23 $f'(3x-1) = 2x+1$ $\qquad f(2)=5$

Ενοτητα 33

(a) $\boxed{3x-1=t}$

$3x = t+1$

$x = \frac{t+1}{3}$

$f'(t) = 2\cdot \frac{t+1}{3} + 1$

$f'(t) = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} + 1$

$f'(t) = \frac{2}{3}t + \frac{5}{3}$ $\quad$ ή $\quad f'(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

$f'(x) = \left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x\right)'$

$\boxed{f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + c}$

$\underline{x=2}$

$f(2) = \frac{4}{3} + \frac{10}{3} + c$

$5 = \frac{14}{3} + c$

$15 = 14 + 3c$

$c = \frac{1}{3}$

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$.

33. (a) $f'(x) = 2x e^{-f(x)}$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = 2x \dfrac{1}{e^{f(x)}}$

$f'(x) e^{f(x)} = 2x$

$\left(e^{f(x)}\right)' = (x^2)'$

$e^{f(x)} = x^2 + c$

$\underline{x=0}$

$e^{f(0)} = 0 + c \Rightarrow e^0 = c \Rightarrow c = 1$

$e^{f(x)} = x^2+1 \qquad f(x) = \ln(x^2+1)$

(γ) $f'(x) = 2x f(x)$ $\qquad f(0) = 1 \qquad f(x) \neq 0$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2x \iff (\ln f(x))' = (x^2)'$

$\ln f(x) = x^2 + c$

$\underline{x=0}$

$\ln f(0) = c \Rightarrow \ln 1 = c \Rightarrow c = 0$

$\ln f(x) = x^2$

$f(x) = e^{x^2}$

39. $f'(x)\,\eta\mu x + f(x)\,\sigma\upsilon\nu x = f(x)\,\eta\mu x$

$x \in (0,\pi)$

$\left(f(x)\,\eta\mu x\right)' = f(x)\,\eta\mu x$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$

$f(x)\,\eta\mu x = ce^{x}$

$\underline{x = \frac{\pi}{2}}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu\frac{\pi}{2} = ce^{\pi/2}$

$\cancel{e^{\pi/2}} = c\cancel{e^{\pi/2}}$ $\quad c = 1$

$f(x) = \dfrac{e^{x}}{\eta\mu x}$

Απαιτείται απόδειξη $\quad f'(x) = f(x) \iff f(x) = ce^{x}$

35. (a) $x f'(x) = e^x - f(x) \quad , x \in \mathbb{R}$

$x f'(x) + f(x) = e^x$

$(x f(x))' = (e^x)'$

$x f(x) = e^x + c$

$\underline{x=0}$

$0 = 1 + c$

$\underline{\underline{c = -1}}$

$\underline{x=0}$

$0 = 1 - f(0)$

$\underline{\underline{f(0) = 1}}$

$x f(x) = e^x - 1$

$$\boxed{f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad , \quad x \neq 0}$$

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} e^x = 1$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} \, , & x \neq 0 \\ 1 \, , & x = 0 \end{cases}}$$

36. (α) $f'(x)f(x)=x$ $\qquad f(0)=1$

$$2f'(x)f(x)=2x$$

$$\left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)'$$

$$f^2(x)=x^2+c$$

$\underline{x=0}$

$$f^2(0)=0+c$$

$$1=c$$

$$f^2(x)=x^2+1$$

$$f^2(x)=\sqrt{x^2+1}^{\,2}$$

$$|f(x)|=\left|\overset{+}{\sqrt{x^2+1}}\right|$$

$$\overset{+}{|f(x)|}=\sqrt{x^2+1}$$

$$\boxed{f(x)=\sqrt{x^2+1}}$$

<u>Ρ,Τμ $f(x)$</u>

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=0\\ &|f(x)|=0\\ &\sqrt{x^2+1}=0\\ &\text{Άτοπο}\end{aligned}\right\}$$

$f(x)\neq 0$ και συνεχής

$f(x)>0$ ή $f(x)<0$

$f(0)=1$

$f(x)>0$

2024

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό ζ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \zeta$.

Μονάδες 6

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό,*** *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος,*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g, δηλαδή η συνάρτηση $g \circ f$, ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g:[1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και $h:[1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Β1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1},\ x > 1 \quad \text{και} \quad r(x) = x - \frac{1}{x},\ x \geq 1.$$

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1} = f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r.

Μονάδες 6

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^{\lambda}, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda, & x \geq 2, \end{cases}$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Μονάδες 6

Γ3. i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0,3]$.

(μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Κινητό σημείο Μ ξεκινά από το σημείο $A(2,0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $\upsilon=0,5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega}=A\hat{O}M$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο Μ θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\ln x+\alpha x}{x},$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0,+\infty))=\left(-\infty, 1+\frac{1}{e}\right]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Μονάδες 6

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

(μονάδες 3)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x \leq x^2$ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}\,.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x=-\ln 2$ και $x=0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

8

Πανελληνιες 2024

A1: 3.4.

A2: 1.43.

A3: Ολοκληρωματα.

A4: α Σ β Σ γ Λ δ Λ ε Σ.

B1: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{\sqrt{x}^2+1}{\sqrt{x}^2-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$

$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0$

$D_f = D_g \cap D_h = [1,+\infty)$. και $h(x) \neq 0$ $\quad x-1 \neq 0$

$x \neq 1$

Αρα $D_f = (1,+\infty)$.

$r(x) = g(x)\cdot h(x) = \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

$r(x) = x - \dfrac{1}{x}$

$D_r = D_g \cap D_h = [1,+\infty)$

B2 : $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \ x>1.$

Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1}$

$(x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1)$

$\cancel{x_1x_2} - x_1 + x_2 - \cancel{1} = \cancel{x_2x_1} - x_2 + x_1 - \cancel{1}$

$2x_2 = 2x_1$) f 1-1 άρα

$x_1 = x_2$ αντιστρέψιμη.

Θέτω $f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = x+1$

$yx - y = x+1 \Rightarrow yx - x = y+1$

$x(y-1) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$ $\underline{\underline{y \neq 1}}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Όμως $x>1 \Rightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1 \Rightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0$

$\frac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Rightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Rightarrow y > 1$

$D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$ $f = f^{-1}$

Β3: $f(x) = x - \frac{1}{x}, \ x > 1.$

κατακόρυφη δεν έχει.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0.$$

$\varepsilon \equiv y = x$ $\quad +\infty$

Β4: $\left[f^{-1}(f(x))\right]^2 = 1 + 4f(x)$

$$x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x}$$

$$x^3 = x + 4x^2 - 4 \Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

$$x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0$$

$x = 4$ ✓ $\quad \cancel{x=1} \quad \cancel{x=-1}$,

Γ1: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-2x+4+e^{\lambda}) = e^{\lambda}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2+4x-3+\lambda) = 1+\lambda$

$e^{\lambda} = \lambda + 1$

• $e^x \geq x+1$ Το "=" για $x=0$

άρα $\underline{\underline{\lambda = 0}}$

Γ2: $f(x) = \begin{cases} -2x+5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2+4x-3, & x \geq 2 \end{cases}$

$\underline{0 \leq x < 2}$

$f_1(x) = -2x+5$

$f_1'(x) = -2 < 0$

$\underline{x > 2}$

$f_2(x) = -x^2+4x-3$

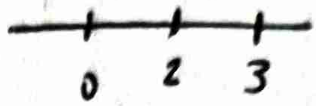
$f_2'(x) = -2x+4 = -2(x-2)$

$+$

x	0	2
f_1'	$-$	////
f_2'	////	$-$
f'	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\searrow$

$A(0,5)$ O.M.

Γ3 i) Η f συνεχής στο $[0,3]$ ως π.ο.σ.



$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2x+5-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2x+4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-2}{1} = -2$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2+4x-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{-2x+4}{1} = 0$$

Δεν είναι παρ/μη στο 2 άρα

δεν ικανοποιεί το ΘΜΤ.

ii). $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ // $\varepsilon_{\Delta E}$

$$f'(\xi) = \lambda_{\Delta E} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0}$$

$$f'(\xi) = \frac{0-5}{3} \Leftrightarrow f'(\xi) = -\frac{5}{3}.$$

$$f'(x) = -\frac{5}{3}.$$

$0 \le x < 2$

$f'(x) = -\frac{5}{3}$

$-2 = -\frac{5}{3}$

Αδύνατη

$x > 2$

$f'(x) = -\frac{5}{3}$

$-2x+4 = -\frac{5}{3}$

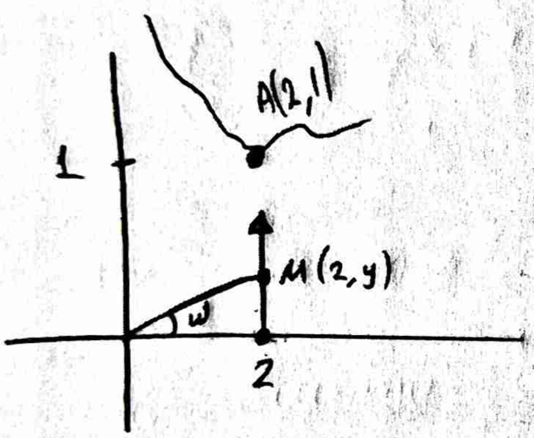
$-2x = -\frac{5}{3} - 4$

$-6x = -5-12$

$-6x = -17$

$x = \frac{17}{6}$ ✓

Γ4:



$εφω = \frac{y}{2}$

$εφω(t) = \frac{1}{2} y(t)$

$\frac{1}{συν^2 ω(t)} ω'(t) = \frac{1}{2} y'(t)$

$συν^2 x = \frac{1}{1+εφ^2 x}$

$\frac{1}{\frac{1}{1+εφ^2(ω(t))}} ω'(t) = \frac{1}{2} y'(t)$

$\left[1+εφ^2 ω(t)\right] \cdot ω'(t) = \frac{1}{2} y'(t)$

$\left[1+\frac{1}{4} y^2(t)\right] ω'(t) = \frac{1}{2} y'(t)$

Για $t = t_1$

$$\left[1 + \frac{1}{4} y^2(t_1)\right] \omega'(t_1) = \frac{1}{2} y'(t_1)$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το Μ τέμνει τη Cf.

$x(t_1) = 2$ Η ταχύτητα είναι ο ρυθμός

$y(t_1) = 1$ μεταβολής της θέσης.

$$\boxed{v = 0{,}5 \Rightarrow y'(t) = 0{,}5}$$

$$\left(1 + \frac{1}{4} 1^2\right) \omega'(t_1) = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4} \omega'(t_1) = \frac{1}{4}$$

$$\omega'(t_1) = \frac{1}{5}.$$

Δ1: $f(x) = \dfrac{\ln x + ax}{x}$ $\qquad \Sigma T_f = \left(-\infty, 1+\frac{1}{e}\right]$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} + a\right)x - (\ln x + ax)}{x^2} = \frac{1 + \cancel{ax} - \ln x - \cancel{ax}}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}}$$

$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$

$x = e$

x	0	e	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

$f(x) \leq f(e)$

$f(x) \leq \dfrac{1 + ae}{e}$

Πρέπει $\dfrac{1+ae}{e} = 1 + \dfrac{1}{e} \Rightarrow \cancel{1} + ae = e + \cancel{1}$

$ae = e$

$a = 1$

Δ2: $\boxed{f(x) = \dfrac{\ln x + x}{x}}$

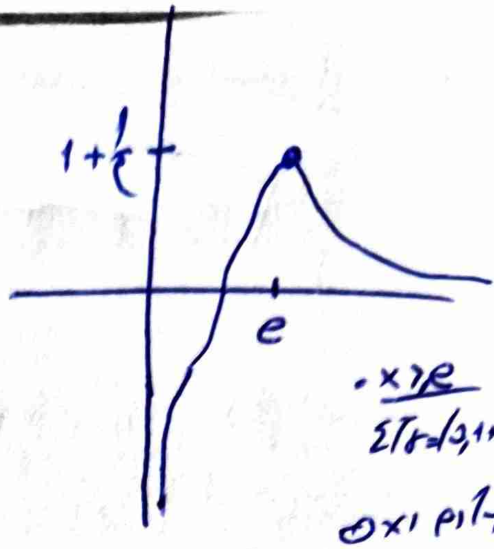
$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 1 - \ln 2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-2\ln 2 + 1}{1} = 1 - 2\ln 2$$

$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - \ln 4 = \ln e - \ln 4 = \ln\frac{e}{4} < 0$

$f(1) = 1 \qquad \Rightarrow f\left(\tfrac{1}{2}\right) f(1) < 0$ Bolzano $\exists x_0$ τ.ω $f(x_0)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln x + x)\frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x + x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



• $x > e$
$\Sigma T_f = (0, 1+\frac{1}{e}$
όχι ρίζα.

• $x < e$
• γνησίως
• $f\uparrow$
• $\Sigma T_f = (-\infty, 1+\frac{1}{e})$
Το $0 \in \Sigma T_f$ άρα $\exists!\, x_0$ τ.ω $f(x_0)=0$

Δ3: i) $f(x) = f(4)$

Το $x=4$ προφανής λύση.

$$f(2) = \frac{\ln 2 + 2}{2}$$

$$f(4) = \frac{\ln 4 + 4}{4} = \frac{\ln 2^2 + 4}{4} = \frac{2\ln 2 + 4}{4} = \frac{\ln 2 + 2}{2}$$

Άρα $f(2) = f(4)$ $\quad x=2$ ρίζα επίσης.

Έχω δύο διαστήματα μονοτονίας συνεπώς η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει το πολύ 2 λύσεις. και αφού έχει βρει ήδη δύο είναι και μοναδικές.

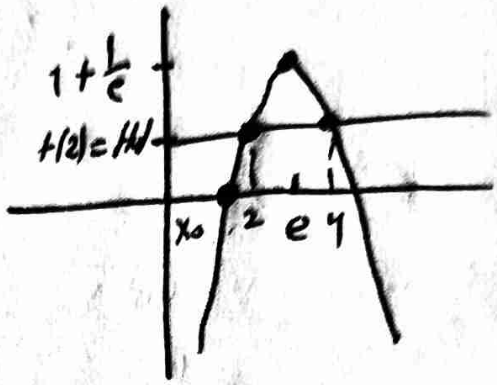
11). $2^x \le x^2$ σε $(0,+\infty)$.

$\ln 2^x \le \ln x^2$

$x \ln 2 \le 2 \ln x$

$\frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{\ln 2}{2}+1 \le \frac{\ln x}{x}+1$

$\frac{\ln 2+2}{2} \le \frac{\ln x + x}{x}$

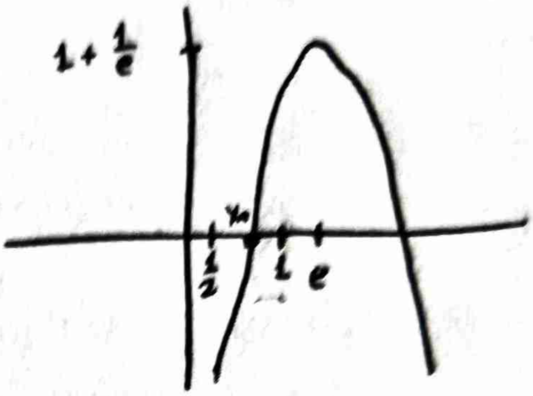


$f(2) \le f(x)$

$x \in [2,4]$.

Δ4: $g(x) = f(e^x) \cdot \dfrac{1-x}{e^x}$

$$E = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|\,dx = \int_{-\ln 2}^{0} |f(e^x)| \frac{1-x}{e^x}\,dx \overset{(*)}{=}$$



Θέτω $e^x = t$

$x = \ln t$

$dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$\overset{(*)}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(t)| \frac{1-\ln t}{t^2}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(x)| \frac{1-\ln x}{x^2}\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(x)|\, f'(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(x)f'(x)\,dx + \int_{x_0}^{1} f(x)f'(x)\,dx$$

2024

Ε

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.

β) Κάθε συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει ότι $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)\,dx+\int_{\gamma}^{\beta}f(x)\,dx$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2\ln x-1$
και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=x-2$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Μονάδες 6

Αν $h(x)=2\ln(x-2)-1$, $x>2$, τότε:

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 6

Β3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφή της h^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 7

Β4. Αν $h^{-1}(x)=2+e^{\frac{x+1}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$, να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=(h^{-1}(x)-3)\cdot(x^3-8)$$

στο $[-1, 2]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} e^{x+1}+\lambda x, & x<-1 \\ \dfrac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha}, & x\geq -1 \end{cases}, \text{ όπου } \alpha>1 \text{ και } \lambda\in\mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ (μονάδες 5) και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1, 0)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f(\eta\mu x-2) \geq 2\eta\mu x-2 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ .}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:(0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- $|g(x)-g(y)| \leq (x-y)^2$, για κάθε $x, y \in (0, \frac{\pi}{2}]$
- $g(x)=f(x)\,\eta\mu x$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$
- $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g είναι σταθερή για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

(Μονάδες 4)

ii) ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=\frac{1}{\eta\mu x}$.

(Μονάδες 1)
Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 3) και να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)-2}{x-\frac{\pi}{4}}+\frac{f^{-1}(\sqrt{2})-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{2}}=0 \text{ , με } \alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$.

Μονάδες 6

Δ4. i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$H(x)=\frac{1}{2}\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)-\frac{1}{2}\ln(1+\sigma\upsilon\nu x),\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$

είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$ **στο** $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 2)

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y=2$ **και** $x=\dfrac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 6)
Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επαναληπτικές Πανελλήνιες 2024

A1: 3.7.

A2: 1.6

A3: 1.26

A4: ⓐ Σ ⓑ Λ ⓒ Σ ⓓ Σ ⓔ Σ

B1: $f:(0,+\infty) \longrightarrow R$ $\quad f(x) = 2\ln x - 1$

$g: R \rightarrow R$ $\quad g(x) = x-2$

$h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln(x-2) - 1$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$ $\quad D_h = (2,+\infty)$.

$x \in R$ $\quad x-2>0$

$x>2$

B2: $h'(x) = \dfrac{2}{x-2} > 0 \quad \forall x>2 \quad h \nearrow$

$h''(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0 \quad h$ κοίλη

B3: Αφού η f κ h 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$h(x)=y \Leftrightarrow y = 2\ln(x-2) - 1 \Rightarrow y+1 = 2\ln(x-2)$

$\frac{y+1}{2} = \ln(x-2) \Leftrightarrow x-2 = e^{\frac{y+1}{2}} \Rightarrow x = e^{\frac{y+1}{2}}+2$

$$\boxed{h^{-1}(x) = e^{\frac{x+1}{2}}+2 \qquad D_{h^{-1}} = \mathbb{R}.}$$

- $x>2 \Rightarrow e^{\frac{y+1}{2}}+2>2$ που ισχύει!.

B4: $\varphi(x) = (h^{-1}(x)-3)(x^3-8)$

$\varphi(-1) = (h^{-1}(-1)-3)(-9) = 0$

$\boxed{h^{-1}(-1)=3}$

$\varphi(2) = (h^{-1}(2)-3)\cdot(8-8) = 0$

Άρα $\varphi(-1)=\varphi(2)$ και φ συνεχής στο $[-1,2]$ ως π.σ.σ και φ παραγ/μη $(-1,2)$ ως π.π.σ άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Rolle.

Γ1: Αφού f παρ/μη είναι και συνεχής,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (e^{x+1} + \lambda x) = 1-\lambda$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{ax+a}{x+a} = \frac{-a+a}{a-1} = 0$$

Άρα $1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

Γ2: $$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{e^{x+1}+x-0}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{e^{x+1}+1}{1} = 2.$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\frac{ax+a}{x+a}-0}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{ax+a}{(x+a)(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{a}{x+1+x+a} = \frac{a}{a-1}$$

Άρα $2 = \frac{a}{a-1} \Rightarrow 2a-2 = a \Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$

$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y - 0 = 2(x+1)$

$y = 2x+2.$

Γ3: Αφού $D_f = \mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x+1} + x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{x+2} = 2$$

$\varepsilon_1 : y = 2$ $\;+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}+x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}+1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} e^{x+1} + x - x =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{x+1} = 0$$

$\varepsilon_2 : y = x$ $\;-\infty$

Γ4: $f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2$

Έστω $\eta\mu x = t$

$f(t-2) \geq 2t - 2$

Έστω $t - 2 = u \Rightarrow t = u + 2$

$f(u) \geq 2(u+2) - 2$

$f(u) \geq 2u + 2$. ή

Αρκεί ν.δ.ο $f(x) \geq 2x + 2$.

Επειδη το ημx−2 <0 και ανδιστοιχει ο

τυπος $f(x)=e^{x+1}+x$

$$f'(x)=e^{x+1}+1$$

$$f''(x)=e^{x+1}>0 \text{ κυρτη } f.$$

$\forall x<0$ η f κυρτη $\Rightarrow f(x)\geq 2x+2$

και αρα ημx−2<0. αποδειχθηκε.

Δ1: i) $g(x) = f(x)\,\eta\mu x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

$$|g(x) - g(y)| \leq (x-y)^2 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

Έστω $y = x_0$

$$|g(x) - g(x_0)| \leq |x - x_0|^2$$

$$\frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|} \leq |x - x_0|$$

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0|$$

$$\boxed{-|x - x_0| \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_2} \leq |x - x_0|}$$

$\lim_{x \to x_0} -|x - x_0| = 0$

$\lim_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$

Από Κ.Π $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0$

$\Rightarrow g'(x_0) = 0$

Άρα $g'(x) = 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ άρα

$g(x)$ σταθερή.

11). $g(x) = c \iff f(x)\,\eta\mu x = c$

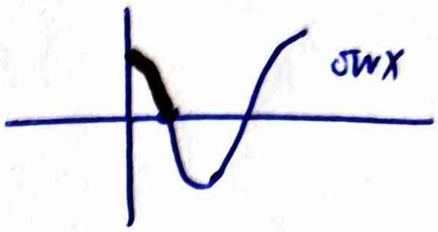
$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu\frac{\pi}{4} = c$$

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = c \iff c = 1.$$

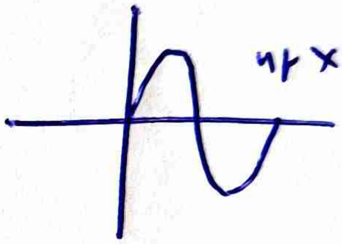
$$f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$$

Δ2: $f'(x) = \dfrac{-\overset{(+)}{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu^2 x} \leq 0$

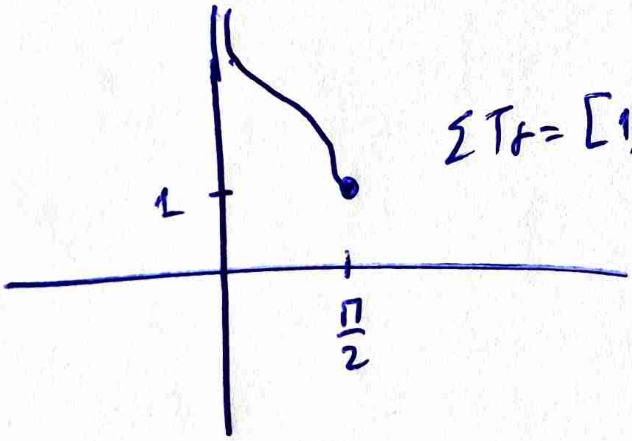


$f \downarrow$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\eta\mu x} = +\infty$$



$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$$



$\Sigma T_f = [1, +\infty)$

Δ3: $\dfrac{f(a)-2}{x-\frac{\pi}{4}} + \dfrac{f^{-1}(\sqrt{2})-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{2}} = 0 \quad a \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$h(x) = [f(a)-2][x-\sqrt{2}] + \left[x-\frac{\pi}{4}\right]\left[f^{-1}(\sqrt{2})-\frac{\pi}{3}\right]$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = (f(a)-2)\left(\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\right)$$

$$h(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(f^{-1}\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right)h(\sqrt{2}) = -\overset{+}{\left(\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\right)^2}\;\overset{-}{(f(a)-2)}\;\overset{-}{\left(f^{-1}(\sqrt{2})-\frac{\pi}{3}\right)} < 0$$

Το $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) > f(a) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} > f(a) > 1$

$\underline{\underline{2 > f(a) > 1}}$

$D_f = \Sigma T_{f^{-1}}$

Είναι $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3}$.

Bolzano $\exists\, \xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ τ.ω $h(\xi) = 0$.

και επειδή η $h(x)$ είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού

είναι μοναδική ρίζα.

Δ4: i) $H(x)=\frac{1}{2}\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)-\frac{1}{2}\ln(1+\sigma\upsilon\nu x)$

$$H'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{2}\,\frac{-\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow$$

$$H'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{2}\,\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$$

$$H'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}+\frac{\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}\right]$$

$$H'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{\eta\mu x+\eta\mu x\cancel{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x-\eta\mu x\cancel{\sigma\upsilon\nu x}}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$H'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}=\frac{1}{\eta\mu x}=f(x)$$

$$H'(x)=\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}=h(x).$$

ii) $$E=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-2|\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2-f(x)\,dx\overset{(*)}{=\!=}$$

• $f(x)=2\Leftrightarrow\frac{1}{\eta\mu x}=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\eta\mu x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$

Όταν $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ το $f(x)\in(1,2)$

$$\overset{(*)}{=\!=}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\,dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/2}f(x)\,dx=2(x)_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/2}-(H(x))_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/2}=\frac{2\pi}{3}-H\left(\frac{\pi}{2}\right)+H\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

5. $f(x)>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{g(2)}^{g(3)} f(x)\,dx = 0$$

Ενοτητα 38

ⓐ Ν.δ.ο. $g(2)=g(3)$

$$\int_{g(2)}^{g(3)} f(x)\,dx = 0$$

Αφου η $f(x)$ ειναι συνεχης εχει παραγουσα $F(x)$.

$$\left[F(x)\right]_{g(2)}^{g(3)} = 0$$

$$F(g(3)) - F(g(2)) = 0$$

$$F(g(3)) = F(g(2))$$

F: 1-1

$$\boxed{g(3)=g(2)}$$

$F'(x)=f(x)>0$

$F \nearrow$

F: 1-1

ⓑ

Αφου $g(2)=g(3)$ Rolle $\exists\, \xi \in (2,3)$

τ.ω. $g'(\xi)=0$

9. $f \downarrow$

ΝΔΟ $\quad \int_0^1 f(x)\,dx > 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x)\,dx$

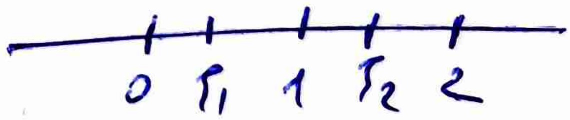
$\rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x)\,dx \;\underset{\substack{x=\frac{t}{2} \\ dx=\frac{1}{2}dt}}{\overset{2x=t}{=\!=}}\; \int_1^2 \frac{1}{2} f(t)\,dt$

Άρα $\quad \int_0^1 f(x)\,dx > \cancel{2}\int_1^2 \frac{1}{\cancel{2}} f(t)\,dt$

$\int_0^1 f(x)\,dx > \int_1^2 f(x)\,dx$

$\left(F(x)\right)_0^1 > \left(F(x)\right)_1^2$

$F(1)-F(0) > F(2)-F(1)$



$F'(\xi_1) = \dfrac{F(1)-F(0)}{1-0}$

$F'(x) = f(x) \downarrow$

$F'(\xi_2) = \dfrac{F(2)-F(1)}{2-1}$

$\xi_1 < \xi_2 \implies F'(\xi_1) > F'(\xi_2) \implies \underline{\underline{F(1)-F(0) > F(2)-F(1)}}$

8. $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) > 0 \quad$ συνεχή

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 6$$

$$\Big[F(x)\Big]_0^2 = 6$$

$$F(2) - F(0) = 6$$

$$F'(\xi) = \frac{F(2) - F(0)}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

$$f(\xi) = 3 .$$

6. $$\int_{f(0)}^{f(1)-2} \underbrace{\ln(1+e^x)}_{h(x)}\, dx = 0$$

(α)

Η $f(x)$ συνεχής άρα έχει παράγουσα $F(x)$

$$\left[F(x) \right]_{f(0)}^{f(1)-2} = 0$$

$$F(f(1)-2) - F(f(0)) = 0$$

$$F(f(1)-2) = F(f(0))$$

$$F \; 1-1$$

$$f(1)-2 = f(0)$$

$$\boxed{f(1)-f(0)=2}$$

$F'(x)=h(x)$

$F'(x)=\ln(e^x+1) > 0$

• $e^x>0$

$e^x+1>1$

$\ln(e^x+1)>\ln 1$

$F'(x)>0$

$F \nearrow$

(β) $$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

19. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f \uparrow$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(F(x+1) - F(x)\right) = 0$

$$F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1-x} = F(x+1) - F(x)$$

$$x < \xi < x+1$$

$$F' = f \uparrow$$

$$F'(x) < F'(\xi) < F'(x+1)$$

$$\boxed{f(x) < F(x+1) - F(x) < f(x+1)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x+1) \xrightarrow[\substack{x \to +\infty \\ t \to +\infty}]{x+1=t} \lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$$

Απο κ.π $\lim\limits_{t \to +\infty} F(x+1) - F(x) = 0.$

Επομενο Μαθημα

Τεταρτη πρωι.

Θεματα Μπαρλα

11 12 13 14 15 16 17 18

19 20 21 22 23 24 25 26

27 28 29 30

Ολα αυτα θα λυθουν στο μαθημα