2023

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

δ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» ("1-1") συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}$, $x>0$.

Β2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{συν}(1+x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha, & x\geq 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x\,f(x)\,dx=1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

Μονάδες 4

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» ("1-1") (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y=-x+2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2)\to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα (0,2) με $F(x_1)=G(x_2)=0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2)+G(x_1)=0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2).

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Πανελλαδικες 2023

A1: 3.10

A2: 1.31

A3: 1.34 + 1.35.

A4: ⓐ Λ ⓑ Λ ⓒ Λ ⓓ Σ ⓔ Σ

B1: $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \dfrac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} =$

$= \dfrac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \dfrac{4 - x^2}{x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \dfrac{4-x^2}{x},\ D_f = (0, +\infty)}$

$x \in D_h$ και $h(x) \in D_g$

$x > 0$ $\qquad \ln x \in \mathbb{R}$

B2: i) $f'(x) = \dfrac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{x^2} = \dfrac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} =$

$= \dfrac{-x^2 - 4}{x^2} < 0 \Leftrightarrow f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$.

ii). $e<\pi \Rightarrow f(e)>f(\pi) \Leftrightarrow \frac{4-e^2}{e} > \frac{4-\pi^2}{\pi}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{e} < \frac{4-\pi^2}{4-e^2}$ Αλλάζω φορά γιατί $4-e^2<0$

B3: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} (4-x^2)\frac{1}{x} = +\infty$

$\boxed{\varepsilon_1 : x=0 \text{ κατακόρυφη}}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} -x = -\infty$

Δεν έχει οριζόντια.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} =$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$

$\lim_{x\to +\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{4-x^2}{x} + x = \lim_{x\to +\infty} \frac{4\cancel{-x^2}\cancel{+x^2}}{x}$

$= 0$

$\varepsilon_2 : y=-x$

$+\infty$

B4: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sigma w(1+x^2)}{f(x)}$

$-1 \leq \sigma w(x^2+1) \leq 1$

$-\dfrac{1}{f(x)} \geq \dfrac{\sigma w(x^2+1)}{f(x)} \geq \dfrac{1}{f(x)}$ $\quad$ n $f(x)<0$ $\sigma\omega$ $+\infty$

$\left.\begin{aligned} &\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{f(x)} = 0 \\ &\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \end{aligned}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sigma w(x^2+1)}{f(x)} = 0,$

Γ1: $\int_2^3 x\, f(x)\, dx = 1 \iff \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right) dx = 1$

$\iff \int_2^3 1 + \alpha x \; dx = 1 \iff \int_2^3 1\, dx + \int_2^3 \alpha x\, dx = 1$

$\iff (x)_2^3 + \alpha \frac{1}{2}(x^2)_2^3 = 1 \iff \cancel{1} + \frac{\alpha}{2} 5 = \cancel{1}$

$\underline{\underline{\alpha = 0}}$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & x\geq 1 \end{cases}}$$

Γ2: i) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+3-1}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-3}{1} = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} -\dfrac{1}{x^2} = -1$

$f'(1) = -1$. άρα ορίζεται η εφαπτομένη στο 1.

ii). $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - 1 = -1(x-1)$

$\boxed{y = -x+2}$ εφω $= -1 \Leftrightarrow \omega = 135$

Γ3:

$x<1$

$f_1(x) = x^2-3x+3$

$f_1'(x) = 2x-3$

$\to 2x-3=0$

$\cancel{x = \frac{3}{2}}$

$x \geq 1$

$f_2(x) = \dfrac{1}{x}$

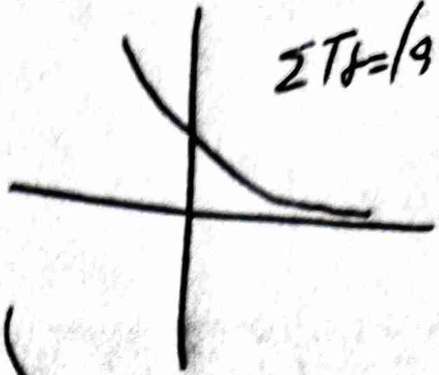
$f_2'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$

x		1	
f_1'	−		//////
f_2'	/////		−
f'	−		−
f	↘		↘

Η $f \downarrow$ άρα 1-1

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2-3x+1 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \to 0$$



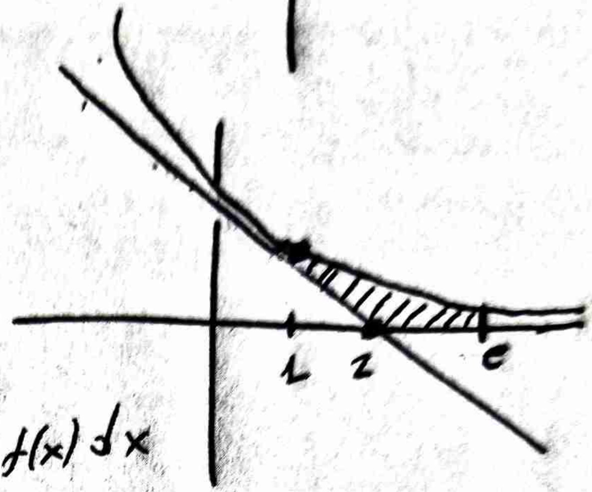
$ΣΤ_f=(0,+\infty).$

Γ4: $y=-x+2$

$y=0$

$0=-x+2$

$x=2$



$$E=\int_1^2 f(x)-(-x+2)\,dx+\int_2^e f(x)\,dx$$

$$E=\int_1^2 \frac{1}{x}+x-2\,dx+\int_2^e \frac{1}{x}\,dx$$

$$E=(\ln x)_1^2+\frac{1}{2}(x^2)_1^2-2(x)_1^2+(\ln x)_2^e$$

$$E=(\ln 2)+\frac{1}{2}(4-1)-2+1-\ln 2$$

$$E=\cancel{\ln 2}+2-\frac{1}{2}-\cancel{1}-\cancel{\ln 2}$$

$$E=\frac{1}{2}$$

Δ1: $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-2x}{x-1} = \ell$

Θεωρώ $g(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}$ και $\lim_{x\to 1} g(x) = \ell$.

$$\boxed{f(x) = g(x)(x-1)+2x}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x)(x-1)+2x$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + k\right) = \ell\cdot 0+2$$

$$-1+k=2$$

$$k=3.$$

Δ2: $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \qquad x\in(0,2)$.

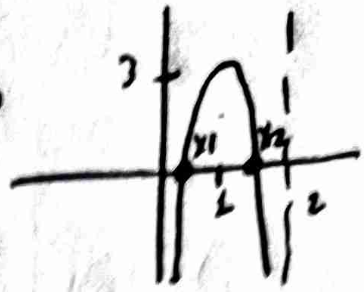
$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2+2-x}{(2-x)x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{x^2+x-2}{x^2(2-x)}$$

x	0		1		2
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

$\longrightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \quad x=-2 \quad x=1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right] = -\infty$$



$f(1) = 3$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$$

$0 < x \le 1$

- f συνεχής
- $f \nearrow$

$ΣΤ_f = (-\infty, 3]$

Το $0 \in ΣΤ_f$

άρα $\exists!\ x_1$ τ.ω

$f(x_1) = 0$

$1 < x < 2$

- f συνεχής
- $f \searrow$
- $ΣΤ_f = (-\infty, 3)$

Το $0 \in ΣΤ_f$

άρα $\exists!\ x_2$ τ.ω

$f(x_2) = 0$.

Έστω $x_1 \geq \frac{1}{3} \Rightarrow f(x_1) \geq f\left(\frac{1}{3}\right)$

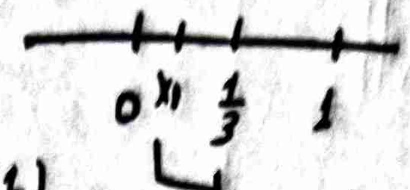
$0 \geq \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3$

$0 \geq \ln\frac{5}{3} - \cancel{3} + \cancel{3}$

$0 \geq \ln\frac{5}{3}$ Άτοπο!

Άρα $x_1 < \frac{1}{3}$.

Δ3: Αρκει $\exists \xi \in (0,1)$ τω $f'(\xi) = \dfrac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$



$$f'(\xi) = \frac{f(\frac{1}{3}) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$$

Δ4: i) Αφου F παραγουσα τη f τοτε ισχυει.

$$F'(x) = f(x)$$

Αφου G παραγουσα τη f τοτε ισχυει

$$G'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = G'(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + c$$

$\rightarrow$ $F(x_1) = G(x_1) + c$

$0 = G(x_1) + c \Rightarrow \boxed{c = -G(x_1)}$

$\rightarrow$ $F(x_2) = G(x_2) + c$

$F(x_2) = 0 - G(x_1)$

$$\boxed{F(x_2) + G(x_1) = 0}$$

11). $x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$

$$\boxed{\varphi(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x}$$

$\varphi(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1$

$\varphi(x_1) = \cancel{x_1 F(x_1)}^{0} + x_2 G(x_1) + x_1 - x_2$

$$\boxed{\varphi(x_1) = x_2 G(x_1) + x_1 - x_2}$$

$\varphi(x_2) = x_1 F(x_2) + \cancel{x_2 G(x_2)}^{0} - x_1 - x_2 + 2x_2$

$$\boxed{\varphi(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1}$$

Γνωρίζω ότι $F(x_2) + G(x_1) = 0$.

$\varphi(x_1) = -x_2 F(x_2) - (x_2 - x_1) < 0$

$\varphi(x_2) = x_1 F(x_2) + \underbrace{x_2 - x_1}_{+} > 0$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2)$
- $\forall x \in (x_1, x_2)$ η $f(x) > 0 \Rightarrow F \uparrow$

$\varphi(x_1)\varphi(x_2) < 0$ αρα Bolzano $\exists \rho \in (x_1, x_2)$

τω $\varphi(\rho) = 0$.

$\varphi'(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + 2 > 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$

$\varphi \nearrow$ αρα το ρ μοναδική ρίζα.

2024 ✓

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό ζ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \zeta$.

Μονάδες 6

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g, δηλαδή η συνάρτηση $g \circ f$, ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

και $h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Β1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f=\dfrac{g}{h}$ και $r=g\cdot h$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1},\ x>1 \quad \text{και} \quad r(x)=x-\frac{1}{x},\ x\geq 1.$$

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1}=f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r.

Μονάδες 6

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4r(x)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-2x+4+e^{\lambda}, & 0\leq x<2\\ -x^2+4x-3+\lambda, & x\geq 2,\end{cases}$$

με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Μονάδες 6

Γ3. i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0,3]$.

(μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Κινητό σημείο M ξεκινά από το σημείο $A(2,0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 0{,}5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega} = A\hat{O}M$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο M θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x + \alpha x}{x},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0,+\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Μονάδες 6

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

(μονάδες 3)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x \le x^2$ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x=-\ln 2$ και $x=0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Πανελληνιες 2024

A1: 3.4.

A2: 1.43.

A3: Ολοκληρωματα.

A4: α Σ β Σ γ Λ δ Λ ε Σ.

B1: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}^2 + 1}{\sqrt{x}^2 - 1} = \frac{x+1}{x-1}$

$D_f = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$. και $h(x) \neq 0 \rightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0$

$x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

Αρα $D_f = (1, +\infty)$.

$r(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

$r(x) = x - \frac{1}{x}$

$D_r = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$

B2 : $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$.

Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1+1}{x_1-1} = \dfrac{x_2+1}{x_2-1}$

$(x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1)$

$\cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 - \cancel{1} = \cancel{x_2 x_1} - x_2 + x_1 - \cancel{1}$

$\Rightarrow 2x_2 = 2x_1$ $\Rightarrow$ f 1-1 άρα

$x_1 = x_2$ αντιστρέψιμη.

Έστω $f(x) = y \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = x+1$

$yx - y = x+1 \Rightarrow yx - x = y+1$

$x(y-1) = y+1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$ $\underline{\underline{y \neq 1}}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Όμως $x > 1 \Rightarrow \dfrac{y+1}{y-1} > 1 \Rightarrow \dfrac{y+1}{y-1} - 1 > 0$

$\dfrac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Rightarrow \dfrac{2}{y-1} > 0 \Rightarrow y > 1$

$D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$ $f = f^{-1}$

B3: $r(x) = x - \frac{1}{x}, \ x > 1.$

. κατακορυφη δεν εχει.

$$\lim_{x \to +\infty} r(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(r(x) - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0.$$

$\varepsilon: y = x$ $+\infty$

B4: $\left[f^{-1}\left(H(x) \right) \right]^2 = 1 + 4 r(x)$

$$x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x} \right) \Rightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x}$$

$$x^3 = x + 4x^2 - 4 \Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

$$x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0$$

$x = 4$ ✓ $\cancel{x = 1}$ $\cancel{x = -1}$

Γ1: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-2x+4+e^{\lambda}) = e^{\lambda}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2+4x-3+\lambda) = 1+\lambda$

$e^{\lambda} = \lambda+1$

• $e^x \geq x+1$ Το "=" για $x=0$

έχω $\underline{\underline{\lambda=0}}$

Γ2: $f(x) = \begin{cases} -2x+5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2+4x-3, & x \geq 2 \end{cases}$

$\underline{0 \leq x < 2}$

$f_1(x) = -2x+5$

$f_1'(x) = -2 < 0$

$\underline{x > 2}$

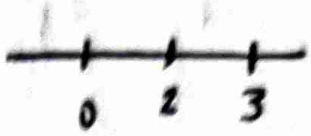
$f_2(x) = -x^2+4x-3$

$f_2'(x) = -2x+4 = -2(x-2)$ $\oplus$

x	0	2
f_1'	$-$	////
f_2'	////	$-$
f'	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\searrow$

$A(0,5)$ Ο.Μ.

Γ3 ii) Η f συνεχής στο $[0,3]$ ως α.σ.σ.



$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{-2}{1} = -2$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{-2x+4}{1} = 0$$

Δεν είναι παρ/μη στο 2 άρα

δεν ικανοποιεί το ΘΜΤ.

ii). $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ // $\varepsilon_{ΔΕ}$

$$f'(\xi) = \lambda_{ΔΕ} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0}$$

$$f'(\xi) = \frac{0-5}{3} \Leftrightarrow f'(\xi) = -\frac{5}{3}.$$

$$f'(x) = -\frac{5}{3}.$$

$0 \le x < 2$

$$f'(x) = -\frac{5}{3}$$

$$-2 = -\frac{5}{3}$$

Αδύνατη

$x > 2$

$$f'(x) = -\frac{5}{3}$$

$$-2x+4 = -\frac{5}{3}$$

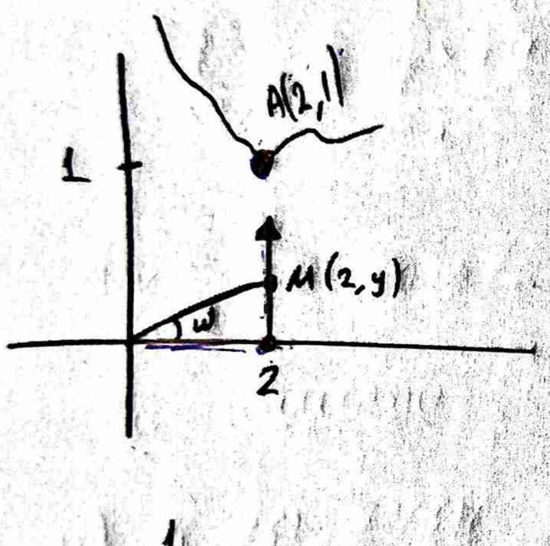
$$-2x = -\frac{5}{3} - 4$$

$$-6x = -5 - 12$$

$$-6x = -17$$

$$x = \frac{17}{6} \checkmark$$

Γ4:



$$\varepsilon\varphi\,\omega = \frac{y}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\,\omega(t) = \frac{1}{2}\,y(t)$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\,\omega'(t) = \frac{1}{2}\,y'(t)$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega(t)}}\,\omega'(t) = \frac{1}{2}\,y'(t)$$

$$\left[1+\varepsilon\varphi^2\omega(t)\right]\cdot\omega'(t) = \frac{1}{2}\,y'(t)$$

$$\left[1+\frac{1}{4}y^2(t)\right]\omega'(t) = \frac{1}{2}\,y'(t)$$

Για $t = t_1$

$$\left[1 + \frac{1}{4} y^2(t_1)\right] w'(t_1) = \frac{1}{2} y'(t_1)$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το Μ τέμνει τα Cf.

$x(t_1) = 2$ Η ταχύτητα είναι ο ρυθμός

$y(t_1) = 1$ μεταβολής της θέσης.

$$\boxed{v = 0,5 \Rightarrow y'(t) = 0,5}$$

$$\left(1 + \frac{1}{4} 1^2\right) w'(t_1) = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4} w'(t_1) = \frac{1}{4}$$

$$w'(t_1) = \frac{1}{5}.$$

Δ_1: $f(x) = \dfrac{\ln x + ax}{x}$ $\quad \Sigma T_f = \left(-\infty, 1+\frac{1}{e}\right]$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)x - (\ln x + ax)}{x^2} = \frac{1+\cancel{ax} - \ln x - \cancel{ax}}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}}$$

$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$

$x = e$

x	0		e	
f'		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$		$\searrow$

$f(x) \le f(e)$

$f(x) \le \dfrac{1+ae}{e}$

Πρέπει $\dfrac{1+ae}{e} = 1 + \dfrac{1}{e} \Rightarrow \cancel{1} + ae = e + \cancel{1}$

$ae = e$

$a = 1$

Δ_2: $\boxed{f(x) = \dfrac{\ln x + x}{x}}$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 1 - \ln 2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-2\ln 2 + 1}{1} = 1 - 2\ln 2$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln 4 = \ln e - \ln 4 = \ln \frac{e}{4} < 0$

$f(1) = 1 \quad \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) f(1) < 0$ Bolzano $\exists x_0$ τ.ω $f(x_0)$.

$x<e$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$f(e) = 1+\frac{1}{e}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

• συνεχής

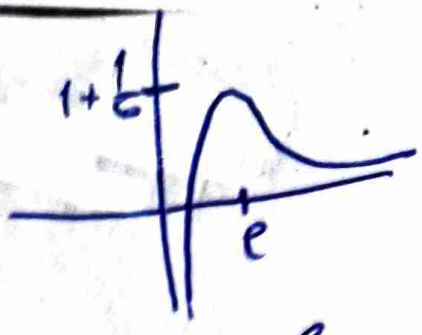
• f ↑

$\Sigma T_f = (-\infty, 1+\frac{1}{e}]$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists x_0$

τ.ω. $f(x_0)=0$



• $x>e$

$\Sigma T_f = (0, 1+\frac{1}{e})$

$0 \notin \Sigma T_f$

Δ3: i) $f(x) = f(4)$

Το $x=4$ προφανής λύση.

• $f(2) = \frac{\ln 2 + 2}{2}$

$f(4) = \frac{\ln 4 + 4}{4} = \frac{\ln 2^2 + 4}{4} = \frac{2\ln 2 + 4}{4} = \frac{\ln 2 + 2}{2}$

Άρα $f(2) = f(4)$ $x=2$ ρίζα επίσης.

Έχω δύο διαστήματα μονοτονίας

συνεχής η εξίσωση $f(x) = f(4)$

έχει το πολύ 2 λύσεις.

και αφού έχω βρει ήδη δύο

είναι και μοναδικές.

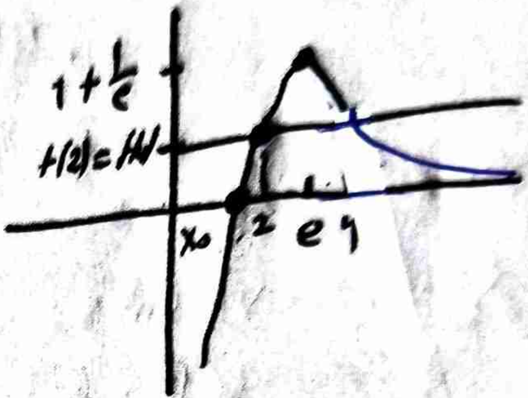
11). $2^x \le x^2$ στο $(0,+\infty)$.

$\ln 2^x \le \ln x^2$

$x\ln 2 \le 2\ln x$

$\frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{\ln 2}{2}+1 \le \frac{\ln x}{x}+1$

$\frac{\ln 2+2}{2} \le \frac{\ln x+x}{x}$



$f(2) \le f(x)$

$x\in[2,4]$.

Β' τρόπος

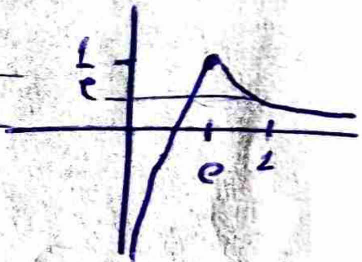
$\frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x}$

$\boxed{h(x)=\frac{\ln x}{x}}$

$h(2)\le h(x)$

$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

x		e	
h'	$+$		$-$
h	$\nearrow$		$\searrow$



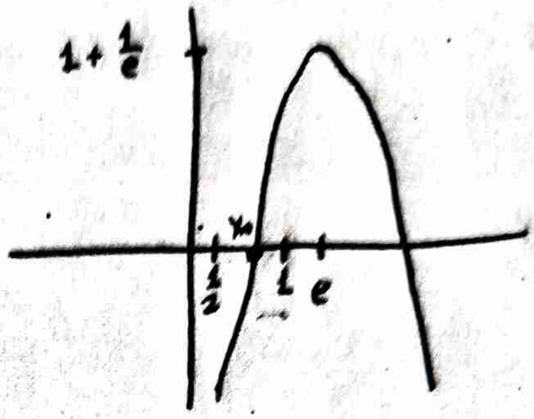
$\lim_{x\to 0^+} h(x)=-\infty$

$h(e)=\frac{1}{e}$

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Δ4: $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}$

$$E = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|\, dx = \int_{-\ln 2}^{0} |f(e^x)| \cdot \frac{1-x}{e^x}\, dx \overset{(*)}{=}$$



Θέτω $e^x = t$

$x = \ln t$

$dx = \frac{1}{t}\, dt$

$$\overset{(*)}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(t)| \frac{1-\ln t}{t^2}\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(x)| \frac{1-\ln x}{x^2}\, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(x)|\, f'(x)\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(x) f'(x)\, dx + \int_{x_0}^{1} f(x) f'(x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left(f^2(x)\right)_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \frac{1}{2}\left(f^2(x)\right)_{x_0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cancel{f^2(x_0)}^{0} - f^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left[f^2(1) - \cancel{f^2(x_0)}^{0}\right]$$

$$= \frac{1}{2}f^2\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f^2(1) = \frac{1}{2}\ln^2\frac{e}{4} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left((\ln e - \ln 4)^2 + 1\right) = \frac{1}{2}\left[(1-2\ln 2)^2 + 1\right]$$

2025

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, για κάποιο $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 5

Α3. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι "1-1". Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f^{-1}, της f είναι το σύνολο τιμών της f.

β) Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

γ) Αν $\nu\in\mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=-\infty$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

c) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

Στα ερωτήματα Β2 έως Β4 να θεωρήσετε ότι $\alpha = -6$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

Β4. Έστω $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x \eta\mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\alpha, 0)$.

Μονάδες 6

Γ4. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M, $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και μια παράγουσα, F, της f στο $(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$xf(x) = 2F(x)\ln x \text{ , για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x > 0$, είναι σταθερή.

Μονάδες 6

Δ2. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{\ln x}$. (μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι $F(1) = 1$ (μονάδες 3) και $F(x) = x^{\ln x}$, για κάθε $x > 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 9

Δ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $F\left(x^2\right)=F(x)-(x-1)^2$ στο διάστημα $(0,+\infty)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F, τις ευθείες $x=1$, $x=e$ και τον άξονα $x'x$ ισχύει $E>2e-3$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Α1: Απόδειξη ολοκληρώματα

Α2: Βασικό Θεώρημα.

Α3: Βασικός ορισμός

Α4: (α) Σ (β) Σ (γ) Λ (δ) Λ (ε) Σ

Β1: Fermat $f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2\alpha x+9$

$f'(1)=3+2\alpha+9=0 \Rightarrow 2\alpha=-12 \Rightarrow \boxed{\alpha=-6}$

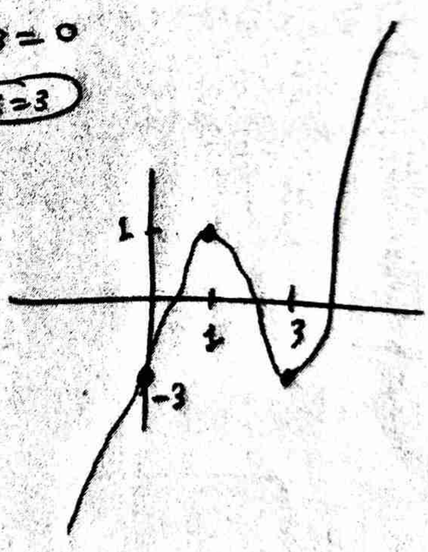
Β2: $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$

$\rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$

$x=1$ $x=3$

x		1	3	
f'	+		−	+
f	$-\infty$ ↗ 1		↘ -3	↗



$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$f(1)=1$

$f(3)=-3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Όταν $x<0 \Rightarrow f(x)<f(0) \Rightarrow f(x)<-3$ άρα η $f(x)$ δεν έχει ρίζα πριν το 0.

$x<1$	$1\leq x\leq 3$	$x>3$
• f συνεχής	• f συνεχής	• f συνεχής
• $f \nearrow$	• $f \searrow$	• $f \nearrow$
• $\Sigma T_f=(-\infty,1]$	• $\Sigma T_f=[-3,1]$	• $\Sigma T_f=[-3,+\infty)$
Το $0\in\Sigma T_f$	Το $0\in\Sigma T_f$	Το $0\in\Sigma T_f$
α $\exists!\ \xi_1>0$	άρα $\exists!\ \xi_2>0$	άρα $\exists!\ \xi_3>0$
τ.ω $f(\xi_1)=0$	τ.ω $f(\xi_2)=0$	τ.ω $f(\xi_3)=0$

B3 $f''(x)=6x-12$

$\rightarrow 6x-12=0 \Rightarrow x=2$

x		2	
f''	$-$		$+$
f	$\frown$		$\smile$

B4 [redacted] $\Rightarrow y=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$

$y-g(\xi)=g'(\xi)(x-\xi) \Rightarrow y=g'(\xi)(x-\xi)+g(\xi)$

$$\boxed{\begin{aligned} g(x)&=x+f(x)\\ g'(x)&=1+f'(x)\end{aligned}}$$

$$f'(5)(x-5) + f(5) = g'(5)(x-5) + g(5)$$

$$f'(5)(x-5) + \cancel{f(5)} = (1+f'(5))(x-5) + 5 + \cancel{f(5)}$$

$$\cancel{f'(5)x} - 5f'(5) = x - \cancel{5} + \cancel{xf'(5)} - 5f'(5) + \cancel{5}$$

$$\rightarrow \boxed{x=0}$$

Γ1

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x \eta\mu x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+x} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \checkmark$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x \eta\mu x - 0}{x} = \lim_{x\to 0} e^x \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x+1}{x}} = +\infty$$

Γ2: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x \eta\mu x = 0$ Μχ Φ $\underline{y=0}$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$ δεν εχει οριζοντια στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

$y = x + \frac{1}{2}$

$+\infty$

Γ3 Αρκει νδο η εξισωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ εχει μια τουλαχιστον ριζα στο $(-\pi, 0)$.

$$\underbrace{e^x \eta\mu x - x - \frac{1}{2}}_{g(x)} = 0$$

$$g(-\pi) = \cancel{e^{-\pi}\eta\mu(-\pi)}^{0} + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = -\frac{1}{2} < 0$$

Bolzano $\exists\, \xi \in (-\pi, 0)$ τ.ω $g(\xi) = 0$

Γ4 [redacted]

$y'(t) = x'(t)$

$\frac{2x(t)x'(t)+x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = x'(t)$ αφου $x'(t)>0$

$2x(t)+1 = 2\sqrt{x^2(t)+x(t)}$

Πρεπει απλα να λυσω την εξισωση

$2\sqrt{x^2+x} = 2x+1$ $2x+1 \geq 0$, $x^2+x \geq 0$

$4(x^2+x) = (2x+1)^2$

$4x^2+4x = 4x^2+4x+1$ Δεν υπαρχει τετοιο σημειο.

$0=1$ Αδυνατη!

[redacted]

Δ1 $g(x) = \dfrac{F(x)}{x^{\ln x}}$

$$g'(x) = \frac{f(x)\, x^{\ln x} - F(x)\, x^{\ln x}\, 2\ln x\, \frac{1}{x}}{x^{2\ln x}}$$

$$g'(x) = \frac{f(x) - F(x)\, 2\ln x\, \frac{1}{x}}{x^{\ln x}} = \cancel{\frac{x f(x) - 2\ln x\, F(x)}{x \cdot x^{\ln x}}} = 0$$

$g(x) = c$

Δ2 Γνωρίζω ότι $f'(1) = 2$ και $f(1) = 0$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = 2.$

ii) $F(x) = \dfrac{x f(x)}{2\ln x}$, $x \neq 1$, $x > 0$

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x f(x)}{2\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2}\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

F συνεχής $\Rightarrow F(1) = 1$

$g(x) = c \Rightarrow \dfrac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Rightarrow F(x) = c\, x^{\ln x}$

$F(1) = c = 1 \Rightarrow F(x) = x^{\ln x}.$

Δ3

$$F'(x) = x^{\ln x} \, \frac{2\ln x}{x}$$

$$\boxed{x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln^2 x}}$$

$\longrightarrow F'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0$ $x = 1$

x		1	
F'	$-$		$+$
F	$\searrow$		$\nearrow$

$F(x) \geq F(1)$

$F(x) \geq 1$

$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ $x = 1$

$x < 1$

$$\underbrace{F(x^2) - F(x)}_{\oplus} + \underbrace{(x-1)^2}_{\oplus} = 0$$

- $x^2 < x \Rightarrow F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

$x > 1$

$$\underbrace{F(x^2) - F(x)}_{\oplus} + \underbrace{(x-1)^2}_{\oplus} = 0$$

- $x < x^2 \Rightarrow F(x) < F(x^2) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

Δ4 $E = \int_1^e |F(x)|\,dx = \int_1^e |x^{\ln x}|\,dx$

$E = \int_1^e F(x)\,dx$

Αρκεί ν.δ.ο. $\int_1^e F(x)\,dx > 2e-$

$\boxed{x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln^2 x}}$

$e^x \geq x+1$

$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$

$F(x) \geq \ln^2 x + 1$

$\int_1^e F(x)\,dx \geq \int_1^e \ln^2 x + 1\,dx$

$\to \int_1^e \ln^2 x + 1\,dx = (x\ln^2 x)_1^e - \int_1^e x\frac{2\ln x}{x}\,dx + e - 1$

$= 2e - 2\int_1^e \ln x\,dx - 1 = 2e - 2\left((x\ln x)_1^e - e + 1\right) - 1$

$= 2e - 2(e - e + 1) - 1 = 2e - 3$

Δ_2 διεραμμου

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{f'(1)}{1} = 2$

για να δεχτω το σημειο αυτο πρεπει η $f'(x)$ να ειναι συνεχης,

$x f(x) = 2F(x)\ln x$

$f(x) = 2\,\dfrac{F(x)\ln x}{x}$

$f'(x) = 2\,\dfrac{(F(x)\ln x)'x - F(x)\ln x}{x^2}$

$f'(x) = 2\,\dfrac{\left(f(x)\ln x + F(x)\frac{1}{x}\right)x - F(x)\ln x}{x^2}$

Η f' συνεχης ως π.σ.σ

B' τροπος

$\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{\ln x} \overset{f(1)=0}{=}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = \dfrac{f'(1)}{1} = 2.$

$x f(x) = 2F(x)\ln x$

$x=1$

$f(1) = 0$

$\to \lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$