

10. Το πιο σημαντικό Θεώρημα
της Γ' Λυκείου είναι η
μονotonία μιας συνάρτησης.

α) $f(x) = e^x + x^3 + x \quad , x \in \mathbb{R}.$

$f'(x) = e^x + 3x^2 + 1 > 0$ άρα $f \nearrow$

β) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x \quad , x > 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ άρα $f \searrow$

γ) $f(x) = \sin x - x$

$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ άρα $f \searrow$

γιατί $-1 \leq \cos x \leq 1$

$-2 \leq \cos x - 1 \leq 0$

δ) $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 \quad , x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x - \frac{1}{2} \cdot 2x - 1$

$f'(x) = e^x - x - 1 \geq 0$ άρα $f \nearrow$

$\bullet e^x \geq x + 1 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x - 5)$$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \textcircled{x = -1} \quad \textcircled{x = 5}$$

x	-1	5	
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

Η f γρ. αύξουσα
 $(-\infty, -1]$ και $[5, +\infty)$

Η f γρ. φθίνουσα
 $[-1, 5]$

Το $A(-1, f(-1))$ T.M

Το $B(5, f(5))$ T.E.

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}, \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 4) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\textcircled{x = 2} \quad \vee \quad \textcircled{x = -2}$$

$$\textcircled{\epsilon} f(x) = 2x \ln x - x^2, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} - 2x$$

$$f'(x) = 2 \ln x + 2 - 2x$$

$$f'(x) = 2(\ln x + 1 - x) \leq 0 \text{ από } f'$$

$$\bullet \ln x \leq x - 1$$

$$\ln x - x + 1 \leq 0$$

$\sum \epsilon$ όλα τα παραπάνω

σημείο $\cup$ $f'(x) \leq 0$

σταθερό πρόσημο

αρκεί φυσικά πάντα

να το κοιτάμε αυτό.

x	-2	0	2
x^2-4	+	-	+
x^2	+	+	+
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

$$\textcircled{\text{d}} f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$$

$$f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 5) + e^x(2x - 4)$$

$$f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 5 + 2x - 4)$$

$$f'(x) = e^x(x^2 - 2x + 1)$$

$$f'(x) = e^x(x-1)^2 \geq 0$$

$f \nearrow$

Αυτές ήταν περιπτώσεις
που βασικών προποζωνίων
που η $f'(x)$ έχη ρίζα.

i) $f(x) = e^x + x^2 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$

$$f'(x) = e^x + 2x - 1$$

Η $f'(x)$ δεν είναι θετική, δεν είναι αρνητική

Η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν λύνεται.

Αρα παρατηρώ πάλι την $f'(x)$ και παίρνω $f''(x)$.

$$f'(x) = e^x + 2x - 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0$$

x	0	
f''	+	+
f'		
f		

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\textcircled{\text{K}} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x-2}, \quad x \in (0, 2)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-2) - \ln x}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x\ln x}{x(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-2-x\ln x}{x(x-2)^2}$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός

Το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται μόνο από τον αριθμητή.

$$\varphi(x) = x-2-x\ln x$$

$$\varphi'(x) = 1 - \ln x - 1$$

$$\varphi'(x) = -\ln x$$

$$\rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$$

x	0	1	2
φ'	+	0	-
φ	$\nearrow$	-	$\searrow$
$x(x-2)^2$	+	+	
f'	-	-	
f	$\nearrow$	$\searrow$	

$$\varphi(x) \leq \varphi(1) \Rightarrow \varphi(x) \leq -1$$

Μεγάλη σημασία σε

προβλήματα κλάδων της συνάρτησης

$$(1) f(x) = \begin{cases} x e^{x-1} - 1, & x \leq 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ και } f(1) = 0$$

Συνεχώς στο 1.

$x < 1$

$$f_1(x) = x e^{x-1} - 1$$

$$f_1'(x) = e^{x-1}(x+1)$$

$$\rightarrow f_1'(x) = 0$$

$x = -1$

$x > 1$

$$f_2(x) = x \ln x$$

$$f_2'(x) = \ln x + 1$$

$$\rightarrow f_2'(x) = 0$$

$x = \frac{1}{e}$

x	-1	$\frac{1}{e}$	1	
f_1'	-	0	+	+/+/+/+/+/+/+/+/
f_2'	/	/	/	+
f'	-	+	+	+
f	↘	↗	↗	↗

Σχολία

Σε κάθε μονοτονία που
καταλήγει σε ένα από τα
δύο παρακάτω σχήματα
τονίστε την ανισότητα.

x	x_0	
$f(x)$		

$$f(x) \leq f(x_0)$$

x	x_0	
$f(x)$		

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Σημαντικά γνωστές

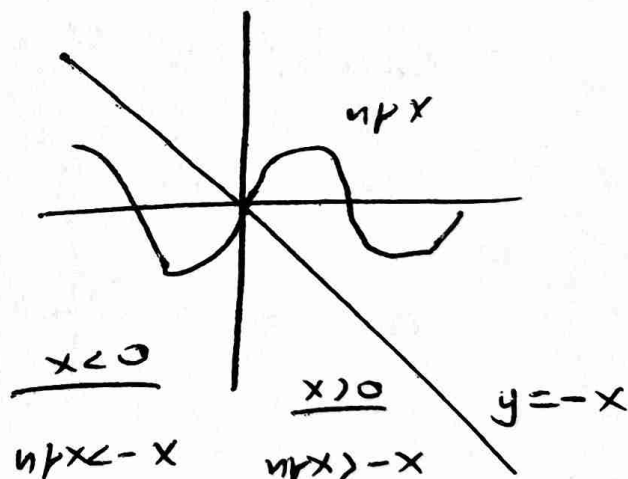
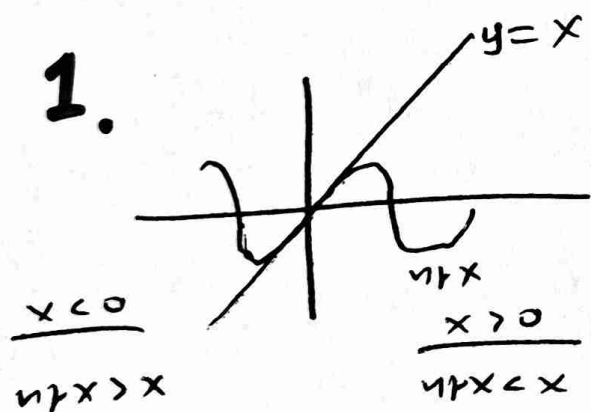
Βασικά ανισότητες.

1. $e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Το "=" για $x=0$

2. $\ln x \leq x-1 \quad \forall x > 0$. Το "=" για $x=1$

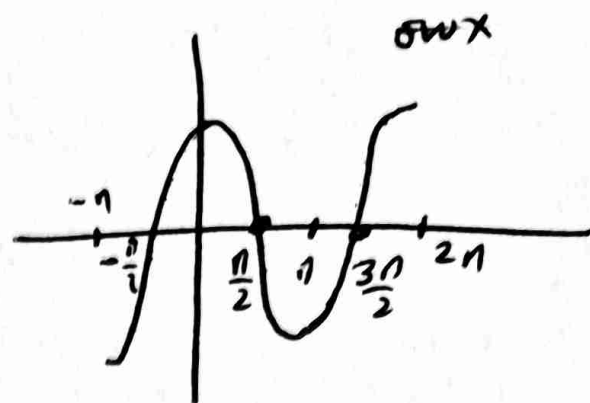
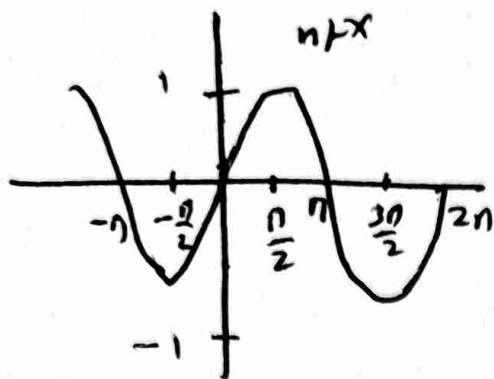
3. $|\ln x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Το "=" για $x=0$

Σημαντικά πληροφορίες.

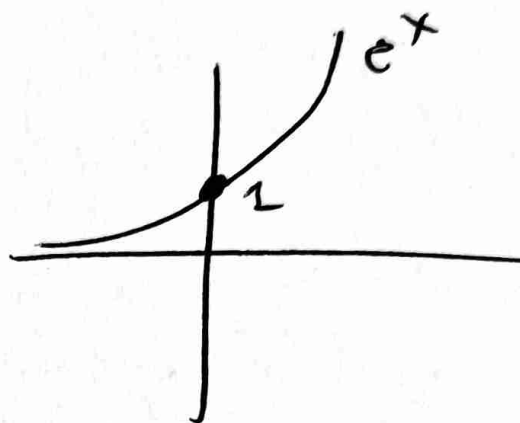
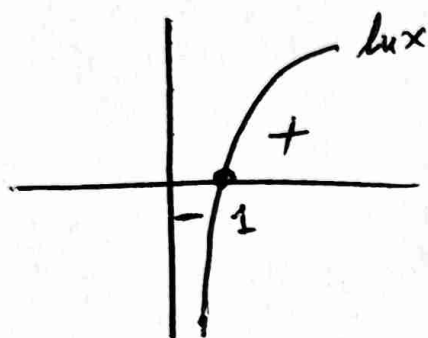


$$\ln x = x$$
$$(=)$$
$$x=0.$$

2.



3.



4. Μια ανίσωτητα που χρησιμοποιούμε

συνεχώς είναι:

• αν $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0$

• αν $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0$

11.

Το ενορχαστο Τητομα

είναι το Θεωρημα του

Βολτσανο.

α). Νδο η εξίσωση $e^x + x = 2$

εχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

$$e^x + x - 2 = 0$$

$$\boxed{f(x) = e^x + x - 2}$$

Η $f(x)$ συνεχής $[0,1]$ ως η.δ.σ.

$$f(0) = e^0 + 0 - 2 = -1 < 0$$

$$f(1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$$

• $f(0) \cdot f(1) < 0$ Βολτσανο $\exists x_0 \in (0,1)$

$$\text{τ.ω } f(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} + x_0 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow e^{x_0} + x_0 = 2$$

(B) Nдо $\exists x_0 \in (0,1)$ т.ч. $e^{x_0} + x_0 = 2$

$$e^{x_0} + x_0 = 2$$

$$e^x + x = 2$$

$$e^x + x - 2 = 0$$

Общепон $f(x) = e^x + x - 2$

Н $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$ и н.д.с.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = e - 1 > 0 \end{array} \right\} f(0)f(1) < 0$$

Поэтому $\exists x_0 \in (0,1)$ т.ч. $f(x_0) = 0$

$$e^{x_0} + x_0 = 2.$$

① Νόο η εξίσωση $e^x + x = 2$ έχει
μοναδική ρίζα στο $(0,1)$

Επιλύεται με τον ίδιο τρόπο
ακριβώς που που πρέπει να
κάνω μονοζωνία για την $f(x)$
ώστε να εξασφαλισω μοναδικότη-
τα της ρίζας.

$$f(x) = e^x + x - 2$$

$$f'(x) = e^x + 1 > 0$$

$f \nearrow$

Συνεπώς το x_0 μοναδική ρίζα.

⑧ Νδο η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$

Τερνι των $x'x$ ακριβώς μια ρίζα

σε σύμβ μ τετρήρωι $x_0 \in (0, 1)$

Η $f(x) = e^x + x - 2$ είναι συνεχής

στο $[0, 1]$ w/ ο.σ.δ

$f(0)f(1) < 0$ Βολτανο $\exists x_0 \in (0, 1)$

τ.ω $f(x_0) = 0$

Επίση η f $\nearrow$ άρα

Τερνι των $x'x$ σε μοναδικό σύμβ

$M(x_0, 0)$ τ.ω $x_0 \in (0, 1)$,

③. Νόσ η εξίσωση $\frac{e^x}{x-2} + \frac{x^2+1}{x-1} = 0$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$

$$(x-1)e^x + (x-2)(x^2+1) = 0$$

$$f(x) = (x-1)e^x + (x-2)(x^2+1)$$

Η $f(x)$ συνεχής στο $[1, 2]$ κ.ν.σ.σ.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -2 < 0 \\ f(2) = e^2 > 0 \end{array} \right\} f(1)f(2) < 0$$

Βολτσα $\exists \xi \in (1, 2)$ τέω $f(\xi) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{e^\xi}{\xi-2} + \frac{\xi^2+1}{\xi-1} = 0.$$

(7) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$

Νόσο η επίσυνση $f(x) = x - 1$ έχω

τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$

$$f(x) = x - 1$$

$$f(x) - x + 1 = 0$$

$$\boxed{g(x) = f(x) - x + 1}$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[1, 2]$ με π.δ.σ

$$\begin{cases} g(1) = f(1) > 0 \\ g(2) = f(2) - 1 < 0 \end{cases}$$

$$f(\mathbb{R}) = (0, 1)$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \{T_f = (0, 1)\}$$

$$\Rightarrow 0 < f(x) < 1$$

$$\text{Είπω } 0 < f(1) < 1$$

$$0 < f(2) < 1$$

$$f(2) - 1 < 0$$

$$g(1)g(2) < 0$$

Βολζω $\exists \xi \in (1, 2)$ τ.ο

$$g(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow f(\xi) = \xi - 1$$

(η) Δίνονται $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$

Νόο C_f και C_g έχουν αψευδ

ενα κοινω σημειω $M(x_0, y_0)$ οπου

$$x_0 \in (1, e).$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$$

$$\boxed{h(x) = \ln x - \frac{1}{x}}$$

H $h(x)$ συνεχη $[1, e]$ με π.δ.ν

$$\left. \begin{array}{l} h(1) = -1 < 0 \\ h(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0 \end{array} \right\} h(1)h(e) < 0$$

Βολζω $\exists x_0 \in (1, e)$ τ.ω $h(x_0) = 0$

$$f(x_0) = g(x_0)$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad h \nearrow \text{αρα το } x_0 \text{ μοναδικω}$$

12

Σημαντικό: Το άνω μέρος είναι η εφαπτομένη μιας συνάρτησης.

Περίπτωση 1

(α) Ψάχνω την εφαπτομένη μιας συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - x$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

στο σημείο της $A(2, f(2))$

$$\text{Εξ } y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$y - 2 = 3(x - 2)$$

$$\boxed{y = 3x - 4}$$

Τύπος

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

(β) Ψάχνω την εφαπτομένη της $f(x) = x^2 - x$

η οποία διέρχεται από το $A(1, -1)$

$$\text{Εξ } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow A(1, -1)$$

$$-1 - f(x) = f'(x)(1 - x)$$

$$-1 - (x^2 - x) = (2x - 1)(1 - x)$$

$$\cancel{-1 - x^2 + x} = \cancel{2x - 2x^2 - 1 + x}$$

$$-x^2 + 2x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 0 = -x$$

$$\underline{\underline{y = -x}}$$

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$\underline{\underline{y = 3x - 4}}$$

⑦ Να βρείς την εφαπτομένη της $f(x) = x^2 - x$
 η οποία σχηματίζει γωνία 135°
 με τον x'

$$\varepsilon \circ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

αρα $\varepsilon \phi 135 = f'(x_0)$

$$-1 = 2x_0 - 1$$

$$\underline{\underline{x_0 = 0}}$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y = -x$$

Συνοψίζω λοιπόν ότι

1^η: εφ'αυτοί που στο $A(x_0, H(x_0))$

2^η: εφ'αυτοί που διαρρέει από
σημείο $A(x_0, y_0)$.

3^η: εφ'αυτοί που ομοίως
γνωρίζουμε με κάποιο τρόπο
των κλίση δηλαδή $f'(x_0) = \lambda$

Αυτά είναι τα minimum

Βασικά στοιχεία που πρέπει

να γνωρίζουμε

Προδοχή

1η. Συνδυαστεί ωστε $y = ax + b$

να επαληθευτεί στην $f(x)$ στο x_0

$$\begin{cases} f'(x_0) = a \\ f(x_0) = ax_0 + b. \end{cases}$$

2η: Συνδυαστεί ωστε να έχω κοινή
επαληθευμένη των (f, g) στο

κοινό τους σημείο με τετμήνη x_0

$$\begin{cases} f'(x_0) = g'(x_0) \\ f(x_0) = g(x_0) \end{cases}$$

3η: Συνδυαστεί ωστε να έχω κοινή
επαληθευμένη των (f, g)

$$\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ f(a) - a f'(a) = g(b) - b g'(b). \end{cases}$$

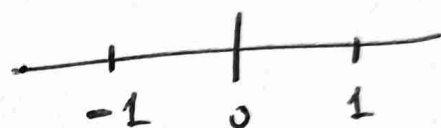
13.

Το Θέμα του
Rolle.

α) Έστω $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq 0 \\ x^2 + 3x, & x > 0 \end{cases}$

Να ελέγξω αν η $f(x)$ ικανοποιεί
τις προϋποθέσεις του Rolle στο $[-1, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - 3x = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 3x = 0$$

Αρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και $f(0) = 0$

αρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

Επίσης η $f(x)$ είναι συνεχής $[-1, 0)$

και $(0, 1]$ ως π.σ.σ. αρα συνεχής

$[-1, 1]$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 3x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \text{DLH}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 - 3}{1} = -3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 3x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \text{DLH}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 3}{1} = 3$$

H $f(x)$ δαρ είναι παρ/μη σω 0.
αρε δαρ ικανοποιάται 0. Πάλε

$$\text{Αποφασίζω ότι } f(-1) = f(1) = 4.$$

f συνεχής σω $[-1, 1]$ ✓

f παρ/μη σω $(-1, 1)$ ✗

$$f(-1) = f(1) \quad \checkmark$$

(B) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής
 στο $[0, 1]$ και παράγωγος στο $(0, 1)$
 Νόμο $g(x) = f(x) \eta \chi$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 45

H $g(x)$ σ_{max} σ_{20} $[0, \pi]$ ω $n.s.s.$

$H \ g(x) \ \text{ошлхал}$
 $H \ g(x) \ \text{нар/нн} \quad \text{до } (0, n) \text{ ул н.н.б}$

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= f(0) \wedge 0 = 0 \\ g(n) &= f(n) \wedge n = 0 \end{aligned} \right\} g(0) = g(n)$$

alle $\exists x_0 \in (a, n)$ t.w. $g'(x_0) = 0$.

$\frac{1}{2} \pi$
 Αφού 10×10^4 ο Βάλλε για την $g(x)$
 $11.1 \text{ cm} \times$

$$g'(x) = f'(x) \cdot nx + f(x) \cdot \ln x$$

opw $g'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) \eta + f(x_0) \delta w x_0 = 0$

$$f'(x_0) + f(x_0) \frac{\sigma y x_0}{u + x_0} = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{f'(x_0) = -\sigma y x_0 / (u + x_0)}}$$

⑧ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραμ. με $f'(x) \neq -1$
 $\forall x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι f και $y = -x$ έχουν
το πολύ ένα κοινό σημείο.

$$f(x) = -x \quad \Rightarrow \quad f(x) + x = 0$$

$$\boxed{g(x) = f(x) + x}$$

Έστω ότι η $g(x)$ έχει 2 ρίζες.
 $g(x_1) = g(x_2) = 0$

$$\text{Ρolle} \quad g'(\xi) = 0.$$

$$g'(x) = f'(x) + 1$$

$$g'(\xi) = f'(\xi) + 1 = 0$$

$$f'(\xi) = -1 \quad \text{Αυτό}$$

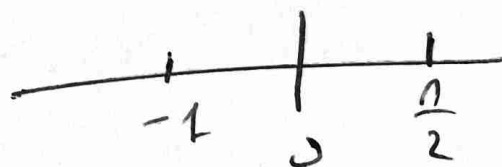
Αρα υπάρχει το πολύ ένα
κοινό σημείο.

14. Το ΘΜΤ

Θέλει προσοχή για
κλαστική διατύπωση και
προσδοκώ συνήθεια και
παράχρησιν.

① Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$

Κατανοούμε ότι προσδοκώ το
ΘΜΤ στο $[-1, \frac{1}{2}]$;



• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$
• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ } $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$f(0) = 0$ από συνέπεια στο 0!

Είνα σωστό στο $[-1, 0)$ και
 $(0, \frac{1}{2}]$ με η.δ.δ.

Αρα σωστό $[-1, \frac{1}{2}]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{x} = 1$$

Αρα όχι παράλληλο στο $\emptyset$

αρα δεν ικανοποιούνται οι
προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο

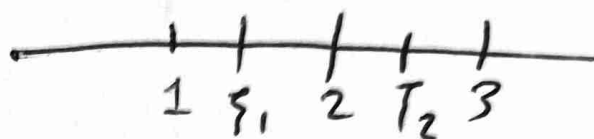
$$[-1, \frac{1}{2}]$$

(B) $\exists \sigma \tau w \quad f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ swcxnd.

ku $f(1) = 2$ ku $f(3) = 0$.

Ndo $\exists \tau_1, \tau_2 \in (1, 3)$ r.w $f'(\tau_1) + f'(\tau_2) = -2$.

$$f'(\tau_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{f(2) - 2}{1}$$



$$f'(\tau_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{0 - f(2)}{1}.$$

Apra $f'(\tau_1) + f'(\tau_2) = f(2) - 2 - f(2) = -2.$

8) Έστω $f: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ απόλυτα συνεχής με $f(1)=2$ και $f(2)=4$.

i) Να δο $\exists x_0 \in (1,2)$ τέω $f(x_0) = 2(3-x_0)$

$$f(x) = 2(3-x)$$

$$\underbrace{f(x) - 2(3-x)}_{g(x)} = 0$$

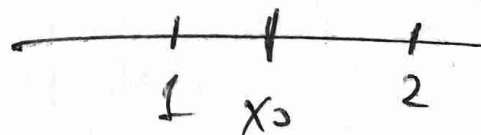
$$\left. \begin{aligned} g(1) &= f(1) - 4 = 2 - 4 = -2 \\ g(2) &= f(2) - 2 = 2 \end{aligned} \right\} g(1)g(2) < 0$$

Βολω $\exists x_0 \in (1,2)$ τέω $g(x_0) = 0$.

$$\Rightarrow \underline{f(x_0) = 2(3-x_0)}$$

ii) Να δο $\exists \beta_1, \beta_2 \in (1,2)$ τέω $f'(\beta_1)f'(\beta_2) = 4$

$$f'(\beta_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{2(3-x_0) - 2}{x_0 - 1}$$



$$f'(\beta_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \frac{4 - 2(3-x_0)}{2 - x_0}$$

$$f'(\beta_1) \cdot f'(\beta_2) = \frac{4-2x_0}{x_0-1} \cdot \frac{2x_0-2}{2-x_0} = \frac{-2(\cancel{x_0-2})}{\cancel{x_0-1}} \cdot \frac{2(\cancel{x_0-1})}{\cancel{x_0-2}} = 4$$