ημικύκλιο και φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(0, 2)$. Λ



$$\text{Έστω } g(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\underline{D_g}$$

$$\text{ήτοι } f'(x) \neq 0$$

$$D_g = (0, 1) \cup (1, 2).$$

$\Sigma_{T_0} x_0 = 1$
 έχω ακροατώ
 Fermat
 $f'(1) = 0$.

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

i. Αν $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . Σ

ii. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο. Σ

iii. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) . Σ

β. Έστω μια συνάρτηση, η οποία είναι f δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) .

i. Αν $f'(x) \neq 0$ στο (a, β) , τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Λ

ii. Αν $f'' \neq 0$ στο (a, β) , τότε η f έχει δύο, το πολύ, ακρότατα. Σ

iii. Αν η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο (a, β) , τότε η f είναι 1-1. Σ

$\alpha.$			$\beta.$		
i.	ii.	iii.	i.	ii.	iii.

$f'(x) \neq 0$
 $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$
 $f' \neq 0 \Rightarrow f$

Έστω ότι έχω 3 ακρότατα x_1, x_2, x_3

$$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$$

$$f''(x_1) = f''(x_2) = 0$$

Από το lemma

$f'' \neq 0$ αρα

Έχω το πολύ 2 ακρότατα

έχει το πολύ 2 ρίζες

ένα διάστημα Δ ;

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

i. Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ . Λ

ii. Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ . Σ

β. i. Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ , δεν βρίσκεται πάνω από τη C_f . Σ

ii. Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη σ' οποιοδήποτε σημείο του Δ , δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Σ

γ. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

i. Αν $f''(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ . Σ

ii. Αν $f''(x) < 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ . Σ

iii. Μπορεί μία συνάρτηση f να είναι κυρτή ή κοίλη στο Δ και να είναι $f''(x) \geq 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ ή $f''(x) \leq 0$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ αντίστοιχα. Σ

- 211
- δ. Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$. Σ
- ε. Έστω μία συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$. Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής. Σ

α.ι.	α.ιι.	β.ι.	β.ιι.	γ.ι.	γ.ιι.	γ.ιιι.	δ.	ε.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- Έστω f μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ .
- α. Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Λ
- β. Αν $f''(x) \neq 0$, στο εσωτερικό του Δ , για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f δεν έχει σημείο καμπής. Σ
- γ. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτομένη στη C_f στο $x_0 \in \Delta$ και η f είναι κοίλη, τότε $f(x) \neq \lambda x + \beta$, για κάθε $x \in \Delta$ και $x \neq x_0$. Σ
- δ. Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει καμπή, ισχύει $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) = x^2 \geq 0$$

f κυρτή.

$$f''(0) = 0$$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Σ

β. Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$. Λ

γ. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$. Λ

δ. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν και μόνο αν, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$. Σ

ε. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες. Λ

στ. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν κλάγιες ασύμπτωτες. Σ

ζ. Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f δεν αναζητούμε στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν ορίζεται. Λ

η. Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f αναζητούμε μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Λ

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f με

$$D_f = (x_0, +\infty), \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

β. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, τότε η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.

ε. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε μπορεί η ευθεία $x = x_0$ να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

στ. Η C_f μπορεί να έχει τρεις πλάγιες ασύμπτωτες.

ζ. Αν $D_f = \mathbb{R}$, τότε η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

η. Η C_f μπορεί να έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες.

θ. Η C_f μπορεί να έχει κοινά σημεία με μία κατακόρυφη ασύμπτωτή της.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.	η.	θ.