

Βασικές αρχές πολυωνύμων

1. Μονώνυμο του x καλούμε κάθε παράσταση της μορφής ax^v , $a \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$

2. Πολυώνυμο του x καλούμε κάθε παράσταση της μορφής $a_n x^v + a_{n-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ όπου $a_i \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}$.

3. Τα $a_n x^v$, $a_{n-1} x^{v-1}$, $\dots$, $a_1 x$, a_0

λεγονται όροι του πολυωνύμου ενώ οι αριθμοί $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ λεγονται συντελεστές του πολυωνύμου ενώ ο a_0 λεγεται και σταθερός όρος του πολυωνύμου.

4. Ο αριθμός v λεγεται βαθμός του πολυωνύμου, τα σταθερά πολυωνυμα εχων βαθμό μηδέν ενώ το μηδενικο πολυωνυμο δεν εχει βαθμο.

5. Δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν έχουν ίδιο βαθμό και ίδιους συντελεστές
6. Ο αριθμός p είναι ρίζα ενός πολυωνύμου αν το μηδενίζει δηλαδή αν $P(p) = 0$.
7. Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(x)$ είναι το $P(0)$ ενώ το γινόμενο των συντελεστών του πολυωνύμου είναι $P(1)$.

Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης

1. $\Delta(x) = \delta(x) \pi(x) + \upsilon(x)$

ο βαθμός του υπολοίπου πρέπει να είναι μικρότερος του διαρέσει.

2. Αν το $\upsilon(x) = 0$ δηλαδή $\Delta(x) = \delta(x) \pi(x)$

τότε η διαίρεση λήγει τελικά. Τότε λήφει:

- Το $\Delta(x)$ διαιρείται από το $\delta(x)$
- Το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$
- Το $\delta(x)$ είναι διαίρεσις ή παρονομαστής του $\Delta(x)$

Η διαίρεση $P(x) : (x-r)$

Στην ουσία μετράμε για διαίρεση όπου
ο διαιρέτης είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού.

Εδώ γνωρίζουμε ότι :

1. $P(x) = (x-r) \eta(x) + u$ όπου $u = P(r)$.

2. Αν $P(x) = (x-r) \eta(x)$ δηλαδή το $x-r$
είναι παραγοντικό του $P(x)$ τότε $P(r) = 0$

Τότε την ουκρίβια όλα τα παρακάτω είναι
ισόδυναμα.

→ Το $x-r$ διαιρεί το $P(x)$

→ Η διαίρεση $P(x) : (x-r)$ είναι τέλητη.

→ Το $x-r$ είναι παραγοντικό του $P(x)$

→ Το r είναι ρίζα του $P(x)$

→ Το $P(x)$ διαιρείται με το $x-r$

→ Το $x-r$ είναι διαιρέτης του $P(x)$

$P(r) = 0.$

Προσοχή

1. Εάν το $P(x)$ έχει παραγοντα το $(x-a)(x-b)$ αν και μόνο αν το $P(x)$ έχει παραγοντα το $x-a$ και το $x-b$.
2. Εάν πολυώνυμο $P(x)$ με βαθμό n έχει το πολυ n ρίζες. Εάν κάποια από αυτές τις ρίζες είναι ακέραιος αριθμός τότε σίγουρα διαιρεί τον σταθερό όρο του $P(x)$. Εάν ο σταθερός όρος δεν έχει ακέραιους διαιρέτες τότε το $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Άσκηση 13

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x + \lambda - 2$$

Να βρούμε το βαθμό του $P(x)$ για τις διαφορές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \lambda^3 - 4\lambda = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \lambda(\lambda^2 - 4) = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda = 2 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2$$

1. Αν $\lambda = 0$ τότε $P(x) = -2$ είναι σταθερό πολυώνυμο με βαθμό μηδέν.

2. Αν $\lambda = 2$ τότε $P(x) = 0$ είναι μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό.

3. Αν $\lambda = -2$ τότε $P(x) = 8x - 4$ είναι 1ου βαθμού πολυώνυμο.

4. Αν $\lambda \neq 0, \lambda \neq 2, \lambda \neq -2$ τότε είναι 3ου βαθμού.

Άσκηση 21

Να βρεθεί το πολυώνυμο $P(x)$ αν

$$(3x-2)P(x) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

πολυώνυμο πολυώνυμο 2ου βαθμού

Για να είναι ίσα τα δύο πολυώνυμα πρέπει το $P(x)$ να είναι 2ου βαθμού.

Έστω $P(x) = ax^2 + bx + \gamma$

$$(3x-2)(ax^2 + bx + \gamma) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$3ax^3 + 3bx^2 + 3\gamma x - 2ax^2 - 2bx - 2\gamma = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$3ax^3 + (3b-2a)x^2 + (3\gamma-2b)x - 2\gamma = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$\begin{cases} 3a = 3 & \Leftrightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b-2a = -14 & \Leftrightarrow 3b = -12 \quad \boxed{b=-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\gamma-2b = 17 & \Leftrightarrow \boxed{\gamma=3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\gamma = -6 \end{cases}$$

Άσκηση 23

Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις

α) $(2x^4 - 7x^3 + 18x + 2) : (x^2 - 3x + 1)$

Καθάρη Διαίρεση

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 7x^3 + 18x + 2 & x^2 - 3x + 1 \\ - [2x^4 - 6x^3 + 2x^2] & 2x^2 - x - 5 \\ \hline -x^3 - 2x^2 + 18x + 2 & \end{array}$$

$$- [-x^3 + 3x^2 - x]$$

$$- 5x^2 + 19x + 2$$

$$- [-5x^2 + 15x - 5]$$

$$14x + 7$$

Ταυτότητα Ευκλείδειας
Διαίρεσης

$$2x^4 - 7x^3 + 18x + 2 = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 - x - 5) + 14x + 7$$

Η συγκεκριμένη διαίρεση δεν γίνεται
να γίνει με άλλο τρόπο.

$$\textcircled{B} (x^3 - 5x + 3) : (x + 2)$$

Σε αυτή τη διαίρεση ο διαυρετής $\delta(x) = x + 2$ είναι 1ου βαθμού. Εννοείται ότι μπορούμε να εκτελέσουμε κάθετη διαίρεση. Όταν ο διαυρετής είναι της μορφής $x - \rho$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Horner.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & -5 & 3 & \textcircled{-2} & & \\ \downarrow & -2 & 4 & 2 & & & \\ 1 & -2 & -1 & 5 & & & \end{array}$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{πηλίκο}} \quad \rightarrow \text{υπόλοιπο.}$

$$\text{Είναι } \underbrace{x^3 - 5x + 3}_{\delta(x)} = \underbrace{(x + 2)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(x^2 - 2x - 1)}_{\pi(x)} + \underbrace{5}_\upsilon$$

$$\textcircled{1} (x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12) : (x^2 - 4)$$

Μπορούμε να εκτελέσουμε καθεστη διαίρεση

Επειδή οπω $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ και το

2 και -2 είναι ρίζα του διαυρτεσου

πορω να κονω κλιμακωσα δυο φορι Horner.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & -1 & 8 & -12 & \textcircled{2} \end{array}$$

$$\downarrow \begin{array}{cccc} 2 & 0 & -2 & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 6 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 6 & \textcircled{-2} & \end{array}$$

$$\downarrow \begin{array}{ccc} -2 & 4 & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

πηλίκο

$$\text{Αρα } x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12 = (x^2 - 4)(x^2 - 2x + 3)$$

Άσκηση 24

Δίνεται $P(x) = 2x^3 + x^2 - 22x + 24$

(α) Ναι το $2x-3$ είναι παραγοντα του $P(x)$

Αρκεί να $P(x) : (2x-3)$ είναι τίλος.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad -22 \quad 24 \quad \left(\frac{3}{2}\right) \\ \downarrow \quad 3 \quad 6 \quad -24 \\ 2 \quad 4 \quad -16 \quad 0 \end{array}$$

(β) Να παραγοντοποιηθεί το $P(x)$

$$\text{Είναι } P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) (2x^2 + 4x - 16)$$

σύμφωνα με την ταυτότητα της
ακέραια διαίρεση.

Άσκηση 25

Δίνεται $P(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a - 8)x + a^2 - 21$

Να βρεθεί το a αν η διαίρεση $P(x) : (x^2 + 1)$ είναι τέλεια.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a - 8)x + a^2 - 21 & x^2 + 1 \\ - [x^4 + x^2] & \hline -3x^3 + (a-1)x^2 + (a^2 - 4a - 8)x + a^2 - 21 & \\ - [-3x^3 - 3x] & \hline (a-1)x^2 + (a^2 - 4a - 5)x + a^2 - 21 & \\ - [(a-1)x^2 + a-1] & \hline (a^2 - 4a - 5)x + a^2 - a - 20 & \end{array}$$

Για να είναι τέλεια η διαίρεση πρέπει

$$\begin{cases} a^2 - 4a - 5 = 0 & (\Leftrightarrow) \boxed{a=5} \text{ ή } \boxed{a=-1} \\ a^2 - a - 20 = 0 & \boxed{a=5} \quad \boxed{a=-4} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Άρα} \\ \underline{\underline{a=5}} \end{array}$$

Άσκηση 26

Δίνεται το πολώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 - 14x + B$.

Το $x-3$ είναι παραγοντα του $P(x)$ και
το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με

το $x+1$ είναι 36.

Να βρεθούν τα a, B και να παραγοντοποιηθεί
το $P(x)$

Αφού το $x-3$ είναι παραγοντα είναι $P(3)=0$

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με

το $x+1$ είναι 36 είναι $P(-1)=36$.

$$\text{Άρα } \begin{cases} P(3)=0 & \Leftrightarrow 27+9a-42+B=0 & \Leftrightarrow 9a+B=15 \\ P(-1)=36 & \Leftrightarrow -1+a+14+B=36 & \Leftrightarrow a+B=23 \end{cases}$$

$$\text{Συνεπώς } a=-1 \text{ και } B=24$$

$$\text{Άρα } P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$$

Αφού το $x-3$ είναι παραγοντα το 3 είναι ρίζα
του $P(x)$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & -14 & 24 \\ \downarrow & 3 & 6 & -24 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \end{array} \quad (3)$$

$$P(x) = (x-3)(x^2+2x-8)$$

$$P(x) = (x-3)(x+4)(x-2)$$

Άσκηση 27

- α) Δίνεται το $P(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ το οποίο
έχει παραγοντάρι το $x^2 + 2x - 3$

Να βρεθούν τα a, b

Είναι $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αρα } P(-3) = 0 \Rightarrow -3a + b = -9 \\ \text{και } P(1) = 0 \Rightarrow a + b = -5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -6 \end{array}$$

- β) Δίνεται το $P(x) = x^3 + ax^2 + b$ το οποίο
έχει παραγοντάρι το $x^2 - 4x + 4$,

Να βρεθούν τα a, b .

Εδώ δεν θα πάρει
ο προηγούμενος
τρόπος.

Είναι $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

$$\begin{array}{r} 1 \quad a \quad 0 \quad b \quad (2) \\ \downarrow \\ 1 \quad 2 \quad 2a+4 \quad 4a+8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad a+2 \quad 2a+4 \quad \boxed{4a+b+8} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad a+2 \quad 2a+4 \quad (2) \\ \downarrow \\ 1 \quad 2 \quad 2a+8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad a+4 \quad 4a+12 \end{array}$$

Προη.

$$\begin{cases} 4a + b + 8 = 0 \\ 4a + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{a = -3}$$

$$\boxed{b = 4}$$

Άσκηση 28

Το υπόλοιπο της $P(x) : (x-2)$ είναι 1
και με το $P(x) : (x+3)$ είναι -14
Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης
του $P(x)$ με το x^2+x-6 .

Δίνεται ότι $P(2)=1$ και $P(-3)=-14$

Συμπεραίνει με την ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης

$$P(x) = \underbrace{(x^2+x-6)}_{\text{2ου βαθμού}} \eta(x) + u(x).$$

αφού $u(x)$ 1ου βαθμού

Συνεπώς $P(x) = (x^2+x-6) \eta(x) + ax+b.$

$$P(2) = 2a+b = 1$$

$$P(-3) = -3a+b = -14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ -3a+b=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases}$$

Άσκηση 29

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) : (x^2 - 3x - 10)$

είναι $-2x + 7$. Να βρεις το υπόλοιπο

της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$

κατάρχως
$$P(x) = (x^2 - 3x - 10) \pi(x) + 7 - 2x$$

Το υπόλοιπο της $P(x) : (x + 2)$ είναι $U = P(-2)$

$$\text{Είναι } P(-2) = (4 + 6 - 10) \pi(-2) + 7 - 2(-2)$$

$$P(-2) = 11 \quad \text{αρα } U = 11.$$

Аскиби 30

Εστω $P(x)$, 3ου βαθμού, πολυώνυμο το οποίο
διαιρείται με το x^2+3 , έχει ρίζα το -1
και καν $P(-2)=14$. Να βρω το $P(x)$.

βαρύνει το χρόνο που $P(x) = (x^2 + 3) \cdot \eta(x)$
 ↓ ↪ 1ο Βαθμίου
 3ου Βαθμίου παρα

Given $P(x) = (x^2 + 3)(ax + B)$.

$$P(-1) = 0 \quad (\Rightarrow) 4(-a+b) = 0 \quad (\Rightarrow) -a+b = 0$$

$$P(-2) = 14 \quad (\Rightarrow) \quad 7(-2\alpha + \beta) = 14 \quad (\Rightarrow) \quad -2\alpha + \beta = 2$$

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad a = b = -2$$

Apa $p(x) = (x^2 + 3)(-2x - 2)$

$$p(x) = -2x^3 - 2x^2 - 6x - 6$$

Άσκηση 31

Αν η εξίσωση $x^3 - (\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}$
έχει ακέραια ρίζα, βρε το λ .

Κατ' αρχάς η εξίσωση έχει το πολύ 3 ρίζες.

Η ακέραια ρίζα θα είναι το 1 ή το -1.

Αν είναι το $x=1$ τότε $1 - (\lambda + 2) + 2\lambda - 1 = 0$

$$1 - \lambda - 2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$$\boxed{\lambda = 2}$$

Αν είναι το $x=-1$ τότε $-1 - (\lambda + 2) - 2\lambda - 1 = 0$

$$-1 - \lambda - 2 - 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow -3\lambda = 4$$

$$\lambda = -\frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$$

Επεξήγηση

Η ακέραια ρίζα πρέπει να είναι το 1 ή το -1

γιατί η ακέραια ρίζα πρέπει να είναι

διαίρετη του σταθερού όρου -1.

Άσκηση 32

Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^3 - 12 = 4x - 3x^2$

$$x^3 - 12 - 4x + 3x^2 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(\Leftrightarrow) x^2(x+3) - 4(x+3) = 0 \quad (\Leftrightarrow) (x+3)(x^2-4) = 0$$

$$x+3=0$$

$$\boxed{x=-3}$$

ή

$$x^2-4=0$$

$$x^2=4$$

$$\boxed{x=2} \quad \text{ή} \quad \boxed{x=-2}$$

β) $(2x+1)^3 = 27$

$$(2x+1)^3 = 3^3$$

$$(\Leftrightarrow) 2x+1=3 \quad (\Leftrightarrow) 2x=2 \quad (\Leftrightarrow) \boxed{x=1}$$

γ) $(x^2-11)^5 + 32 = 0$

$$(x^2-11)^5 = -32 \quad (\Leftrightarrow) (x^2-11)^5 = (-2)^5$$

$$x^2-11=-2$$

$$(\Leftrightarrow) x^2=9 \quad (\Leftrightarrow) x^2=3^2$$

$$\boxed{x=3} \quad \text{ή} \quad \boxed{x=-3}$$

$$\textcircled{\delta} (x^2-2)^4 - 16 = 0$$

$$(x^2-2)^4 = 2^4$$

$$x^2-2=2 \quad \vee \quad x^2-2=-2$$

$$x^2=4$$

$$x^2=2^2$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\boxed{x=-2}$$

$$x^2=0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$\textcircled{\epsilon} (5x-3)^6 + 4 = 0$$

$$(5x-3)^6 = -4$$

αδυναται

$$\textcircled{\zeta} x^3 - 7x + 6 = 0$$

Οι διαμεντές του σταθερού όρου είναι οι

$$6 : \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Παρατηρώ ότι το 1 είναι λύση της εξίσωσης
οπότε δοκιμάζω Horner με το 1.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ \downarrow & 1 & 1 & -6 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Η εξίσωση γίνεται

$$(x-1)(x^2+x-6)=0$$

$$x-1=0$$

$$\vee \quad x^2+x-6=0$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\boxed{x=-3}$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\textcircled{\eta} \quad 6x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4 = 0$$

Διαιρετό του 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$$\begin{array}{rrrrrr} 6 & -5 & -15 & 0 & 4 & \textcircled{-1} \\ \downarrow & & & & & \\ 6 & -6 & 11 & 4 & -4 & \\ 6 & -11 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(6x^3 - 11x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$x+1=0$$

$$\boxed{x = -1}$$

$$6x^3 - 11x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 6 & -11 & -4 & 4 & \textcircled{2} \\ \downarrow & & & & & \\ 6 & 12 & 2 & -4 & & \\ 6 & 1 & -2 & 0 & & \end{array}$$

$$(x-2)(6x^2 + x - 2) = 0$$

$$x-2=0$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$\text{ή } 6x^2 + x - 2 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{x = -\frac{2}{3}}$$