Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. ⓐ $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + \alpha}$ Τέμνει τον $y'y$ στο $-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(0) = -\frac{1}{2}$

$f(0) = \dfrac{e^0}{e^0 + \alpha} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \dfrac{1}{1+\alpha}$

$-(1+\alpha) = 2 \Leftrightarrow -1 - \alpha = 2$

$-3 = \alpha$

$$\boxed{f(x) = \frac{e^x}{e^x - 3} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{\ln 3\}.}$$

πρέπει $e^x - 3 \neq 0$

$e^x \neq 3$ $\qquad x \neq \ln 3$

$\ln e^x \neq \ln 3$

$g(x) = \ln(x+\beta)$ τέμνει τον $x'x$ στο 2

άρα $g(2)=0 \Rightarrow \ln(2+\beta) = 0$

$$e^{\ln(2+\beta)} = e^0$$

$$2+\beta = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\beta=-1}}$$

$g(x) = \ln(x-1)$

Πρέπει $x-1>0$

$x>1$

$$\boxed{\begin{array}{l} g(x) = \ln(x-1) \\ D_g = (1,+\infty) \end{array}}$$

(β) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{e^{\ln(x-1)}}{e^{\ln(x-1)}-3}$

$$= \frac{x-1}{x-1-3} = \frac{x-1}{x-4}$$

πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$\underline{\underline{x>1}}$ $\qquad \ln(x-1) \neq \ln 3$

$x-1 \neq 3$

$\underline{\underline{x \neq 4}}$

$D_{f\circ g} = (1,4)\cup(4,+\infty)$.

2. $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $x>0$

Εστω $f(x_1)=f(x_2)$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{e^{x_1}+1}{e^{x_1}-1} = \dfrac{e^{x_2}+1}{e^{x_2}-1}$

$(e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1) = (e^{x_2}+1)(e^{x_1}-1)$

$e^{x_1}\cancel{e^{x_2}} - e^{x_1} + e^{x_2} \cancel{-1} = \cancel{e^{x_2}} e^{x_1} - e^{x_2} + e^{x_1} \cancel{-1}$

$-2e^{x_1} = -2e^{x_2}$

$e^{x_1} = e^{x_2}$ f 1-1

$x_1 = x_2$ άρα αντιστρέψιμη

$$y = \frac{e^x+1}{e^x-1}$$ check

$$y(e^x-1) = e^x+1$$

$$ye^x - y = e^x+1$$

$$ye^x - e^x = y+1$$

$$e^x(y-1) = y+1$$

$$e^x = \frac{y+1}{y-1}$$

$y-1 \neq 0$

$y \neq 1$

$$\ln e^x = \ln \frac{y+1}{y-1}$$

$$\frac{y+1}{y-1} > 0$$

$$X = \ln \frac{y+1}{y-1}$$

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$$

y		-1		1	
$y+1$	$-$	0	$+$		$+$
$y-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{y+1}{y-1}$	$+$		$-$		$+$

$y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

ODWL $x > 0$

$$\ln \frac{y+1}{y-1} > 0$$

$$e^{\ln \frac{y+1}{y-1}} > e^0$$

$$\frac{y+1}{y-1} > 1$$

$$\frac{y+1}{y-1} - 1 > 0$$

$$\frac{y+1}{y-1} - \frac{y-1}{y-1} > 0$$

$$\frac{2}{y-1} > 0$$

$y - 1 > 0$

$y > 1$

Ενδιαται

- $y > 1$
- $y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- $y \neq 1$

$$D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$$

3.

ⓐ $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^4 - 16} = \frac{1 - 7 - 6}{1 - 16}$$

$$= \frac{-12}{-15} = \frac{4}{5}.$$

ⓑ $$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^4 - 16} = \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-3)(x+1)}{(x-2)\cancel{(x+2)}(x^2+4)}$$

$$= \frac{-5(-1)}{-4 \cdot 8} = \frac{5}{-32}$$

ⓖ $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^4 - 16} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x^2+4)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(x+1)}{x^2+4} \cdot \frac{1}{x-2} =$$

$$= \frac{-1 \cdot 3}{8} \cdot \infty ;$$

x	2
$x-2$	$-$ 0 $+$

$$\cdot \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-3)(x+1)}{x^2+4} \cdot \frac{1}{x-2} = -\frac{3}{8} \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\cdot \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-3)(x+1)}{x^2+4} \frac{1}{x-2} = -\frac{3}{8} \cdot (+\infty) = -\infty$$

Τ ο όριο δεν υπάρχει

$$⑧ \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-7x-6}{x^4-16} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^4}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

4. ⓐ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{\sqrt{x^2+x+1}}^{\cancel{2}} - x^2}{\sqrt{x^2+x+1} + x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+x+1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+1} + x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\cancel{x}}$$

$$= \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}$$

(B) $\lim_{x \to -\infty} e^x ημx$

$\frac{ημ\infty}{χτισμω}$,

$-1 \leq ημx \leq 1$

$$\boxed{-e^x \leq e^x ημx \leq e^x}$$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} -e^x = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{array}\right\}$ Απο Κ.Π

$\lim_{x \to -\infty} e^x ημx = 0$

$e^{-\infty} = 0$

$e^{+\infty} = +\infty$

1) $\lim_{x \to 0} x^3 \text{συν} \frac{1}{x}$ συν∞ χαοςμω,

$$-1 \leq \text{συν}\frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left|\text{συν}\frac{1}{x}\right| \leq 1$$

$$|x^3| \left|\text{συν}\frac{1}{x}\right| \leq |x^3|$$

$$\left|x^3 \text{συν}\frac{1}{x}\right| \leq |x^3|$$

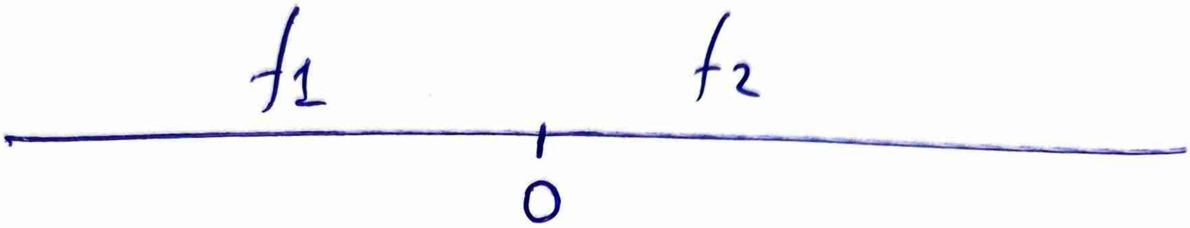
$$\boxed{-|x^3| \leq x^3 \text{συν}\frac{1}{x} \leq |x^3|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} -|x^3| = 0 \\ \lim_{x \to 0} |x^3| = 0 \end{array}\right\}$$

Απο Κ.Π

$$\lim_{x \to 0} x^3 \text{συν}\frac{1}{x} = 0$$

5. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}, & x>0 \\ 4, & x=0 \\ \dfrac{ημ4x}{x}, & x<0 \end{cases}$$



H $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

ως π. σ. σ.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{ημ4x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ημ4x}{4x}\, 4$$

$$= 1 \cdot 4 = 4$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{ημ4x}{4x} \;\underset{\substack{x\to 0\\ t\to 0}}{\overset{4x=t}{=\!=}}\; \lim_{t\to 0} \frac{ημt}{t} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}(\sqrt{x+4} + 2)}{\cancel{x}} = 4$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 4$$

Άρα $\underline{\underline{\lim_{x \to 0} f(x) = 4}}$

Επίσης $\underline{\underline{f(0) = 4}}$

Συνεχής $\underline{\underline{\text{και}}}$ στο 0!

Άρα και στο $\mathbb{R}$

2. Ενοτητα 13

$f: R \to R$ συνεχής

$f(1) = 2$

$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in R$

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ ψαχνω το D_g

πρεπει $x \in D_f$ και $f(x) > 0$

$x \in R$

που ειναι $\underline{\underline{D_g = R}}$

Αφου η $f(x)$ ειναι συνεχής και

$f(x) \neq 0$ τοτε $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$\forall x \in R$.

Αφου $f(1) = 2$ τοτε $\underline{\underline{f(x) > 0}}$

6. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $f(x) \neq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 f(0) + x - 1}{x^2 f(1) + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 f(0)}{x^2 f(1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(0)\, x}{f(1)} = \frac{f(0)}{f(1)} \cdot (+\infty) = +\infty$$

$+$

Αφού $f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Το $f(0)$ και $f(1)$ είναι ομόσημοι

άρα $\dfrac{f(0)}{f(1)} > 0$.

7. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Νδο η εξίσωση $x f(x) = x^2 - 4$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα

στο $(-2, 2)$.

$$\underbrace{x f(x) - x^2 + 4}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[-2, 2]$

ως π.δ.σ.

$g(-2) = -2 f(-2)$

$g(2) = 2 f(2)$

Άρα $g(-2) g(2) = -4 f(-2) f(2) < 0$

Αφού $f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

άρα $f(-2)$ και $f(2)$

ομόσημοι άρα $f(-2)f(2) > 0$

Bolzano $\exists x_0 \in (-2, 2)$

τ.ω $g(x_0) = 0$

$x_0 f(x_0) = x_0^2 - 4$.

25. $f: R \to R$ συνεχής

$f(x) \neq e^x \quad \forall x \in R$

Ενότητα 13

Ν.δ.ο η εξίσωση $\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{f(x)-e^x}$

έχει ρίζα $(-1,1)$.

$$x\,(f(x)-e^x) = x^2-1$$

$$\underbrace{x\,(f(x)-e^x) - x^2+1}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[-1,1]$ και ν.δ.ο

$$g(-1) = -\,(f(-1)-e^{-1}) = -h(-1)$$

$$g(1) = (f(1)-e) = h(1)$$

Άρα $g(-1)\,g(1) = -\underbrace{h(-1)\,h(1)}_{\text{ομόσημοι}} < 0$

Bolzano $\exists\, \xi \in (-1,1)$ τ.ω $g(\xi) = 0$

$f(x) \neq e^x$

$f(x) - e^x \neq 0$

$h(x) \neq 0$ και συνεχής

$h(x) > 0$ ή $h(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) - e^x > 0$ ή $f(x) - e^x < 0$

$\boxed{f(x) > e^x \text{ ή } f(x) < e^x}$

5. (B) $f^2(x) + 4\eta\mu x = \eta\mu^2 x + 4$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

$f(0) = 2$

$$f^2(x) = \eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 4$$

$$f^2(x) = (\eta\mu x - 2)^2$$

$$|f(x)| = |\eta\mu x - 2|$$

$$|f(x)| = 2 - \eta\mu x$$

Ρίζα $f(x)$

$$f(x) = 0$$

$$|f(x)| = 0$$

$$2 - \eta\mu x = 0$$

$$\eta\mu x = 2$$

Άτοπο!

$f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(0) = 2$

$$f(x) > 0$$

$$f(x) = 2 - \eta\mu x$$

14. (δ) $f^2(x) = 2 - ημx$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$$f^2(x) = \sqrt{2 - ημx}^{\,2}$$

$f(0) = \sqrt{2}$

$$|f(x)| = \left|\overset{(+)}{\sqrt{2 - ημx}}\right|$$

$$|f(x)| = \sqrt{2 - ημx}$$

Ρίζα $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$\sqrt{2 - ημx} = 0$

$2 - ημx = 0$

$ημx = 2$

Αδύνατο

$f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(0) = \sqrt{2}$

$f(x) > 0$

$$\overset{(+)}{|f(x)|} = \sqrt{2 - ημx}$$

$$f(x) = \sqrt{2 - ημx}$$

13. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Ενότητα 13

$$|f(x)| = x^2+5$$

$$f(0) = 5$$

Τύπο $f(x)$

Ρίζα $f(x)$

$$f(x) = 0$$

$$|f(x)| = 0$$

$$x^2+5 = 0$$

$$x^2 = -5$$

Αδύνατον

$f(x) \neq 0$ και συνεχής

$\Rightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$$f(0) = 5$$

$$f(x) > 0$$

$$|\underset{+}{f(x)}| = x^2+5$$

$$f(x) = x^2+5$$

14. ⓐ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$|f(x)| = 1$

$f(0) = -1$

Ρίζα	$f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$1 = 0$

Αδύνατη

$f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(0) = -1$

$\Rightarrow f(x) < 0$.

$\ominus$

$|f(x)| = 1$

$-f(x) = 1$

$f(x) = -1$

17. (δ) $x^4 + f^2(x) = 1 + 2x^2 f(x)$ $\quad \underline{\underline{f(0)=1}}$

$$f^2(x) - 2x^2 f(x) = 1 - x^4$$

$$f^2(x) - 2x^2 f(x) + x^4 = 1$$

$$\left(f(x) - x^2\right)^2 = 1^2$$

$$|f(x) - x^2| = |\overset{+}{1}|$$

$$|\overset{+}{h(x)}| = 1 \Rightarrow \cancel{f(x) - x^2 = 1}$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

Ρίζα $h(x)$

$h(x) = 0$
$\lvert h(x)\rvert = 0$
$1 = 0$
Άτοπο!

$h(x) \neq 0$ και συνεχής

$h(x) > 0$ ή $h(x) < 0$

$h(0) = f(0) - 0^2 = 1$

$h(x) > 0$

17.

(B) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$$f^2(x) = 1 - 2x f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = -1$$

$$f^2(x) + 2x f(x) = 1$$

$$f^2(x) + 2x f(x) + x^2 = x^2 + 1$$

$$(f(x) + x)^2 = x^2 + 1$$

$$(f(x) + x)^2 = \sqrt{x^2+1}^{\,2}$$

$$|f(x) + x| = |\overset{+}{\sqrt{x^2+1}}|$$

$$|\underbrace{f(x) + x}_{h(x)}| = \sqrt{x^2+1}$$

$$|h(x)| = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow -h(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$-f(x) - x = \sqrt{x^2+1}$$

$$f(x) = -x - \sqrt{x^2+1}$$

Ρίζα $h(x)$

$h(x) = 0$

$|h(x)| = 0$

$\sqrt{x^2+1} = 0$

Άτοπο!

$h(x) \neq 0$ και συνεχής.

$h(x) > 0$ ή $h(x) < 0$

$$h(0) = f(0) + 0 = -1$$

$$h(x) < 0$$

19. B $f^2(x) + 2e^x = e^{2x} + 1$

$f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\qquad f(\ln 2) = -1$

$$f^2(x) = e^{2x} - 2e^x + 1$$

$$f^2(x) = (e^x - 1)^2$$

$$|f(x)| = |\overset{+}{e^x - 1}|$$

$x > 0 \Rightarrow e^x > e^0$

$e^x > 1$

$e^x - 1 > 0$

$$|\overset{-}{f(x)}| = e^x - 1$$

P,Tu $f(x)$ $\qquad \Rightarrow -f(x) = e^x - 1$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$e^x - 1 = 0$

$e^x = 1$

$x = 0$

$$f(x) = 1 - e^x$$

x	0
$f(x)$	//// 0 $-$

$f(\ln 2) = -1$

20. (B) $f^2(x) = 4 - x^2$

$f: [-2,2] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$f(0) = 2$

$f^2(x) = 4 - x^2$

$f^2(x) = \sqrt{4-x^2}^{\,2}$

$|f(x)| = |\sqrt{4-x^2}|$

$|f(x)| = \sqrt{4-x^2} \longrightarrow f(x) = \sqrt{4-x^2}$

Ρ.Τ.Δ $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$\sqrt{4-x^2} = 0$

$4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2$ $x = -2$

x		-2		2	
$f(x)$		0	+	0	

$f(0) = 2$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος : 7/9/26

Ώρα μαθήματος : 7:30 εως 9:30

Ασκήσεις

Ενοτιτα 13

14 β γ

15 α

17 α γ

18

19 α

20 . 24

Ενοτιτα 12

26

27

28.

παρατηρήσεις

Ξεκιναω το μαθημα με Bolzano

ωστε να τελειωσα πληρως.