

Τριγωνομετρικοί αριθμοί
οξυγώνιας

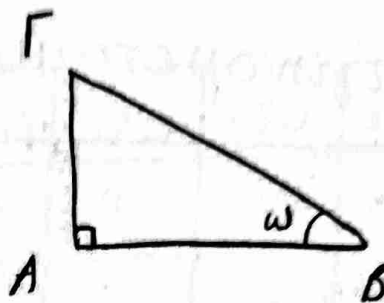
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξυγώνιας
ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι οι εξής:

$$\eta\mu\hat{\omega} = \frac{\text{απ. κάθετη}}{\text{υποπλευρά}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\omega} = \frac{\text{πρ. κάθετη}}{\text{υποπλευρά}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$\epsilon\varphi\hat{\omega} = \frac{\text{απ. κάθετη}}{\text{πρ. κάθετη}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

$$\sigma\varphi\hat{\omega} = \frac{\text{πρ. κάθετη}}{\text{απ. κάθετη}} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$



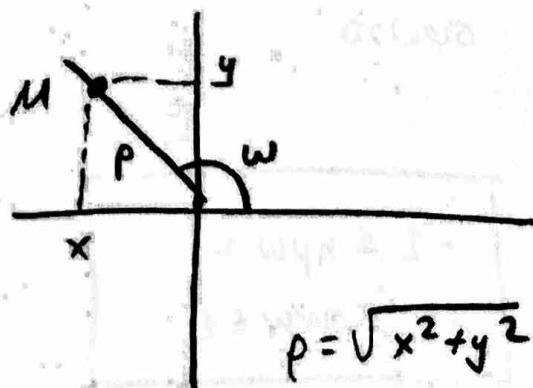
Τριγωνομετρικοί αριθμοί
οποιασδήποτε γωνίας

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y}$$



Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Βο

1. $\eta\rho(k \cdot 360 + \omega) = \eta\rho\omega$

$$\sigma\omega(k \cdot 360 + \omega) = \sigma\omega\omega$$

$$\epsilon\varphi(k \cdot 360 + \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(k \cdot 360 + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

2. $\eta\rho(-\omega) = -\eta\rho\omega$

$$\sigma\omega(-\omega) = \sigma\omega\omega$$

$$\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$$

3. $\eta\rho(180 - \omega) = -\eta\rho\omega$

$$\sigma\omega(180 - \omega) = \sigma\omega\omega$$

$$\epsilon\varphi(180 - \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(180 - \omega) = -\sigma\varphi\omega$$

4. $\eta\rho(180 + \omega) = -\eta\rho\omega$

$$\sigma\omega(180 + \omega) = -\sigma\omega\omega$$

$$\epsilon\varphi(180 + \omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(180 + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

5. $\eta\rho(90 - \omega) = \sigma\omega\omega$

$$\sigma\omega(90 - \omega) = \eta\rho\omega$$

$$\epsilon\varphi(90 - \omega) = \sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(90 - \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

6. $\eta\rho(90 + \omega) = \sigma\omega\omega$

$$\sigma\omega(90 + \omega) = -\eta\rho\omega$$

$$\epsilon\varphi(90 + \omega) = -\sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(90 + \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

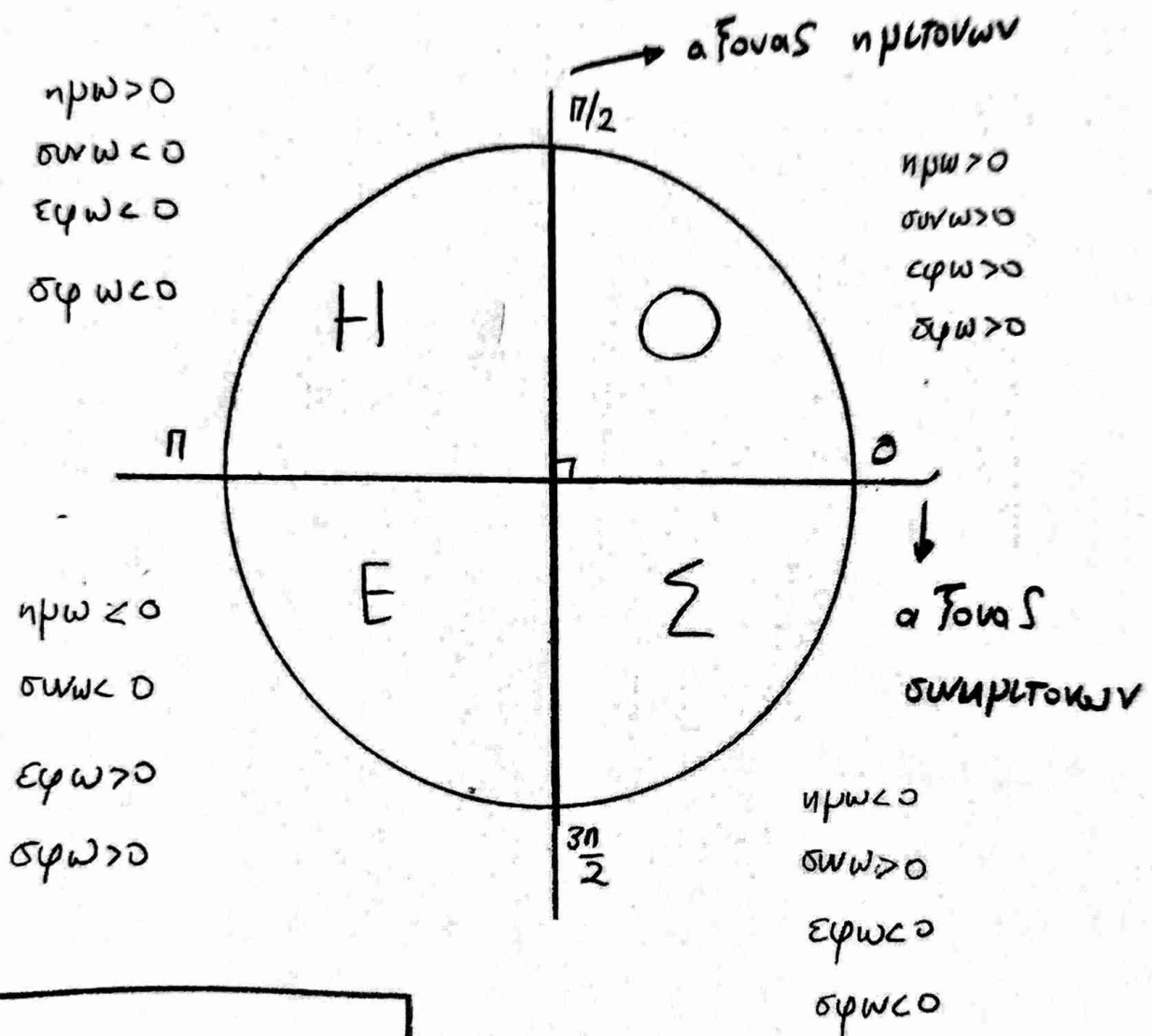
Μοίρες - rad

Μοίρες : μ

rad : α

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Τριγωνομετρικός κύκλος



$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\mu\omega \leq 1$$

Τριγωνομετρικός πίνακας

Βασικών γωνιών

Μοίρες	0	30	45	60	90	180	270	360
rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
ημω	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
συμω	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
εφω	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
οφω	-	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	-	0	-

Βασικοί τύποι τριγωνομετρίας

$$1. \quad \eta\rho^2 x + \sigma\omega^2 x = 1$$

$$2. \quad (\eta\rho x)^2 = \eta\rho^2 x \quad \text{και} \quad (\sigma\omega x)^2 = \sigma\omega^2 x$$

$$3. \quad \epsilon\psi x = \frac{\eta\rho x}{\sigma\omega x} \quad \text{και} \quad \sigma\psi x = \frac{\sigma\omega x}{\eta\rho x}$$

$$4. \quad \epsilon\psi x \cdot \sigma\psi x = 1$$

$$5. \quad \sigma\omega^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\psi^2 x}$$

$$6. \quad \eta\rho^2 x = \frac{\epsilon\psi^2 x}{1 + \sigma\psi^2 x}$$

Βασικά τριγωνομετρικά συναρτήσεις

Βασ

1. $f(x) = \rho \eta \mu(\omega x) + c$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{Max } f = |\rho| + c$$

$$\text{Min } f = -|\rho| + c$$

ωx	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	αναλόγως				
$\eta \mu \omega x$	0	1	0	-1	0
$\rho \eta \mu \omega x$	0	ρ	0	$-\rho$	0
$f(x)$	c	$\rho + c$	c	$-\rho + c$	c

2. $f(x) = \rho \sigma \upsilon \nu \omega x + c$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{Max } f = |\rho| + c$$

$$\text{Min } f = -|\rho| + c$$

ωx	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	αναλόγως				
$\sigma \upsilon \nu \omega x$	1	0	-1	0	1
$\rho \sigma \upsilon \nu \omega x$	ρ	0	$-\rho$	0	ρ
$f(x)$	$\rho + c$	c	$-\rho + c$	c	$\rho + c$

Βασικά Τριγωνομετρικά Εξισώσεις

$$1. \quad \eta \rho x = \eta \rho \theta \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{array}{l} x = 2k\pi + \theta \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ x = 2k\pi + \pi - \theta \end{array} \quad k \in \mathbb{Z}$$

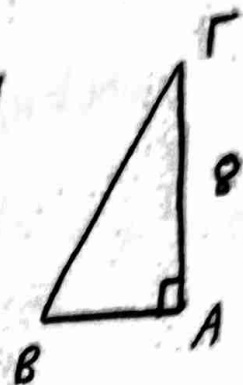
$$2. \quad \sigma \omega x = \sigma \omega \nu \theta \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{array}{l} x = 2k\pi + \theta \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ x = 2k\pi - \theta \end{array} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3. \quad \epsilon \varphi x = \epsilon \varphi \theta \quad (\Leftrightarrow) \quad x = k\pi + \theta \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4. \quad \sigma \varphi x = \sigma \varphi \theta \quad (\Leftrightarrow) \quad x = k\pi + \theta \quad k \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση 1

Στο ορθόγωνο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)
του δίνονται σχηματίζοντας ισχύει ότι
 $AG = 8 \text{ cm}$ και $\eta\mu \hat{B} = \frac{4}{5}$



α) Να βρεις τις πλευρές $B\Gamma$, AB

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \eta\mu \hat{B} &= \frac{8}{B\Gamma} \quad (\Rightarrow) \frac{4}{5} = \frac{8}{B\Gamma} \quad (\Rightarrow) 4 B\Gamma = 40 \\ &(\Rightarrow) \boxed{B\Gamma = 10} \end{aligned}$$

Από πυθ. Θεώρημα

$$AB^2 + 8^2 = 10^2$$

$$AB^2 = 100 - 64$$

$$AB^2 = 36 \quad (\Rightarrow) \boxed{AB = 6}$$

β) Βρες τους τριγωνομετρικούς αριθμούς
της γωνίας $\hat{\Gamma}$

$$\eta\mu \hat{\Gamma} = \frac{6}{10}$$

$$\sigma\omega \hat{\Gamma} = \frac{8}{10}$$

$$\epsilon\varphi \hat{\Gamma} = \frac{6}{8}$$

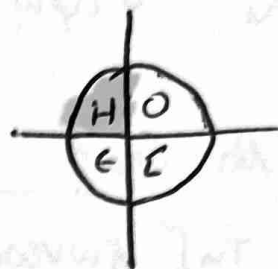
$$\sigma\varphi \hat{\Gamma} = \frac{8}{6}$$

Άσκηση 4

Δίνεται γωνία ω ώστε $\eta\rho\omega = \frac{5}{13}$

και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$

Να βρείτε $\sin\omega$, $\epsilon\varphi\omega$, $\sigma\varphi\omega$



Τυπικά οτι $\eta\rho^2\omega + \sigma\omega^2\omega = 1 \quad (\Rightarrow) \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sigma\omega^2\omega = 1$

$$(\Rightarrow) \sigma\omega^2\omega = 1 - \frac{25}{169} \quad (\Rightarrow) \sigma\omega^2\omega = \frac{144}{169}$$

$$\text{αρα } \sigma\omega\omega = \frac{12}{13} \quad \text{η } \sigma\omega\omega = -\frac{12}{13}$$

οπου $\omega \in 2^{\circ}$ τεταρτηφοριο αρα $\sigma\omega\omega < 0$

$$\sigma\omega\omega\omega \quad \sigma\omega\omega = -\frac{12}{13}$$

$$\text{Τυπα } \epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\rho\omega}{\sigma\omega\omega} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

$$\sigma\varphi\omega = -\frac{12}{5}$$

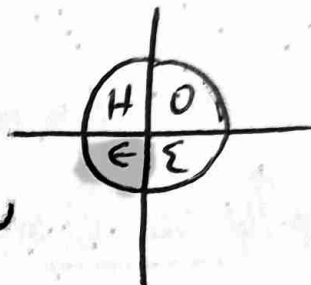
Άσκηση 5

Δίνεται γωνία ω ώστε $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$

$$\text{και } 4 \epsilon\varphi\omega - 6 \sigma\varphi\omega + 5 = 0$$

Να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

$$\text{Επειδή } \epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1 \quad (\Rightarrow) \quad \sigma\varphi\omega = \frac{1}{\epsilon\varphi\omega}$$



$$\text{αρα } 4 \epsilon\varphi\omega - 6 \frac{1}{\epsilon\varphi\omega} + 5 = 0$$

$$\text{Θέτω } \epsilon\varphi\omega = t \quad \text{αρα } 4t - 6 \frac{1}{t} + 5 = 0$$

$$(\Rightarrow) 4t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 + 16 \cdot 6$$

$$\Delta = 121$$

$$t = \frac{-5 \pm 11}{8} \begin{cases} t = \frac{3}{4} \quad (\Rightarrow) \quad \epsilon\varphi\omega = \frac{3}{4} \\ t = -2 \quad (\Rightarrow) \quad \sigma\varphi\omega = -2 \end{cases}$$

οπως η γωνία $\omega \in 3^{\circ}$ τεταρτηφοριο

$$\text{οπω εκη } \epsilon\varphi\omega > 0 \quad \text{αρα } \epsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$$

$$\sum w_{encl} \quad \sigma \psi w = \frac{4}{3}$$

$$T_{opa} \quad \sigma w^2 w = \frac{1}{1 + \epsilon \psi^2 w} \quad (\Rightarrow) \quad \sigma w^2 w = \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$\sigma w^2 w = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} \quad (\Rightarrow) \quad \sigma w^2 w = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25}$$

$$(\Rightarrow) \sigma w w = \frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \sigma w w = -\frac{3}{5}$$

$$\Delta_{exto}, \text{ то } \sigma w w = -\frac{3}{5}$$

$$\text{опнл} \quad \epsilon \psi w = \frac{\eta \mu w}{\sigma w w} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{3}{4} = \frac{\eta \mu w}{-\frac{3}{5}}$$

$$(\Rightarrow) -\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \eta \mu w \quad (\Rightarrow) \quad \eta \mu w = -\frac{9}{20}$$

Άσκηση 6

Αν ισχύει ότι $3\eta\mu\theta + 4\sigma\upsilon\eta\theta = 5$
να υπολογίσουμε τη παράσταση

$$A = 5\sigma\omega\theta - 4\varepsilon\varphi\theta$$

Επειδή $3\eta\mu\theta = 5 - 4\sigma\upsilon\eta\theta \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{5 - 4\sigma\omega\theta}{3}$

Επίσης $\eta^2\theta + \sigma^2\theta = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5 - 4\sigma\omega\theta}{3} \right)^2 + \sigma\omega^2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5 - 4\sigma\omega\theta)^2}{9} + \sigma\omega^2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow 25 - 40\sigma\omega\theta + 16\sigma\omega^2\theta + 9\sigma\omega^2\theta = 9$$

$$25\sigma\omega^2\theta - 40\sigma\omega\theta + 16 = 0$$

$$(5\sigma\omega\theta - 4)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow 5\sigma\omega\theta - 4 = 0$$
$$\sigma\omega\theta = \frac{4}{5}$$

Επείδη $3\eta\mu\theta + 4\sigma\omega\theta = 5$

$$3\eta\mu\theta + 4 \cdot \frac{4}{5} = 5$$

$$\Leftrightarrow 3\eta\mu\theta + \frac{16}{5} = 5$$

Άρα $A = 5 \cdot \frac{4}{5} - 4 \cdot \frac{3}{4} = 1$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}$$

Άσκηση 7

- α) Να εξεταστεί, αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες ισχύει συγχρόνως ότι $\eta\rho x = \frac{2}{3}$ και $\sigma\omega x = \frac{1}{3}$

Εστω ότι υπάρχει τέτοια γωνία x .

$$\text{Τότε } \eta\rho^2 x + \sigma\omega^2 x = 1 \quad (\Rightarrow) \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$(\Rightarrow) \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1 \quad (\Rightarrow) \frac{5}{9} = 1 \quad \text{Απορροή!}$$

- β) Να βρεθεί το k ώστε να υπάρχει γωνία ω και να ισχύει ότι

$$\eta\rho\omega = \frac{k}{k+2} \quad \text{και} \quad \sigma\omega\omega = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\text{Πρέπει } \eta\rho^2\omega + \sigma\omega^2\omega = 1 \quad (\Rightarrow) \left(\frac{k}{k+2}\right)^2 + \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2 = 1$$

$$(\Rightarrow) \frac{k^2}{(k+2)^2} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} = 1 \quad (\Rightarrow) k^2 + 2k + 1 = k^2 + 4k + 4$$

$$(\Rightarrow) k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$k = 3$$

$$k = -1$$

Άσκηση 8

ημ2α

Να αποδείξετε ότι παρακάτω ισχύει

$$\textcircled{a} \quad \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} + \frac{\eta \rho^2 x}{1 + \sigma \varphi x} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\text{Είναι} \quad \frac{\sin^2 x}{1 + \frac{\eta \rho x}{\sin x}} + \frac{\eta \rho^2 x}{1 + \frac{\sigma \omega x}{\eta \rho x}} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sin^2 x}{\sin x + \eta \rho x}}{\sin x} + \frac{\frac{\eta \rho^2 x}{\eta \rho x + \sigma \omega x}}{\eta \rho x} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\frac{\sin^3 x}{\sigma \omega x + \eta \rho x} + \frac{\eta \rho^3 x}{\eta \rho x + \sigma \omega x} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\frac{\sigma \omega^3 x + \eta \rho^3 x}{\sigma \omega x + \eta \rho x} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\frac{(\cancel{\sigma \omega x + \eta \rho x})(\sigma \omega^2 x - \sigma \omega x \eta \rho x + \eta \rho^2 x)}{\cancel{\sigma \omega x + \eta \rho x}} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\Rightarrow 1 - \eta \rho x \sin x = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\textcircled{B} \quad \eta p^2 \alpha \sigma \omega^2 \beta + \sigma \omega^2 \alpha = 1 - \eta p^2 \alpha \eta p^2 \beta$$

$$\eta p^2 \alpha \sigma \omega^2 \beta + \sigma \omega^2 \alpha + \eta p^2 \alpha \eta p^2 \beta = 1$$

$$\eta p^2 \alpha (\sigma \omega^2 \beta + \eta p^2 \beta) + \sigma \omega^2 \alpha = 1$$

$$\eta p^2 \alpha + \sigma \omega^2 \alpha = 1$$

$$1 = 1$$

$$\textcircled{8} \quad A_V \quad 0 < x < 1 \quad \text{so} \quad \sqrt{\frac{1-\sigma \omega x}{1+\sigma \omega x}} - \sqrt{\frac{1+\sigma \omega x}{1-\sigma \omega x}} = -2\sigma \psi x$$

$$\text{Given} \quad \frac{\sqrt{1-\sigma \omega x}}{\sqrt{1+\sigma \omega x}} - \frac{\sqrt{1+\sigma \omega x}}{\sqrt{1-\sigma \omega x}} = \frac{\sqrt{1-\sigma \omega x}^2 - \sqrt{1+\sigma \omega x}^2}{\sqrt{1-\sigma \omega^2 x}} =$$

$$= \frac{\overset{+}{|1-\sigma \omega x|} - \overset{+}{|1+\sigma \omega x|}}{\sqrt{\eta p^2 x}} = \frac{1-\sigma \omega x - 1-\sigma \omega x}{\overset{+}{|\eta p x|}} =$$

$$= \frac{-2\sigma \omega x}{\eta p x} = -2\sigma \psi x$$

$$\longrightarrow A_V \quad x \in (0, 1)$$

$$\longrightarrow \sigma \omega x \leq 1 \quad \Rightarrow 1 - \sigma \omega x \geq 0$$

$$\text{to } \eta p x > 0$$

$$\longrightarrow \sigma \omega x \geq -1 \quad \Rightarrow \sigma \omega x + 1 \geq 0$$

Άσκηση 9

Να αποδειχθούν οι ανισότητες

$$(a) \quad (\eta\rho x + \sigma\omega x)^2 \leq 2$$

$$\text{Είναι } \eta\rho^2 x + \sigma\omega^2 x + 2\eta\rho x \sigma\omega x \leq 2$$

$$1 + 2\eta\rho x \sigma\omega x \leq 2$$

$$2\eta\rho x \sigma\omega x \leq 1$$

$$2\eta\rho x \sigma\omega x \leq \eta\rho^2 x + \sigma\omega^2 x$$

$$0 \leq \eta\rho^2 x - 2\eta\rho x \sigma\omega x + \sigma\omega^2 x$$

$$0 \leq (\eta\rho x - \sigma\omega x)^2$$

$$(b) \quad -5 \leq 3\eta\rho x + 4\sigma\omega x \leq 5$$

$$|3\eta\rho x + 4\sigma\omega x| \leq 5$$

$$(3\eta\rho x + 4\sigma\omega x)^2 \leq 25$$

$$9\eta\rho^2 x + 24\eta\rho x \sigma\omega x + 16\sigma\omega^2 x \leq 25$$

$$9(1 - \sigma\omega^2 x) + 24\eta\rho x \sigma\omega x + 16(1 - \eta\rho^2 x) \leq 25$$

$$9 - 9\sigma\omega^2 x + 24\eta\rho x \sigma\omega x + 16 - 16\eta\rho^2 x \leq 25$$

$$9\sigma\omega^2 x + 16\eta\rho^2 x - 24\eta\rho x \sigma\omega x \geq 0 \quad (\Rightarrow (\beta\sigma\omega x - 4\eta\rho x)^2 \geq 0)$$

Άσκηση 10

Να υπολογίσετε η παράσταση

$$A = \frac{\eta\mu(24\eta - \theta) \cdot \sigma\omega(37\eta - \theta) \cdot \epsilon\psi(15\eta + \theta) \cdot \sigma\psi\left(\frac{21\eta}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{17\eta}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\omega\left(\frac{23\eta}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\psi\left(\frac{27\eta}{2} + \theta\right) \epsilon\psi(\theta - 12\eta)}$$

$$\cdot \eta\mu(24\eta - \theta) = \eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta$$

$$\cdot \sigma\omega(37\eta - \theta) = \sigma\omega(36\eta + \eta - \theta) = \sigma\omega(\eta - \theta) = -\sigma\omega\theta$$

$$\cdot \epsilon\psi(15\eta + \theta) = \epsilon\psi(14\eta + \eta + \theta) = \epsilon\psi(\eta + \theta) = \epsilon\psi\theta$$

$$\begin{aligned} \cdot \sigma\psi\left(\frac{21\eta}{2} - \theta\right) &= \sigma\psi\left(\frac{20\eta}{2} + \frac{\eta}{2} - \theta\right) = \sigma\psi\left(10\eta + \frac{\eta}{2} - \theta\right) = \\ &= \sigma\psi\left(\frac{\eta}{2} - \theta\right) = \epsilon\psi\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \eta\mu\left(\frac{17\eta}{2} + \theta\right) &= \eta\mu\left(\frac{16\eta}{2} + \frac{\eta}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(8\eta + \frac{\eta}{2} + \theta\right) = \\ &= \eta\mu\left(\frac{\eta}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(\frac{\eta}{2} - (-\theta)\right) = \sigma\omega(-\theta) = \sigma\omega\theta \end{aligned}$$

$$\cdot \sigma\omega\left(\frac{23\eta}{2} - \theta\right) = \sigma\omega\left(\frac{22\eta}{2} + \frac{\eta}{2} - \theta\right) = \sigma\omega\left(11\eta + \frac{\eta}{2} - \theta\right)$$

$$= \sigma\omega\left(10\eta + \eta + \frac{\eta}{2} - \theta\right) = \sigma\omega\left(\eta + \frac{\eta}{2} - \theta\right) = -\sigma\omega\left(\frac{\eta}{2} - \theta\right) =$$

$$= -\eta\mu\theta$$

$$\begin{aligned}
 \cdot \sigma\psi\left(\frac{27n}{2} + \theta\right) &= \sigma\psi\left(\frac{26n}{2} + \frac{n}{2} + \theta\right) = \sigma\psi\left(13n + \frac{n}{2} + \theta\right) \\
 &= \sigma\psi\left(12n + n + \frac{n}{2} + \theta\right) = \sigma\psi\left(n + \frac{n}{2} + \theta\right) = \sigma\psi\left(\frac{n}{2} + \theta\right) = -c\psi\theta \\
 \cdot \varepsilon\psi(\theta - 12n) &= -\varepsilon\psi(12n - \theta) = -c\psi(-\theta) = \varepsilon\psi\theta.
 \end{aligned}$$

$$\text{Αρα } A = \frac{(-n\psi\theta)(-\sigma\psi\theta)\varepsilon\psi\theta\varepsilon\psi\theta}{\sigma\psi\theta(-n\psi\theta)(-c\psi\theta)\varepsilon\psi\theta} = 1.$$

$$\varepsilon\psi(\theta - 12n) = \varepsilon\psi\left(- (12n - \theta)\right)$$

$$= -\varepsilon\psi(\cancel{12n} - \theta)$$

$$= -\varepsilon\psi(-\theta) = \varepsilon\psi\theta.$$

Άσκηση 11

Να αποδειχθούν οι ισότητες

$$\textcircled{a} \quad \eta \rho^2 \left(\frac{5\eta}{6} - \omega \right) + \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \eta \rho \left(\frac{5\eta}{6} - \omega \right) &= \eta \rho \left(\frac{6\eta}{6} - \frac{\eta}{6} - \omega \right) = \eta \rho \left(\eta - \frac{\eta}{6} - \omega \right) \\ &= \eta \rho \left(\eta - \left(\frac{\eta}{6} + \omega \right) \right) = \eta \rho \left(\frac{\eta}{6} + \omega \right) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{6} + \omega \right) + \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) = 1$$

$$\text{Παρατηρώ ότι } \left(\frac{\eta}{6} + \omega \right) + \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) = \frac{\eta}{2}$$

$$\text{Άρα } \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{2} - \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) \right) + \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) = 1$$

$$\eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) + \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) = 1$$

$$1 = 1$$

$$\textcircled{b} \quad \text{Αν } A, B, \Gamma \text{ γωνίες τριγώνου νδσ } \sigma \omega \frac{A}{2} = \eta \rho \frac{B+\Gamma}{2}$$

$$\text{Γνωρίζω ότι } A+B+\Gamma=180 \Leftrightarrow \frac{A}{2} + \frac{B+\Gamma}{2} = 90 \Leftrightarrow \frac{B+\Gamma}{2} = 90 - \frac{A}{2}$$

$$\text{άρα } \sigma \omega \frac{A}{2} = \eta \rho \left(90 - \frac{A}{2} \right) \Leftrightarrow \sigma \omega \frac{A}{2} = \sigma \omega \frac{A}{2}$$

Άσκηση 12

Να γίνει η γραφική παράσταση
των συναρτήσεων

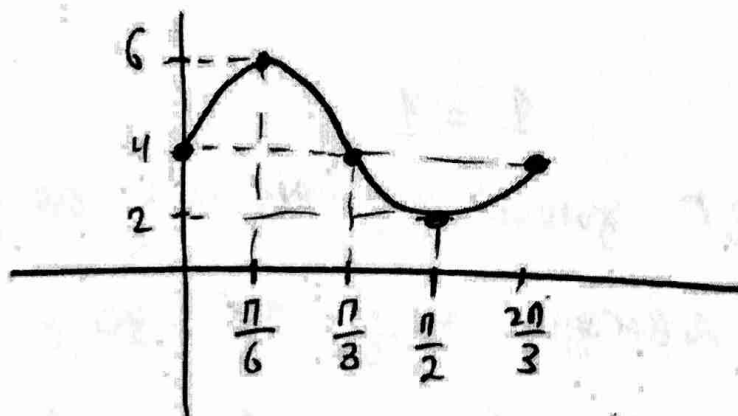
α) $f(x) = 4 + 2\eta\mu 3x$, $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$

Περίοδος: $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$

Μαx: $|p| + c = |2| + 4 = 2 + 4 = 6$

Μιn: $-|p| + c = -|2| + 4 = 2$

$3x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
$\eta\mu 3x$	0	1	0	-1	0
$2\eta\mu 3x$	0	2	0	-2	0
$f(x)$	4	6	4	2	4



③ $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ στο $[-\pi, 2\pi]$

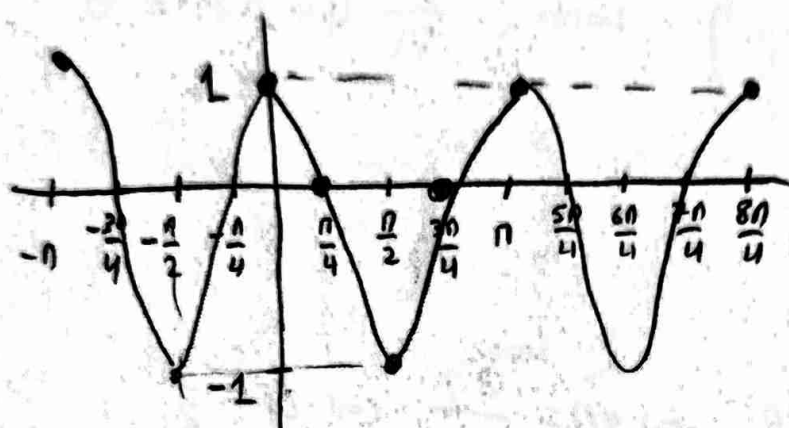
Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = \sin 2x$

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Ενώσω

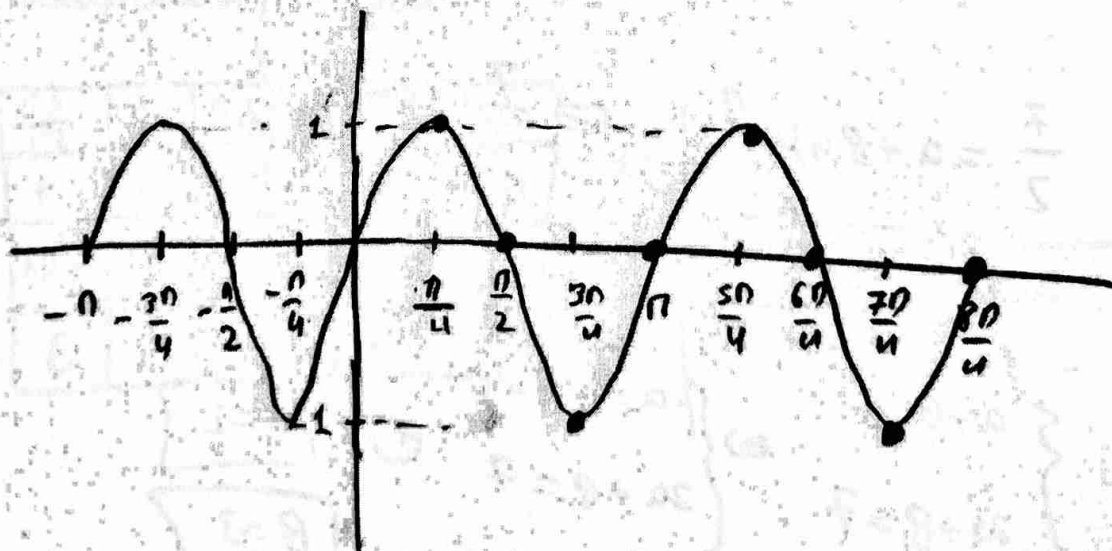
$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$\text{αρα } -1 \leq h(x) \leq 1$$



$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin 2x$	1	0	-1	0	1
$h(x)$	1	0	-1	0	1

Συνεπώς η γραφική παράσταση της $g(x)$ είναι μετατοπισμένη κατά $\frac{\pi}{4}$ δεξιά.



Άσκηση 13

Η συνάρτηση $f(x) = a + B \eta \mu \omega x$, $B > 0$

έχει περίοδο $T = 4\pi$, μέγιστη τιμή 5

και η γραφική της παράσταση διέρχεται

από το $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{7}{2}\right)$

Να βρεθούν οι αριθμοί ω, a, B

$$\text{Περίοδος } T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}$$

$$\text{Max} = |p| + c \Leftrightarrow 5 = |B| + a \Leftrightarrow \boxed{a + B = 5}$$

$$\text{Ενώσε } \frac{7}{2} = a + B \eta \mu \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{7}{2} = a + B \eta \mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{7}{2} = a + B \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{7 = 2a + B}$$

$$\begin{cases} a + B = 5 \\ 2a + B = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - B = -5 \\ 2a + B = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a = 2} \\ \boxed{B = 3} \end{cases}$$

Ασκηση 15

Η Θερμοκρασία σε Βαθμούς Κελσίου μιας ημερας σε ένα χρόνο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση

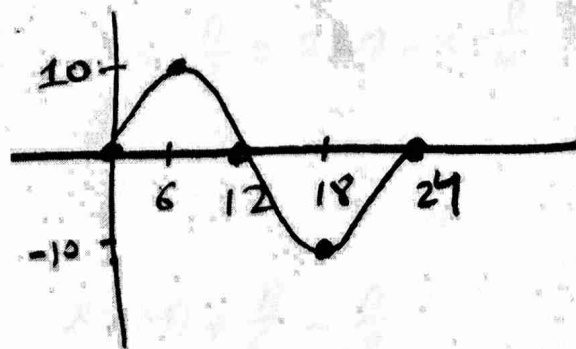
$$\theta = 10 \sin \frac{\pi t}{12}, \text{ όπου } t \text{ χρόνος σε ημερ.}$$

α) Ποση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24 ηρών ;

$$\begin{aligned} \text{Max} &= |10| = 10 \\ \text{Min} &= -|10| = -10 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Max} &= |10| = 10 \\ \text{Min} &= -|10| = -10 \end{aligned}} \right\} \text{ μέγιστη μεταβολή} = 20$$

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 24$

$\frac{\pi t}{12}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	0	6	12	18	24
$\sin \frac{\pi t}{12}$	0	1	0	-1	0
θ	0	10	0	-10	0



⑧ Να βρεις γραφικά ποια χρονικά σημεία
η θερμοκρασία είναι:

i) 0°C

Τις χρονικά σημεία : 0, 12, 24

Στην ουσία στα 12 τη νύχτα

και στα 12 το μεσημέρι.

ii). πτω από 0°C .

$t \in (12, 24)$.

Άσκηση 17

Να λυθούν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α) $\eta \mu x = \frac{1}{2}$

Είναι $\eta \mu x = \eta \mu \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}}$$

$$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$$

β) $3\eta \mu x - 5 = 0$

Είναι $\eta \mu x = \frac{5}{3}$. Αδυνατείται αφού $-1 \leq \eta \mu x \leq 1$

γ) $\sigma \omega \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sigma \omega \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$

Είναι $\sigma \omega \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sigma \omega \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4}$$

Αδυνατεί!

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}$$

$$\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{24}}$$

$$\textcircled{5} \quad \sigma\psi\left(x - \frac{n}{4}\right) + \sigma\psi x = 0$$

$$\text{Einmal} \quad \sigma\psi\left(x - \frac{n}{4}\right) = -\sigma\psi x$$

$$\sigma\psi\left(x - \frac{n}{4}\right) = \sigma\psi(-x)$$

$$x - \frac{n}{4} = kn - x$$

$$2x = kn + \frac{n}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{kn}{2} + \frac{n}{8}$$

$$\textcircled{6} \quad \sigma w(2x) + \sigma w\left(x - \frac{n}{3}\right) = 0$$

$$\sigma w(2x) = -\sigma w\left(x - \frac{n}{3}\right)$$

$$\sigma w(2x) = \sigma w\left(n - x + \frac{n}{3}\right)$$

$$2x = 2kn + n - x + \frac{n}{3}$$

$$\therefore 2x = 2kn - n + x - \frac{n}{3}$$

$$3x = 2kn + \frac{4n}{3}$$

$$x = 2kn - \frac{4n}{3}$$

$$x = \frac{2kn}{3} + \frac{4n}{9}$$

$$(3) \quad n\mu\left(2x - \frac{n}{4}\right) + \sigma w\left(\frac{n}{4} + x\right) = 0$$

$$\text{Given } \sigma w\left(\frac{n}{4} + x\right) = -n\mu\left(2x - \frac{n}{4}\right)$$

$$\sigma w\left(\frac{n}{4} + x\right) = n\mu\left(\frac{n}{4} - 2x\right)$$

$$\sigma w\left(\frac{n}{4} + x\right) = \sigma w\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{4} + 2x\right)$$

$$\sigma w\left(\frac{n}{4} + x\right) = \sigma w\left(\frac{n}{4} + 2x\right)$$

$$\frac{n}{4} + x = 2kn + \frac{n}{4} + 2x \quad \text{or} \quad \frac{n}{4} + x = 2kn - \frac{n}{4} - 2x$$

$$-x = 2kn$$

$$3x = 2kn - \frac{n}{2}$$

$$\boxed{x = -2kn}$$

$$\boxed{x = \frac{2kn}{3} - \frac{n}{6}}$$

$$(4) \quad 2n\mu x \sigma w x - 1 = 2\sigma w x - n\mu x$$

$$2n\mu x \sigma w x - 2\sigma w x = 1 - n\mu x$$

$$2\sigma w x (n\mu x - 1) + n\mu x - 1 = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(n\mu x - 1)(2\sigma w x + 1) = 0$$

$$n\mu x = 1$$

or

$$\sigma w x = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = 2kn + \frac{n}{2}}$$

$$\boxed{x = 2kn \pm \frac{2n}{3}}$$

$$\textcircled{\theta} \quad \eta \rho x \cdot \epsilon \varphi x = 1 + \sigma \omega x + \frac{1}{\sigma \omega x}, \quad \sigma \omega x \neq 0 \quad \textcircled{\psi}$$

$$\text{Είπαμε} \quad \sigma \omega x \eta \rho x \epsilon \varphi x = \sigma \omega x + \sigma \omega^2 x + 1$$

$$\sigma \omega x \eta \rho x \frac{\eta \rho x}{\sigma \omega x} = \sigma \omega x + \sigma \omega^2 x + 1$$

$$\eta \rho^2 x = \sigma \omega x + \sigma \omega^2 x + 1 \quad (\Rightarrow 1 - \sigma \omega x^2 x)$$

$$1 - \sigma \omega x^2 x = \sigma \omega x + \sigma \omega^2 x + 1$$

$$0 = 2\sigma \omega^2 x + \sigma \omega x \quad (\Rightarrow \sigma \omega x / (2\sigma \omega x + 1) = 0)$$

$$\Leftrightarrow \sigma \omega x = 0$$

ή

$$2\sigma \omega x + 1 = 0$$

απορ/τα

$$\sigma \omega x = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$$

$$\textcircled{i} \quad \eta \rho x - \sqrt{3} \sigma \omega x = 0$$

Εστω ότι $\eta \rho x = 0$ τότε $\sigma \omega x = 0$ και άρα

Αρα $\eta \rho x \neq 0$

Απόλυτο!

$$\text{Συνολικά} \quad 1 - \sqrt{3} \sigma \varphi x = 0 \quad (\Rightarrow \sigma \varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{3}}$$

$$\textcircled{\text{f}} \quad 4 \sigma \omega^2 x + 8 \eta \mu x - 7 = 0$$

$$\text{Είναι} \quad 4(1 - \eta \rho^2 x) + 8 \eta \mu x - 7 = 0$$

$$4 - 4 \eta \rho^2 x + 8 \eta \mu x - 7 = 0$$

$$-4 \eta \rho^2 x + 8 \eta \mu x - 3 = 0$$

$$\text{Θέτω} \quad \eta \mu x = t \quad \text{αρα} \quad -4t^2 + 8t - 3 = 0$$

$$\Delta = 64 - 48 = 16$$

$$t = \frac{-8 \pm 4}{-8} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{αρα} \quad \eta \mu x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \eta \mu x = \frac{3}{2}$$

Ατολό!

$$x = 2\pi n + \frac{5\pi}{6}$$

Άσκηση 18

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$
στα $(-\pi, \pi)$.

Αρχικοί λύω την εξίσωση τριγωνομετρικά

αρα $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} - x$ ή $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} + x$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

Αδυνατι!

$$\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{6}} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Για $k=0$ έχω $x = \frac{\pi}{6}$ δακτυ!

Για $k=1$ έχω $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} > \pi$. Απορ/ται.

Για $k=-1$ έχω $x = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$ Δακτυ

Για $k=-2$ έχω $x = -2\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{11\pi}{6}$
Απορ/ται.

В'тrow 1

$$-1 < x < 1$$

$$-1 < kn + \frac{n}{6} < 1$$

$$-1 < k + \frac{1}{6} < 1$$

$$-6 < 6k + 1 < 6$$

$$-7 < 6k < 5$$

$$-\frac{7}{6} < k < \frac{5}{6}$$

• $k = -1$

$$x = -n + \frac{n}{6}$$

$$x = -\frac{5n}{6}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

• $k = 0$

$$x = \frac{n}{6}$$

