13. $f(x) = \begin{cases} x\ln x + \alpha, & x > 0 \\ \eta\mu x + \ln(1+\alpha^2), & x \leq 0 \end{cases}$

Αφού είναι συνεχής στο 0.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \eta\mu x + \ln(1+\alpha^2) = \ln(1+\alpha^2)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cancel{x\ln x} + \alpha = \alpha$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Πρέπει $\alpha = \ln(1+\alpha^2)$.

$\alpha - \ln(1+\alpha^2) = 0 \longrightarrow g(\alpha) = 0$

$g(\alpha) = g(0)$

g 1-1

$\alpha = 0$.

$$\boxed{g(x) = x - \ln(1+x^2)}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$g(x) \nearrow$ άρα 1-1.

14. (B) $f(x) = x^2 + 7 + \ln x$

$g(x) = 8x - 7\ln x$

Έστω $f(x) > g(x) \Rightarrow x^2 + 7 + \ln x > 8x - 7\ln x$

$$\underbrace{x^2 + 7 + 8\ln x - 8x}_{h(x)} > 0 \Rightarrow h(x) > 0$$

$h(x) > h(1)$

$h \nearrow$

$x > 1$

$$h'(x) = 2x + \frac{8}{x} - 8 = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x}$$

$$h'(x) = 2\,\frac{x^2 - 4x + 4}{x} = 2\,\frac{(x-2)^2}{x} \geq 0$$

$h \nearrow$

Συμπέρασμα

Αν $x > 1$ η $f(x) > g(x)$

Αν $x < 1$ η $f(x) < g(x)$

Αν $x = 1$ $f(x) = g(x)$.

19. ⓐ $f(\pi) < e + \text{συν}\,e + 1$ $\qquad f(e) = e$.

$f'(x) < 0$

$f(\pi) < f(e) + \text{συν}\,e + 1$

$f(\pi) - 1 < f(e) + \text{συν}\,e$

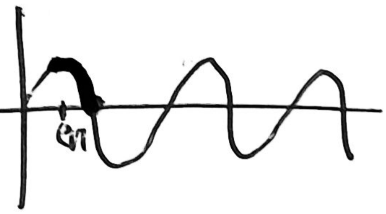
$f(\pi) + \text{συν}\,\pi < f(e) + \text{συν}\,e$

$\boxed{g(x) = f(x) + \text{συν}\,x}$

$g(\pi) < g(e)$

$g \downarrow$

$\pi > e$

$g'(x) = f'(x) - \text{ημ}\,x$ $\quad$ συν $[e,\pi]$ 

$\ominus \qquad \oplus$

Στο $[e,\pi]$ η $g'(x) < 0$

$g \downarrow$.

(B) $f(1) > \ln \frac{3^{e+1}}{e+2}$ $\quad f(e) = e\ln 3$

$f'(x) < 0$

$f(1) > \ln 3^{e+1} - \ln(e+2)$

$f(1) > (e+1)\ln 3 - \ln(e+2)$

$f(1) > e\ln 3 + \ln 3 - \ln(e+2)$

$f(1) > f(e) + \ln 3 - \ln(e+2)$.

$f(1) - \ln 3 > f(e) - \ln(e+2)$

$\boxed{g(x) = f(x) - \ln(x+2)}$

$g(1) > g(e)$

$g \downarrow$

$1 < e$ ✓

$g'(x) = \underset{\ominus}{f'(x)} - \underset{\oplus}{\frac{1}{x+2}} < 0$

$g \downarrow$.

18. γ $f(2)+e^2 < f(1)+e^3$ $\qquad$ $\underline{\underline{f'(x)<0}}$

$$e^2 - f(1) < e^3 - f(2)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$g(1) < g(2)$$

$$\boxed{g(x) = e^{x+1} - f(x)}$$

$g \nearrow$

$1<2$ που ισχύει! ✓

$$g'(x) = e^{x+1} - \underset{\ominus}{f'(x)} > 0$$

$g \nearrow$

ⓐ $f(2)-f(1)<e^2-e$

$f'(x)<0$

$f(2)-e^2 < f(1)-e$

$\boxed{g(x)=f(x)-e^x}$

$g(2) < g(1)$

$g \downarrow$

$2>1$ ✓

$g'(x)=\underset{\ominus}{f'(x)}-e^x < 0$

$g \downarrow$

17. $f: (2, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f(3) = 0$

$f'(x) < 0 \quad \forall x > 2$.

$(x-2) f(x) + 3 = x$,

$$f(x) = \frac{x-3}{x-2}$$

$$\underbrace{f(x) - \frac{x-3}{x-2}}_{g(x)} = 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

$g(x) = g(3)$

g 1-1

$x = 3$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{x-2-(x-3)}{(x-2)^2}$$

$$g'(x) = \underset{\ominus}{f'(x)} - \frac{1}{(x-2)^2} < 0$$

$g \searrow$

g 1-1 ✓

15. (α) $x^3+x=\sigma\upsilon\nu x$ $\quad \Delta=(0,\frac{\pi}{2})$.

$x^3+x-\sigma\upsilon\nu x=0$

$\boxed{f(x)=x^3+x-\sigma\upsilon\nu x}$

Η $f(x)$ συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ ως π.σ.σ

$f(0)=-1$

$f(\frac{\pi}{2})=(\frac{\pi}{2})^3+\frac{\pi}{2}>0$

$f(0)f(\frac{\pi}{2})<0$ $\quad$ Bolzano $\exists\,\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$

τω $f(\xi)=0$

$f'(x)=\underset{\oplus}{3x^2}+\underbrace{1+\eta\mu x}_{\oplus}\geq 0$

$f\nearrow$ Συνεπώς το

ξ μοναδικό.

$\eta\mu x\geq -1$

$\underline{\eta\mu x+1\geq 0}$

17. $f : (2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $f(3) = 0$.

$f'(x) < 0 \quad \forall x > 2$.

$(x-2)\, f(x) + 3 = x$,

$$f(x) = \frac{x-3}{x-2}$$

$$\underbrace{f(x) - \frac{x-3}{x-2}}_{g(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0$$

$g(x) = g(3)$

g 1-1

$x = 3$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{x-2-(x-3)}{(x-2)^2}$$

$$g'(x) = \underset{\ominus}{f'(x)} - \frac{1}{(x-2)^2} < 0$$

$g \searrow$

g 1-1 ✓

20. a) $5^x + 12^x = 13^x$

$$\frac{5^x}{13^x} + \frac{12^x}{13^x} = \frac{13^x}{13^x}$$

$$\underbrace{\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1}_{f(x)} = 0$$

$\Rightarrow f(x) = 0$

$f(x) = f(2)$

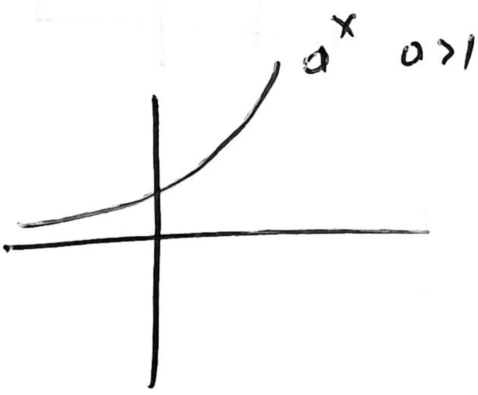
$f(2) - 1$

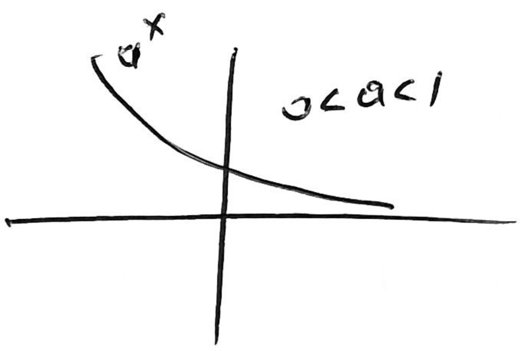
$x = 2$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^{x_1} > \left(\frac{5}{13}\right)^{x_2}$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^{x_1} > \left(\frac{12}{13}\right)^{x_2}$

$\Big\}$ (+)

$f \downarrow$ $\Rightarrow f(2) - 1$





23. (B). $3^x = 2x+1$

$$1 = \frac{2x+1}{3^x}$$

$$0 = \frac{2x+1}{3^x} - 1$$

$f(x) = 0$

$f(x) = f(0)$

$$\boxed{f(x) = \frac{2x+1}{3^x} - 1.}$$

$x = 0$ $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 3^x - (2x+1)\, 3^x \ln 3}{(3^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln 3(2x+1)}{3^x} = \frac{-2\ln 3\, x - \ln 3 + 2}{3^x}$$

x		$\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{2}$	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \ln 3(2x+1) = 0$

$$2 = \ln 3(2x+1)$$

$$\frac{2}{\ln 3} = 2x+1$$

$$2x = \frac{2}{\ln 3} - 1 \quad (\Rightarrow) \quad x = \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{2}.$$

Η $f(x)$ είναι γν. αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{\ln 3}-\frac{1}{2}\right)$

άρα το 0 μοναδική ρίζα εκεί.

Η $f(x)$ γν. φθίνουσα στο $\left(\frac{1}{\ln 3}-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

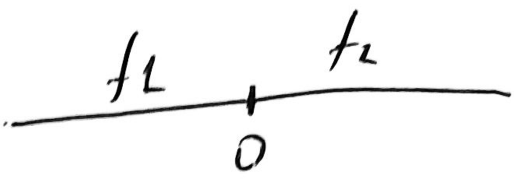
άρα το 1 μοναδική ρίζα εκεί.

Άρα τα 0 και 1

μοναδικές ρίζες.

28.

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & x<0 \\ 2x-x^2, & x\geq 0 \end{cases}$$



ⓐ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -x^3 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x-x^2 = 0$

$\Big\}\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$f(0)=0$

Συνεχής στο 0!

$x<0$

$f_1(x) = -x^3$

$f_1'(x) = -3x^2 < 0$

$x>0$

$f_2(x) = 2x-x^2$

$f_2'(x) = 2-2x$

$x=1$

x		0		1	
f_1'	—				
f_2'			+	0	—
f'	—		+		—
f	↘		↗		↘

(B) · $f(-2x) > f(-x^2)$ στο $(0,+\infty)$.

- $x>0 \Rightarrow -2x<0$
- $x>0 \Rightarrow x^2>0 \Rightarrow -x^2<0$

Στα αρνητικά είναι φθίνουσα η f.

$f\downarrow$

$-2x < -x^2 \Rightarrow 2x > x^2 \Rightarrow 2x-x^2>0$

x	0		2	
$2x-x^2$	$-\ 0$	$+$	0	$-$

$x\in(0,2)$.

(γ) $f(e^x)=f(\frac{1}{2})$ στο $(-1,0)$.

- $x<0 \Rightarrow e^x<e^0 \Rightarrow e^x<1 \Rightarrow 0<e^x<1$
- $0<\frac{1}{2}<1$.

$f(e^x)=f(\frac{1}{2})$

f 1-1 στο $(0,1)$

$e^x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$.

(δ) Νδο $f(x+1)>f(e^x)$ $\forall x>0$.

- $x>0 \Rightarrow x+1>1$
- $x>0 \Rightarrow e^x>e^0 \Rightarrow e^x>1$

η $f\downarrow$ μετά το 1

$x+1<e^x$

ισχύει

24. $f(1)=f(2)=0$

$f''(x)<0$

α) Νδο $\exists\ \xi\in(1,2)$ τ.ω $f'(\xi)=0$.

Αφου $f(1)=f(2)$ Απο Rolle $\exists \xi \in (1,2)$ τ.ω $f'(\xi)=0$.

Αφου $f''(x)<0$

$f'\ \searrow$ αρα f' 1-1

αρα το ξ μοναδικο.

β) $f(x)=0$.

$x=1$ $x=2$.

x		ξ	
f''	$-$		$-$
f'	$\searrow$ $+$	0	$-$ $\searrow$
f	$\nearrow$		$\searrow$

Στο $(-\infty,\xi)$ το $x=1$ ειναι μοναδικη ριζα

Στο $(\xi,+\infty)$ το $x=2$ ειναι μοναδικη ριζα

Επόμενο Μάθημα

Παρασκευή 27/12 10 - 12:30.

Διαβάσματα Θεωρία

ΘΕΩΡΙΑ.pdf.

1.1
1.3
1.5
1.6
1.7
1.10
1.11
1.12
1.13
1.14
1.15

1.18
1.21
1.22
1.23
1.24
1.25
1.26
1.28
1.31

1.34
1.35
1.36
1.37

Ορισμοί.

2.3
2.5
2.6
2.7
2.8

Αντιπαραδείγματα.

Ασκήσεις

Είναι για Δευτέρα
30/12

Σελ 98

25
26
27
38
39
29

41
42
43
44

46
47
56
57
59
60