

Θεωρημα 1

Η διαίρεση του $P(x)$ με το $x - \rho$

δίνει υπόλοιπο $P(\rho)$.

Απόδειξη

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \eta(x) + \upsilon(x) \quad \text{Ευκλείδεια διαίρεση}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ P(x) & = & (x - \rho) \eta(x) + \upsilon \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x = \rho \\ \hline P(\rho) = (\rho - \rho) \eta(\rho) + \upsilon \end{array}$$

$$\underline{\underline{P(\rho) = \upsilon}}$$

Θεώρημα 2

Το $x-p$ είναι παραγοντάς του $P(x)$
αν και μόνο αν το p είναι ρίζα
του.

Απόδειξη

$$\Rightarrow \Delta(x) = \delta(x) \cdot \eta(x) + \upsilon(x)$$

Το $x-p$ είναι παραγοντάς.

$$P(x) = (x-p) \cdot \eta(x)$$

$$\begin{array}{c} x=p \\ \hline P(p) = (p-p) \eta(p) \end{array}$$

$$P(p) = 0 \quad \text{αφού το } p \text{ ρίζα.}$$

$\Leftarrow$ Αν p ρίζα τότε $P(x)$ $\forall$ $x-p$
παραγοντάς

$$P(x) = (x-p) \eta(x) + \upsilon$$

$$P(p) = (p-p) \eta(p) + \upsilon$$

$$\underset{x=p}{=} 0 = 0 + \upsilon \Rightarrow \upsilon = 0$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-p) \eta(x)$$

Το $x-p$ παραγοντάς

Θεώρημα 3

Θεώρημα ακέραιων ριζών.

Κάθε πολυώνυμο v βαθμού
του οποίου το p είναι πηλίκο
του και $p \in \mathbb{Z}$ τότε το p
διαίρει το σταθερό όρο.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

Από το p είναι πηλίκο.

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0$$

Το p είναι παράγοντας του a_0
αρα το p διαίρει το a_0 .

Επίλυση

$$\frac{1}{\pm 1}$$

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ \downarrow & & & & \\ 1 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$(x - 1)(1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

ή

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 5$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Προδοχ

1. Όταν μου λες ότι το

$P(x)$ έχει

- ρίζα το 1 τότε $P(1)=0$
- παραγοντα το $x-1$ τότε $P(1)=0$

2. Όταν μου λες ότι το

υπόλοιπο του $P(x)$ με το $x-1$
είναι 5.

Τότε $P(1) = 5$..

⑬ $P(x) = 4x^2 - \alpha x + \beta - 2\alpha$

• To undoing $\text{int } P(x) : (x + \frac{1}{2}) \longrightarrow 1$

• To -1 $P(1)$ $\text{we } P(x)$

$$P(-\frac{1}{2}) = 1, \quad P(-1) = 0$$

$$P(-\frac{1}{2}) = 4 \cdot \frac{1}{4} - \alpha(-\frac{1}{2}) + \beta - 2\alpha = 1$$

$$1 + \frac{\alpha}{2} + \beta - 2\alpha = 1$$

$$\alpha + 2\beta - 4\alpha = 0$$

$$\boxed{2\beta = 3\alpha}$$

$$P(-1) = 4 + \alpha + \beta - 2\alpha = 0$$

$$\boxed{-\alpha + \beta = -4}$$

14. $P(x) = x^3 - \alpha x + \beta - 1$

οταν διαιρω το $P(x)$ με το $x+1$

δινει υπολοιπο 3

ενω $P(x) : x$ δινει υπολοιπο 2.

$$\underline{\underline{P(-1) = 3}}$$

$$-1 + \alpha + \beta - 1 = 3$$

$$\underline{\underline{\alpha + \beta = 5}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 2}}$$

$$\underline{\underline{P(0) = 2}}$$

$$B - 1 = 2$$

$$\underline{\underline{B = 3}}$$

41.

$$P(0)=0$$

$$P(1)=2$$

$$P(-1)=3$$

$$P(x) = (x^3 - x) n(x) + v(x)$$

$$P(x) = (x^3 - x) n(x) + (ax^2 + bx + c)$$

$$\bullet P(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c = 0}}$$

$$\bullet P(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2 \Rightarrow \underline{\underline{a + b = 2}} \quad (+)$$

$$\bullet P(-1) = 3 \Rightarrow a - b + c = 3 \Rightarrow \underline{\underline{a - b = 3}}$$

$$2a = 5$$

$$a = \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2} - b = 3$$

$$5 - 2b = 6$$

$$-2b = 1$$

$$\underline{\underline{b = -\frac{1}{2}}}$$

$$v(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

48. $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$

Διαρρηξαι $x^2 + 1$.

$x^3 + ax^2 + bx - 1$ $-(x^3 + x)$ $ax^2 + bx - x - 1$ $ax^2 + (b-1)x - 1$ $-(ax^2 + a)$ $(b-1)x - a - 1$	$x^2 + 1$ $x + a$
---	--

Απάντη $b-1=0$, $-a-1=0$

$$\underline{\underline{b=1}} \qquad \underline{\underline{a=-1}}$$

23. $P(x) = -x^3 + a^2x^2 - B^2x - 2a$

Εχουμε παραγοντα $x+1$

$$P(-1) = 0$$

$$P(-1) = 1 + a^2 + B^2 - 2a = 0.$$

$$a^2 - 2a + 1 + B^2 = 0$$

$$(a-1)^2 + B^2 = 0$$

$$a=1$$

$$B=0$$

$$27. \quad P(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 4$$

Εχουμε παραγοντες του παραγοντες

$$\text{του } x^2 - 4$$

↓

$$(x-2)(x+2)$$

↓

$$P(2) = 0$$

↘

$$\underline{\underline{P(-2) = 0}}$$

$$P(2) = 8 - 4\alpha + 2\beta + 4 = 0$$

$$-4\alpha + 2\beta = -12$$

$$\underline{\underline{-2\alpha + \beta = -6}}$$

(+)

$$-4\alpha = -4$$

$$\underline{\underline{\alpha = 1}}$$

$$P(-2) = -8 - 4\alpha - 2\beta + 4$$

$$= 0$$

$$-4\alpha - 2\beta = 4$$

$$\underline{\underline{-2\alpha - \beta = 2}}$$

$$\underline{\underline{\beta = -4}}$$

51.

$$P(x) = ax^3 - 5x^2 + bx + 9$$

Εχουμε παραγοντα το $(x-3)^2$

$$\alpha \quad -5 \quad b \quad 9 \quad (3)$$

$$\downarrow \quad 3\alpha \quad 9\alpha - 15 \quad 27\alpha + 3b - 45$$

$$\alpha \quad 3\alpha - 5 \quad 9\alpha + b - 15$$

$$27\alpha + 3b - 36$$

αναντω 0

$$27\alpha + 3b - 36 = 0$$

$$9\alpha + b - 12 = 0$$

$$\underline{\underline{b = 12 - 9\alpha}}$$

$$\alpha \quad 3\alpha - 5 \quad 9\alpha + b - 15 \quad (3)$$

$$\downarrow \quad 3\alpha \quad 18\alpha - 15$$

$$\alpha \quad 6\alpha - 5$$

$$27\alpha + b - 30$$

αναντω 0

$$\underline{\underline{b = 30 - 27\alpha}}$$

$$\Rightarrow 12 - 9\alpha = 30 - 27\alpha$$

$$\Rightarrow 18\alpha = 18$$

$$\alpha = 1$$

$$b = 3$$