Προετοιμασία

για το

διαγωνισμό

5/1/25

# 1. Θεωρία

(α) Νδο $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$

Απόδειξη

$|a\beta| = |a||\beta|$

$|a\beta|^2 = [|a||\beta|]^2$

$(a\beta)^2 = |a|^2 |\beta|^2$

$a^2\beta^2 = a^2\beta^2$

(β) Νδο $|a+\beta| \leq |a| + |\beta|$

Απόδειξη

$|a+\beta| \leq |a| + |\beta|$

$|a+\beta|^2 \leq (|a| + |\beta|)^2$

$(a+\beta)^2 \leq |a|^2 + 2|a||\beta| + |\beta|^2$

$a^2 + 2a\beta + \beta^2 \leq a^2 + 2|a\beta| + \beta^2$

$2a\beta \leq 2|a\beta|$

$a\beta \leq |a\beta|$

Ναι ισχύει

⑧. Nδo $\sqrt[v]{a} \cdot \sqrt[v]{B} = \sqrt[v]{aB}$

Αποδειξη

$\sqrt[v]{a}\ \sqrt[v]{B} = \sqrt[v]{aB}$

$\left(\sqrt[v]{a}\ \sqrt[v]{B}\right)^{v} = \sqrt[v]{aB}^{v}$

$\sqrt[v]{a}^{v}\ \sqrt[v]{B}^{v} = aB$

$a \cdot B = aB$.

(8). Ορισμοι

Διαβαζω απο το σχολικο βιβλιο.

στα σχ υπογραμμισω.

SOS

1. Σελ 54 (ορισμοι πανω μερα σελιδαν)
2. Σελ 57.
3. Σελ 62 (ορισμοι απολυτη τιμη εσωτερικο μερος)
4. Σελ 64 (τα χρωματισμενα).
5. Σελ 69 (ορισμοι τετραγωνικη ριζα)
6. Σελ 70 (ορισμοι ν-οστη ριζα).
7. Σελ 70-71-72 (διαβασμα τα ιδιοτητα)

## Άσκηση 1

Έστω $|x-2| \leq 3$ και $|2y-1| \leq 3$

(α) Να δοθεί $x \in [-1, 5]$ και $y \in [-1, 2]$

(β) Να απλοποιηθεί η $A = |6-x| - 2|2y-5|$

(γ) Να δοθεί $-13 \leq A \leq 5$.

### Λύση

(α) $|x-2| \leq 3$

$-3 \leq x-2 \leq 3$

$-1 \leq x \leq 5$

$x \in [-1, 5]$

$|2y-1| \leq 3$

$-3 \leq 2y-1 \leq 3$

$-2 \leq 2y \leq 4$

$-1 \leq y \leq 2$

$y \in [-1, 2]$

(β) $A = |6-x| - 2|2y-5|$ (⊕ ⊖)

- $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \geq -x \geq -5 \Rightarrow 7 \geq 6-x \geq 1$
- $-1 \leq y \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2y \leq 4 \Rightarrow -7 \leq 2y-5 \leq -1$

$A = 6-x-2(-2y+5)$

$A = 6-x+4y-10$

$\boxed{A = -x+4y-4}$

⑧ $A = -x + 4y - 4$

- $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \geq -x \geq -5 \Rightarrow -5 \leq -x \leq 1$ | ⊕
- $-1 \leq y \leq 2 \Rightarrow -4 \leq 4y \leq 8 \Rightarrow -8 \leq 4y - 4 \leq 4$

$$-13 \leq -x + 4y - 4 \leq 5$$

$$\underline{-13 \leq A \leq 5}$$

## Άσκηση 2

(α) Νδο. $2(\alpha^2+\beta^2)-(\beta^2-\alpha^2) \geq 2\beta(3\alpha-\beta)$

Λύση

$2\alpha^2+2\beta^2-\beta^2+\alpha^2 \geq 6\alpha\beta-2\beta^2$

$3\alpha^2+3\beta^2-6\alpha\beta \geq 0$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0$

$(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ που ισχύει.

(β) Αν $\alpha<0$ νδο $\alpha+\frac{1}{\alpha} \leq -2$. Πότε ισχύει το "=";

Λύση

$\alpha+\frac{1}{\alpha} \leq -2$

$\alpha^2+1 \geq -2\alpha$

$\alpha^2+2\alpha+1 \geq 0$

$(\alpha+1)^2 \geq 0$ που ισχύει.

Το "=" ισχύει

$\alpha=-1$

(8) Αν $\alpha, \beta$ θετικοί να δείξετε ότι $(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right) \leq 4$

Λύση Πρέπει να ισχύει το "="

$$(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right) \leq 4$$

$$\alpha\frac{1}{\alpha} - \alpha\frac{1}{\beta} - \beta\frac{1}{\alpha} + \beta\frac{1}{\beta} \leq 4$$

$$1 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + 1 \leq 4$$

$$2 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \leq 4$$

$$0 \leq 4 - 2 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$$

$$0 \leq 2 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$$

$$0 \leq 2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2$$

$$0 \leq (\alpha+\beta)^2$$

Για να ισχύει το "=" πρέπει

$$\alpha + \beta = 0$$

$\alpha, \beta$ αντίθετοι

Άρα δεν γίνεται γιατί $\alpha, \beta$ θετικοί.

(8) Αν $\alpha, \beta$ θετικοί

i) Να δείξετε ότι $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$

ii) Να δείξετε ότι $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

Λύση

i) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \Rightarrow \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0$

$(\alpha - 2)^2 \geq 0$ που ισχύει.

ii). Πριν δείξω ότι $\forall \alpha > 0$ ισχύει το εξής

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \\ \text{Επίσης } \beta > 0 \text{ ισχύει ότι } \beta + \frac{4}{\beta} \geq 4 \end{array}\right\} (*)$$

$$\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16.$$

⑥ Να δ. $|a| + \left|\frac{1}{a}\right| \geq 2$ . Πότε ισχύει το "=" ;

Λύση

$|a| + \frac{|1|}{|a|} \geq 2 \Leftrightarrow |a| + \frac{1}{|a|} \geq 2 \Leftrightarrow |a|^2 + 1 \geq 2|a|$

$|a|^2 - 2|a| + 1 \geq 0$

$(|a| - 1)^2 \geq 0$ που ισχύει,

Το "=" ισχύει όταν $|a| - 1 = 0 \Leftrightarrow |a| = 1$

$a = 1$ ή $a = -1$

⑦ Να δ. $\left|\frac{a}{a^2+9}\right| \leq \frac{1}{6}$

Λύση

$\frac{|a|}{|a^2+9|} \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{|a|}{a^2+9} \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6|a| \leq a^2 + 9$

$0 \leq a^2 + 9 - 6|a|$

$0 \leq |a|^2 - 6|a| + 9$

$0 \leq (|a| - 3)^2$ που ισχύει.

(η). Αν ισχυει οτι $\left|\frac{3a+1}{a+3}\right| < 1$ νδο $|a| < 1$

Λυση

$$\frac{|3a+1|}{|a+3|} < 1 \Leftrightarrow |3a+1| < |a+3|$$

$$|3a+1|^2 < |a+3|^2$$

$$\Leftrightarrow (3a+1)^2 < (a+3)^2 \Leftrightarrow 9a^2+6a+1 < a^2+6a+9$$

$$8a^2 < 8 \Leftrightarrow a^2 < 1 \Leftrightarrow a^2 < 1^2 \Leftrightarrow |a| < |1|$$

$$\Leftrightarrow |a| < 1.$$

(θ) Νδο $x^2+y^2-4x+6y \geq -13$

Λυση

$$x^2-4x+y^2-6y+13 \geq 0$$

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9 \geq 0$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2 \geq 0$$ που ισχυει!

(ι) Νδο $2x^2-2x+1+4xy+4y^2 \geq 0$

Λυση

$$x^2-2x+1+x^2+4xy+4y^2 \geq 0$$

$$(x-1)^2+(x+2y)^2 \geq 0$$ που ισχυει.

(k) Νδο $a^2-aB+B^2 \geq 0$ . Ποτε ισχυει το "=" ;

Λυση

$2a^2-2aB+2B^2 \geq 0$

$a^2+a^2-2aB+B^2+B^2 \geq 0$

$a^2+(a-B)^2+B^2 \geq 0$ που ισχυει !

Το "=" ισχυει μονο αν $\begin{cases} \boxed{a=0} \\ a-B=0 \\ \boxed{B=0} \end{cases} \Rightarrow a=B$

## Άσκηση 3

(α) Αν $a \leq -1$ τότε $a^3+1 \leq a^2+a$

Λύση

$a^3+1-a^2-a \leq 0$

$a^2(a-1)-(a-1) \leq 0$

$(a-1)(a^2-1) \leq 0$

$(a-1)(a-1)(a+1) \leq 0$

$(a-1)^2(a+1) \leq 0$

$\oplus \quad \ominus$ ✓

- $a \leq -1 \Rightarrow a+1 \leq 0$

(β) Αν $a > 1 > \beta$ τότε $a+\beta > 1+a\beta$

Λύση

$a+\beta-1-a\beta > 0$

$a-1+\beta(1-a) > 0$

$a-1-\beta(a-1) > 0$

$(a-1)(1-\beta) > 0$

$\oplus \quad \oplus$ ✓

- $a > 1 \Rightarrow a-1 > 0$
- $1 > \beta \Rightarrow 1-\beta > 0$

## Άσκηση 4

Βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$2x^2 - 2x + 1 + 4xy + 4y^2 = 0$$

**Λύση**

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + (x+2y)^2 = 0$$

$x - 1 = 0$ και $x + 2y = 0$

$\boxed{x = 1}$ → $1 + 2y = 0$

$2y = -1$

$$y = -\frac{1}{2}$$

# Άσκηση 5

Να λυθούν οι κατωθι εξισωσεις - ανισωσεις.

(α) $|2x-3| = 1$

Λυση

$2x-3 = 1$ ή $2x-3 = -1$

$2x = 4$ $2x = 2$

$x = 2$ $x = 1$

(β) $d(3x, 1-x) = d(1, -x-1)$

Λυση

$|3x-(1-x)| = |1-(-x-1)|$

$|3x-1+x| = |1+x+1|$

$|4x-1| = |2+x|$

$4x-1 = 2+x$ ή $4x-1 = -2-x$

$3x = 3$ $4x+x = -2+1$

$x = 1$ $5x = -1$

$x = -\frac{1}{5}$

⑦ $|1-3x| < 2$

Λύση

$-2 \leq 1-3x \leq 2$

$-3 \leq -3x \leq 1$

$\boxed{1 \geq x \geq -\frac{1}{3}}$

⑧ $|2-4x| - |2x-1| > d(7,-2)$

Λύση

$2|1-2x| - |1-2x| > |7-(-2)|$

$|1-2x| > |9|$

$|1-2x| > 9$

$1-2x > 9$ ή $1-2x < -9$

$-2x > 8$ $\quad -2x < -10$

$x < -4$ $\quad x > 5$

$x \in (-\infty, -4) \cup (5, +\infty)$

## Άσκηση 6

Να γραφεί χωρίς απόλυτα η παράσταση

$$A = |x-1| - 2x + 1$$

και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση

$$A = 2$$

## Λύση

Διακρίνω περιπτώσεις.

1. Αν $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ τότε

$$A = |\overset{\oplus}{x-1}| - 2x + 1 = x - 1 - 2x + 1 = -x$$

2. Αν $x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$ τότε

$$A = |\overset{\ominus}{x-1}| - 2x + 1 = 1 - x - 2x + 1 = 2 - 3x$$

$$A = \begin{cases} -x, & x \geq 1 \\ 2-3x, & x < 1 \end{cases}$$

**$x \geq 1$**

$A = 2$

$-x = 2$

$x = -2$ ~~$x = -2$~~

**$x < 1$**

$A = 2$

$2 - 3x = 2$

$-3x = 0$

$x = 0$

# Ασκηση 7

Εστω $1 \le x \le 2$ και $2 \le y \le 3$

Να βρεθουν τα οριο μεταξυ των οποιων βρισκονται οι παραστασεις.

(α) $2x - 3y$

- $1 \le x \le 2 \Rightarrow 2 \le 2x \le 4 \Rightarrow 4 \ge 2x \ge 2$
- $2 \le y \le 3 \Rightarrow -6 \ge -3y \ge -9$

(+) $-2 \ge 2x - 3y \ge -7$

(β) $x^2 - \frac{x}{y}$

- $1 \le x \le 2 \Rightarrow 1 \le x^2 \le 4$
- $1 \le x \le 2 \Rightarrow 2 \ge x \ge 1$
- $2 \le y \le 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{3}$

(·) $1 \ge \frac{x}{y} \ge \frac{1}{3}$

$-1 \le -\frac{x}{y} \le -\frac{1}{3}$

(+)

$0 \le x^2 - \frac{x}{y} \le 4 - \frac{1}{3}$

# Άσκηση 8

Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{x^2 - 6|x| + 9}{x^2 - 3|x|}$$

(Α) Βρείτε τα x ώστε να ορίζεται η Α

Για να ορίζεται η Α πρέπει $x^2 - 3|x| \neq 0$

$\longrightarrow x^2 - 3|x| = 0$

$|x|^2 - 3|x| = 0$

$|x|(|x| - 3) = 0$

$|x| = 0$ ή $|x| = 3$

$x = 0$ $x = 3$ $x = -3$

ΠΡΠ

$x \neq 0$ $x \neq -3$

$x \neq 3$

(Β) Να απλοποιηθεί η Α.

$$A = \frac{|x|^2 - 6|x| + 9}{|x|^2 - 3|x|} = \frac{(|x| - 3)^2}{|x|(|x| - 3)} = \frac{|x| - 3}{|x|}$$

(Γ) Να λυθεί η εξίσωση $|A| = \frac{1}{2}$

$|A| = \frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{2}$ ή $A = -\frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{2}$

$\frac{|x|-3}{|x|} = \frac{1}{2}$

$2|x|-6 = |x|$

$|x| = 6$

$x = 6$ $\quad$ $x = -6$

$A = -\frac{1}{2}$

$\frac{|x|-3}{|x|} = -\frac{1}{2}$

$2|x|-6 = -|x|$

$3|x| = 6$

$|x| = 2$

$x = 2$ $\quad$ ή $\quad$ $x = -2$

(δ) Να λυθεί η ανίσωση $|A| < \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} \le A \le \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} \le \frac{|x|-3}{|x|} \le \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} \le \frac{|x|-3}{|x|}$ και $\frac{|x|-3}{|x|} \le \frac{1}{3}$

$-|x| \le 3|x| - 9$

$9 \le 4|x|$

$\frac{9}{4} \le |x|$

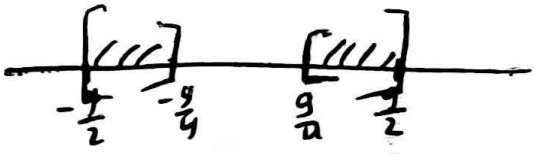
$x \ge \frac{9}{4}$ ή $x \le -\frac{9}{4}$

$3|x| - 9 \le |x|$

$2|x| \le 9$

$|x| \le \frac{9}{2}$

$-\frac{9}{2} \le x \le \frac{9}{2}$



## Άσκηση 9

Έστω $|x-1|<1$ και $|2-y|<2$.

(α) Να δείξετε ότι $x \in (0,2)$ και $y \in (0,4)$

(β) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{y^2-8y+16}$$

### Λύση

(α) $|x-1|<1 \Leftrightarrow -1<x-1<1 \Leftrightarrow 0<x<2$

$x \in (0,2)$

$|2-y|<2 \Leftrightarrow -2<2-y<2$

$-4<-y<0$

$4>y>0$

$y \in (0,4)$.

(β) $A = \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(y-4)^2}$

$A = \overset{\ominus}{|x-2|} - \overset{\ominus}{|y-4|} = -x+2-(-y+4) =$

$= -x+2+y-4$

$= y-x-2$

- $0<x<2 \Rightarrow -2<x-2<0$
- $0<y<4 \Rightarrow -4<y-4<0$

# Άσκηση 10

№0 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4$

$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = 4$

$= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{9}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} + \frac{\sqrt{25}-\sqrt{15}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} = 4$

$= \frac{\sqrt{15}+3}{2} + \frac{5-\sqrt{15}}{2} = 4$

$(=) \frac{8}{2} = 4$

extra στη διαίρεση

$\rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\rightarrow \frac{2}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2}\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{2\sqrt[5]{2^3}}{2}$

# Άσκηση 11

(α) να δείξετε $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \sqrt[3]{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 1$

$$\sqrt[3]{(2+\sqrt{3})\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} = 1$$

$$\sqrt[3]{(2+\sqrt{3})\left(2^2-\sqrt{2+\sqrt{3}}^2\right)} = 1$$

$$\sqrt[3]{(2+\sqrt{3})\left(4-|2+\sqrt{3}|\right)} = 1$$

$$\sqrt[3]{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 1$$

$$\sqrt[3]{2^2-\sqrt{3}^2} = 1$$

$$\sqrt[3]{4-3} = 1$$

$$\sqrt[3]{1} = 1$$

(B) Να δ.ο $\sqrt[12]{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^2} \cdot \sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^3} = 1$

| |
|---|
| $\sqrt[v\cdot\rho]{x^{k\cdot\rho}} = \sqrt[v]{x^k}$ |
| $\sqrt[\nu]{\sqrt[\kappa]{x}} = \sqrt[\nu\cdot\kappa]{x}$ |
| $\sqrt[\nu]{x^\mu} = x^{\frac{\mu}{\nu}}$ |

$$\sqrt[12]{\sqrt{2}+1} \sqrt[12]{(\sqrt{2}+1)^8} \sqrt[12]{(\sqrt{2}-1)^9} = 1$$

$$\sqrt[12]{(\sqrt{2}+1)^1 (\sqrt{2}+1)^8 (\sqrt{2}-1)^9} = 1$$

$$\sqrt[12]{(\sqrt{2}+1)^9 (\sqrt{2}-1)^9} = 1$$

$$\sqrt[12]{[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^9} = 1$$

$$\sqrt[12]{(\sqrt{2}^2-1^2)^9} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[12]{1^9} = 1 \checkmark$$

# Άσκηση 12

(α) Να δείξω $\sqrt[5]{a^2}\sqrt[4]{a^3}\sqrt{a} = \sqrt[20]{a^{33}}$

α' τρόπος

$\sqrt[5]{a^2}\sqrt[4]{a^3}\sqrt{a} =$

$= \sqrt[20]{a^8}\sqrt[20]{a^{15}}\sqrt[20]{a^{10}}$

$= \sqrt[20]{a^8 a^{15} a^{10}} = \sqrt[20]{a^{33}}$

β' τρόπος (δικός).

$\sqrt[\nu]{a^\mu} = a^{\frac{\mu}{\nu}}$

$\sqrt[5]{a^2}\sqrt[4]{a^3}\sqrt{a} =$

$= a^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} =$

$= a^{\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{8}{20}+\frac{15}{20}+\frac{10}{20}} = a^{\frac{33}{20}} = \sqrt[20]{a^{33}}$

(В) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\ \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^5}} \cdot \sqrt[4]{a}$

$\rightarrow \dfrac{\sqrt[12]{a^9}\ \sqrt[12]{a^4}}{\sqrt[12]{a^{10}}} = \dfrac{\sqrt[12]{a^{13}}}{\sqrt[12]{a^{10}}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^{13}}{a^{10}}} = \sqrt[12]{a^3}$

$= \sqrt[4]{a}$

(Г) $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^3}$

$\rightarrow \sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt{2\cdot 2^2}}} = \sqrt{2\sqrt[6]{2^3}}$

$= \sqrt{2\sqrt[2]{2}} = \sqrt{\sqrt{2\cdot 2^2}} = \sqrt[4]{2^3}$

В' гроші

$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt[3]{2^1\cdot 2^{1/2}}} = \sqrt{2\sqrt[3]{2^{3/2}}}$

$= \sqrt{2\ 2^{\frac{3/2}{3}}} = \sqrt{2\cdot 2^{1/2}} = \sqrt{2^{3/2}} = 2^{\frac{3/2}{2}} = 2^{3/4}$

$=$

Пробохи

$\sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2\cdot 4^4}} = \sqrt[12]{2\cdot(2^2)^4} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[4]{2^3}$

(5) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt[4]{25}}} = \sqrt[4]{5^3}$

$\rightarrow \sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt[4]{5^2}}} = \sqrt{5\sqrt[3]{\sqrt[4]{5^2 \cdot 5^4}}}$

$= \sqrt{5\sqrt[12]{5^6}} = \sqrt{5\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5 \cdot 5^2}}$

$= \sqrt[4]{5^3}$.

$\rightarrow \sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt[4]{5^3}}} = \sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}}$

$= \sqrt{5\sqrt[3]{5 \cdot 5^{1/2}}} = \sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{5^{3/2}}} =$

$= \sqrt{5 \cdot 5^{\frac{3/2}{3}}} = \sqrt{5 \cdot 5^{1/2}}$

$= \sqrt{5^{3/2}} = 5^{\frac{3/2}{2}} = 5^{3/4} = \sqrt[4]{5^3}$

# Άσκηση 13

(α) Να βρεθούν τα ακόλουθα:

i) $(3+2\sqrt{7})^2$ ii) $(3-2\sqrt{7})^2$

(β) Να δείξετε ότι $\sqrt{37+12\sqrt{7}} - \sqrt{37-12\sqrt{7}} = 6$

(γ) Να δείξετε ότι $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$ είναι ρητός αριθμός.

Λύση

(α) i) $(3+2\sqrt{7})^2 = 9 + 12\sqrt{7} + 28 = 37 + 12\sqrt{7}$

ii) $(3-2\sqrt{7})^2 = 9 - 12\sqrt{7} + 28 = 37 - 12\sqrt{7}$.

(β) $\sqrt{37+12\sqrt{7}} - \sqrt{37-12\sqrt{7}} = 6$

$\sqrt{(3+2\sqrt{7})^2} - \sqrt{(3-2\sqrt{7})^2} = 6$

$|3+2\sqrt{7}| - |3-2\sqrt{7}| = 6$

$3+2\sqrt{7} - (-3+2\sqrt{7}) = 6$

$3+2\sqrt{7}+3-2\sqrt{7} = 6$

$6 = 6$.

⑧ $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 =$

$= \sqrt{\frac{2}{3}}^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}^2$

$= \frac{2}{3} + 2\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}$

$= \frac{2}{3} + 2 + \frac{3}{2} = \frac{4}{6} + \frac{12}{6} + \frac{9}{6}$

$= \frac{25}{6}$.

Προσοχή

$\sqrt{2^3} = \sqrt{2}^2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

## Άσκηση 14

**Ιδιότητα**

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Έστω $x \in (-1, 1)$

και $y \in (-2, 2)$

Έστω $A = \left|3x - \frac{5y}{3}\right|$

**Νδο** $A < \frac{19}{3}$

$$A = \left|3x - \frac{5y}{3}\right| = \left|3x + \left(-\frac{5y}{3}\right)\right| \leq |3x| + \left|-\frac{5y}{3}\right|$$

$$A = \left|3x - \frac{5y}{3}\right| \leq 3|x| + \frac{5}{3}|y| < \frac{19}{3}.$$

αφού $x \in (-1,1) \Rightarrow -1 < x < 1$

$\Rightarrow \underline{|x| < 1}$

αφού $y \in (-2,2)$

$\Rightarrow -2 < y < 2 \Rightarrow \underline{|y| < 2}$

- $|x| < 1 \Rightarrow 3|x| < 3$
- $|y| < 2 \Rightarrow \frac{5}{3}|y| < \frac{10}{3}$

$\Big\}\ \oplus$ $3|x| + \frac{5}{3}|y| < 3 + \frac{10}{3}$

$3|x| + \frac{5}{3}|y| < \frac{19}{3}$

# Εργασία

στις

# εξισώσεις

**1.** $x-(3x-1)=1-2(3x-2)$

$x-3x+1=1-6x+4$

$-2x+1=5-6x$

$6x-2x=5-1$

$4x=4$

$\boxed{x=1}$

**2.** $\frac{2(1-3x)}{5}-\frac{3}{2}(x-1)=-x+2$

$10\ \frac{2-6x}{5}-10\cdot\frac{3}{2}(x-1)=-10x+2\cdot 10$

$2(2-6x)-5\cdot 3(x-1)=-10x+20$

$4-12x-15(x-1)=-10x+20$

$4-12x-15x+15=-10x+20$

$19-27x=-10x+20$

$10x-27x=20-19$

$-17x=1$

$x=-\frac{1}{17}$

**3.** $(x-1)^3 - x^2(x-3) = 0$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + 3x^2 = 0$

$3x - 1 = 0$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

← δω κανω πραξη

**4.** $x^3 - 3x^2 = (2x-1)(x-3)$.

$x^2(x-3) = (2x-1)(x-3)$.

$x^2(x-3) - (2x-1)(x-3) = 0$

$(x-3)(x^2 - (2x-1)) = 0$

$(x-3)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$(x-3)(x-1)^2 = 0$

$x-3=0$ ή $(x-1)^2 = 0$

$x-1=0$

$x=3$

$x=1$

← δω αρνη ΟΧΙ

Έχω στην ίδια εξίσωση

έκανα πράξεις.

$$x^3 - 3x^2 = (2x-1)(x-3)$$

$$x^3 - 3x^2 = 2x^2 - 6x - x + 3$$

$$x^3 - 3x^2 = 2x^2 - 7x + 3$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 7x - 3 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$$

και τώρα;

Προβλημα!

**5.** $2x^2 - x - 1 = 0$

$\boxed{\alpha = 2 \quad \beta = -1 \quad \gamma = -1}$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)$

$\Delta = 1 + 8 = 9$ έχω δύο ρίζες άνισες

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm 3}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

$\boxed{x = 1}$ $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$

**6.** $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$

$\Delta = 16 - 16 = 0$ έχω μία διπλή ρίζα.

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

**7.** $4x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = B^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2$

$\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$ Αδύνατη!

**8.** $27x^3 - (x-1)^3 = 0$

$27x^3 = (x-1)^3$

$(3x)^3 = (x-1)^3$

$a^3 = B^3$

$\Leftrightarrow$

$a = B$

$3x = x - 1$

$3x - x = -1$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

**9.** $16x^4 - (x-1)^4 = 0$

$16x^4 = (x-1)^4$

$(2x)^4 = (x-1)^4$

$a^2 = b^2$
$\Leftrightarrow$
$a = b$ ori $a = -b$

$2x = x - 1$

$2x - x = -1$

$x = -1$

ori

$2x = -x + 1$

$2x + x = 1$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

# Εξισώσεις με απόλυτα Τιμή.

**10.** $|2x+4| = 8$

$|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

$2x+4 = 8$ ή $2x+4 = -8$.

$2x = 4$ $\quad$ $2x = -8-4$

$2x = -12$

$x = 2$ $\quad$ $x = -6$

**11.** $|x+4| = |2x-2|$

$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ή $x = -y$

$x+4 = 2x-2$ ή $x+4 = -2x+2$

$x-2x = -2-4$ $\quad$ $x+2x = 2-4$

$-x = -6$ $\quad$ $3x = -2$

$x = 6$ $\quad$ $x = -\frac{2}{3}$

$d(x,y) = |x-y|$

**12.** $5 - d(2x,-2) = 7 - |3x+3|$

$5 - |2x+2| = 7 - |3x+3|$

$5 - 2|x+1| = 7 - 3|x+1|$

$-2|x+1| + 3|x+1| = 7-5$

$|x+1| = 2 \rightarrow$ $x+1 = 2$ $\quad x = 1$

$x+1 = -2$ $\quad x = -3$

13. $\frac{d(x,3)}{2} + \frac{|6-2x|}{3} = 8 - \frac{|3-x|}{6}$.

$|x| = |-x|$

$$\frac{|x-3|}{2} + \frac{2|3-x|}{3} = 8 - \frac{|x-3|}{6}$$

$$\frac{|x-3|}{2} + \frac{2|x-3|}{3} = 8 - \frac{|x-3|}{6}$$

$$3|x-3| + 4|x-3| = 48 - |x-3|$$

$$7|x-3| + |x-3| = 48$$

$$8|x-3| = 48$$

$$|x-3| = 6$$

$x-3=6$ atau $x-3=-6$

$x=9$ $x=-3$

**14.** $|x-4| \cdot |x+3| = |x-2| \cdot |x-6|$ $\quad |a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$

$$|(x-4)(x+3)| = |(x-2)(x-6)|$$

$$|x^2+3x-4x-12| = |x^2-6x-2x+12|$$

$$|x^2-x-12| = |x^2-8x+12|$$

$x^2-x-12 = x^2-8x+12$ ili $x^2-x-12 = -x^2+8x-12$

$8x-x = 12+12$

$7x = 24$

$x = \frac{24}{7}$

$2x^2-9x = 0$

$x(2x-9) = 0$

$x = 0$ ili $2x-9 = 0$

$2x = 9$

$x = \frac{9}{2}$.

**15.** $|x-4| \cdot |x+3| = |x-2||x+3|$

$|x+3|\left(|x-4| - |x-2|\right) = 0$

$|x+3| = 0$

$x+3 = 0$

$x = -3$

ili $|x-4| - |x-2| = 0$

$|x-4| = |x-2|$

$x-4 = x-2$

Ništa

ili $x-4 = -x+2$

$2x = 6$

$x = 3$

16. $\frac{|x-1|}{4} - 2x = \frac{|2x-2|}{2} - (x+1)$.

$\frac{|x-1|}{4} - 2x = \frac{2|x-1|}{2} - x - 1$

$\frac{|x-1|}{4} = x - 1 + |x-1|$

$|x-1| = 4x - 4 + 4|x-1|$

Prima $|x-1| - 4|x-1| = 4x - 4$

$-3|x-1| = 4x - 4$

$$\boxed{|x-1| = \frac{4x-4}{-3}}$$

prima $\frac{4x-4}{-3} \geq 0$

$4x - 4 \leq 0$

$4x \leq 4$

$x \leq 1$.

$x - 1 = \frac{4x-4}{-3}$

$-3x + 3 = 4x - 4$

$-7x = -7$

$x = 1$

a doua $x - 1 = -\frac{4x-4}{-3}$

$-3x + 3 = -4x + 4$

$x = 1$

**17.** $|x^2-2x-3|+|9-x^2|=0$.

при $x^2-2x-3=0$

$x=3$ $x=-1$

при $9-x^2=0$

$(3-x)(3+x)=0$

$3-x=0$ и $3+x=0$

$x=3$ $x=-3$

$x=3$

**18.** $5+\sqrt{x^2-6x+9}=3x$

$5+\sqrt{(x-3)^2}=3x$

$|x-3|=3x-5$

при $3x-5\geq 0$ $\Rightarrow 3x\geq 5$ $\Rightarrow x\geq \frac{5}{3}$

$x-3=3x-5$ и $x-3=-3x+5$

$x-3x=-5+3$ $x+3x=5+3$

$-2x=-2$ $4x=8$

$x=1$ $x=2$

Ответ.

**19.** $x + |x+3| - |4-x| = 0$

| $x$ | | $-3$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $4-x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ |

1o. Av $x < -3$ Toz.

$$x + |x+3| - |4-x| = 0$$

$$x + (-x-3) - (4-x) = 0$$

$$x - x - 3 - 4 + x = 0$$

$$\boxed{x = 7}$$

2o. Av $-3 \leq x \leq 4$ Toz

$$x + |x+3| - |4-x| = 0$$

$$x + x + 3 - (4-x) = 0$$

$$2x + 3 - 4 + x = 0$$

$$3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

3. Αν $x > 4$ τοτε

$x + |x+3| - |4-x| = 0$ (+) (−)

$x + x + 3 - (-4+x) = 0$

$2x + 3 + 4 - x = 0$

$x + 7 = 0$

20. $\left| 1 - |3-2x| \right| = 6$ .

$1 - |3-2x| = 6$ ή $1 - |3-2x| = -6$

$-|3-2x| = 6-1$ $\quad -|3-2x| = -6-1$

$-|3-2x| = 5$ $\quad -|3-2x| = -7$

$|3-2x| = -5$ $\quad |3-2x| = 7$

Αδύνατη

$3-2x = 7$ ή $3-2x = -7$

$-2x = 7-3$ $\quad -2x = -7-3$

$-2x = 4$ $\quad -2x = -10$

$x = -2$ $\quad x = 5$

21. $d(4, d(x,0)) = d(d(x,0), -3)$.

$d(4, |x-0|) = d(|x-0|, -3)$

$d(4, |x|) = d(|x|, -3)$

$|4-|x|| = ||x|+3|$

$4-|x| = |x|+3$ și ~~$4-|x| = -|x|-3$~~

Absurd.

$-2|x| = -1$

$|x| = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ și $x = -\frac{1}{2}$

22. $|2x^3| - |x|^3 - 4x^2 = 0$

$2|x^3| - |x|^3 - 4|x|^2 = 0$

$2|x|^3 - |x|^3 - 4|x|^2 = 0$

$|x|^3 - 4|x|^2 = 0$

$|x|^2 (|x| - 4) = 0$

$|x|^2 = 0$ ili $|x| - 4 = 0$

$x = 0$ $|x| = 4$

$x = 4$ $x = -4$

23. $\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + 1 - \frac{x-1}{|x-2|} = 0.$

$\frac{|x-3|}{|x-2|} + 1 - \frac{x-1}{|x-2|} = 0$

$|x-3| + |x-2| - (x-1) = 0$

$|x-3| + |x-2| = x - 1.$

$\text{Pri } x - 1 \geq 0$

$x \geq 1.$

$|x-3| + |x-2| = x-1$

$x \geq 1$

| x | | 2 | | ? | |
|---|---|---|---|---|---|
| x-3 | − | | − | 0 | + |
| x-2 | − | 0 | + | | + |

1. Av $x < 2$ tozc

$\overset{\ominus}{|x-3|} + \overset{\ominus}{|x-2|} = x-1$

$-x+3-x+2 = x-1$

$-2x+5 = x-1$

$-3x = -6$

~~$x = 2$~~

2. Av $2 \leq x \leq 3$ tozc

$\overset{\ominus}{|x-3|} + \overset{\oplus}{|x-2|} = x-1$

$-x+3+x-2 = x-1$

$1 = x-1$

$x = 2$

3. Av $x > 3$ tozc

$\overset{\oplus}{|x-3|} + \overset{\oplus}{|x-2|} = x-1$

$x-3+x-2 = x-1$

$x = 4$

# 24. Κλασματική εξίσωση

$$\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x+1}.$$

$$\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Περιορισμοί

→ $\boxed{x=0}$

→ $x(x+1)=0$

$\boxed{x=0}$ ή $x+1=0$

$\boxed{x=-1}$

→ $x+1=0$

$\boxed{x=-1}$

Πρπ

$x \neq 0$

$x \neq -1$.

Ελάχ. $x(x+1)$.

Πολ/πω παντού με $x(x+1)$

$$x(x+1)\frac{x-1}{x} + x(x+1)\frac{1}{x(x+1)} = x(x+1)\frac{1}{x+1}$$

$$(x+1)(x-1) + 1 = 1$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$x-1=0$ ή $x+1=0$

$x=1$ ✓ $x=-1$ ✗

# 25. Παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού.

$$\lambda(2x+1) - 4(1+\lambda x) = \lambda^2(x-1) + \lambda .$$

**Σκοπός: ( )( ) x = ( )( )**

$$2\lambda x + \lambda - 4 - 4\lambda x = \lambda^2 x - \lambda^2 + \lambda$$

$$2\lambda x - 4\lambda x - \lambda^2 x = -\lambda^2 + x + 4 - \lambda .$$

$$(2\lambda - 4\lambda - \lambda^2)\, x = -\lambda^2 + 4$$

$$(-2\lambda - \lambda^2)\, x = -\lambda^2 + 4$$

$$\lambda(-2-\lambda)\, x = z^2 - \lambda^2$$

$$\lambda(-2-\lambda)\, x = (2-\lambda)(2+\lambda)$$

1. Αν $\lambda = 0$ τότε $0x = 4$ Αδύνατη
2. Αν $\lambda = -2$ τότε $0x = 0$ Ταυτότητα
3. Αν $\lambda \neq 0, \lambda \neq -2$ $\frac{-\lambda(\lambda+2)}{-\lambda(\lambda+2)} x = \frac{(2-\lambda)(2+\lambda)}{-\lambda(\lambda+2)} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 2}{\lambda}$

# Άσκηση 1

$$\alpha = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 36^{1/2}$$

$$B = \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3^2 \sqrt[4]{3^7}}} \cdot \left(\frac{3}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(α) Βρείτε $\alpha, B$.

(β) Αν $\alpha < x < B$ βρείτε $K = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$

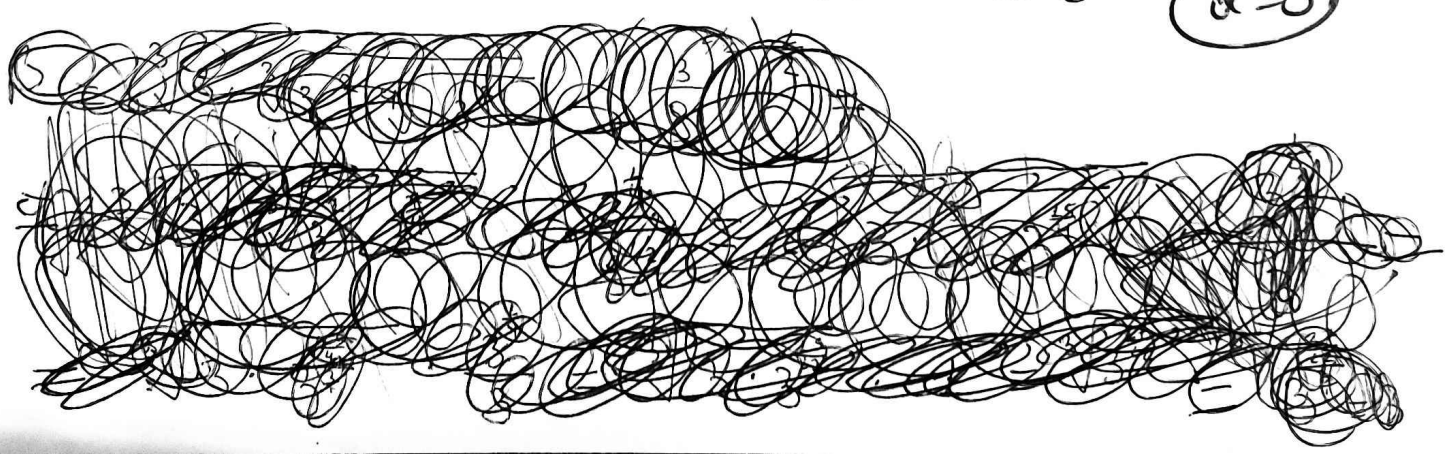
## Λύση

$$\alpha = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 36^{1/2} =$$

$$= \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) - \sqrt{36} =$$

$$= 2+\sqrt{3} + 2-\sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - 6 =$$

$$= -2 + 2\sqrt{4-3} = -2+2\sqrt{1} = 0 \quad (\alpha = 0)$$



$$B = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^2\sqrt[4]{3^7}}} \cdot \left(\frac{3^{1/2}}{9}\right)^{1/2}$$

$$B = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^2\,3^{7/4}}} \cdot \left(\frac{3^{1/2}}{3^2}\right)^{1/2}$$

$$B = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^{15/4}}} \left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$B = \sqrt[3]{3\,3^{\frac{15/4}{3}}}\; 3^{-\frac{3}{4}}$$

$$B = \sqrt[3]{3\cdot 3^{5/4}}\; 3^{-\frac{3}{4}}$$

$$B = \sqrt[3]{3^{9/4}}\; 3^{-\frac{3}{4}}$$

$$B = 3^{\frac{9/4}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} = 3^0 = 1$$

$B = 1$

# Άσκηση 2

(α) Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{|x-5|+1}{3} - \frac{16-|4x-20|}{6} = \frac{|15-3x|+8}{12}$$

(β) Έστω $\alpha < \beta$ οι ρίζες της εξίσωσης.

i) $\left| |x-\alpha| - \beta^{1/2} \right| = \beta$

ii) $\sqrt{x^2-6x+\beta} - (\beta-9)^{1/3} \cdot (x-6) = 0$.

Λύση

α) $\frac{|x-5|+1}{3} - \frac{16-|4x-20|}{6} = \frac{|15-3x|+8}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{12}^{4} \cdot \frac{|x-5|+1}{\cancel{3}} - \cancel{12}^{2} \cdot \frac{16-|4x-20|}{\cancel{6}} = \cancel{12} \cdot \frac{|15-3x|+8}{\cancel{12}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(|x-5|+1) - 36 - 2(|4x-20|) = |15-3x|+8 \Rightarrow$

$\Rightarrow |4x-20| + 4 - 36 - |8x+40| = |15-3x|+8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4|x-5| + 4 - 36 - 8|x-5| = 3|5-x| + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4|x-5| + 4 - 36 - 8|x-5| - 3|x-5| + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-5|(4+4-36-8-3+8) \Rightarrow |x-5|(8-39) = 0$

$\Rightarrow$

(a)

$$\frac{|x-5|+1}{3} - \frac{16-|4x-20|}{6} = \frac{|15-3x|+8}{12}$$

$$4(|x-5|+1) - 2(16-4|x-5|) = |15-3x|+8$$

$$4|x-5|+4-32+8|x-5| = 3|5-x|+8$$

$$12|x-5|-28 = 3|x-5|+8$$

$$12|x-5|-3|x-5| = 28+8$$

$$9|x-5| = 36$$

$$|x-5| = 4$$

$x-5=4$ ou $x-5=-4$

$x=9$ $x=1$

$\alpha = 1$

$\beta = 9$

i) $||x-a|-6^{1/2}| = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow ||x-1|-9^{1/2}| = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow ||x-1|-\sqrt{9}| = 9 \quad (\Rightarrow) ||x-1|-3| = 9$

$|x-1|-3 = 9$ ή $|x-1|-3 = -9$

$|x-1| = 12$ $\quad |x-1| = -6$

Αδύνατη.

$x-1 = 12$ ή $x-1 = -12$

$x = 13$ $\quad x = -11$

ii). $\sqrt{x^2-6x+6} - (6-a)^{1/3} \cdot (x-6) = 0$

$\sqrt{x^2-6x+9} - 8^{1/3} \cdot (x-6) = 0$

$\sqrt{(x-3)^2} - \sqrt[3]{8}(x-6) = 0$

$|x-3| - 2(x-6) = 0$

$|x-3| = 2x+12$ $\quad 2x+12 \geq 0$

$x-3 = 2x+12$ ή $x-3 = -2x-12$

$-x = 15$ $\quad x = -9$

$x = -15$

# Ασκηση 3

Δινεται Ταυτοτητα $\lambda^2(x-2) = -1-\lambda(\lambda-x)$

(α) Βρες το $\lambda$.

(β) $|x-\lambda| = 3x-7$.

(γ) $||x|-2x+1| = x-\lambda$.

## Λυση

α) $\lambda^2 x - 2\lambda^2 = -2-\lambda^2+2x$

$\lambda^2 x - \lambda x = -2-\lambda^2+2\lambda^2$

$\lambda^2 x - \lambda x = -2+\lambda^2$

$\lambda x(\lambda-1) = [\lambda+(-1)][\lambda-(-1)]$

$\lambda x(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda+1)$

Αν $\lambda=0$ τοτε ~~αδυνατον~~ $0x = -1$ αδυνατον

Αν $\lambda=1$ τοτε $0x=0$ ταυτοτητα

Αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 2$ τοτε $\frac{\lambda x(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)}$ $\left(x=\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)$

(B) $|x-1| = 3x-7$

$3x-7 \geq 0$

$x-1 = 3x-7$ ve $x-1 = -3x+7$

$x-3x = -7+1$

$4x = 8$

$-2x = -6$

$x = 2$ ✗

$x = 3$ ✓

$x-1 \geq 0$

$x \geq 1$

(8) . $||x|-2x+1| = x-1$

$|x|-2x+1 = x-1$ ve $|x|-2x+1 = 1-x$

$|x|-3x = -2$

$|x| = 3x-2$

$3x-2 \geq 0$

$x \geq \frac{2}{3}$

$|x| = x$

$x \geq 0$

$x = x$

$0 = 0$

$x \in [1, +\infty)$

$x = 3x-2$ ve $x = 2-3x$

$-2x = -2$

$x = 1$ ✓

$4x = 2$

$x = \frac{1}{2}$ ✗

# Άσκηση 4

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

(α) Να δείξετε ότι $A = 4$

(β) Να λύσετε την εξίσωση $|x+A| = 1$.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $d(2x, d(x,A)) = d(2x,4)$.

## Λύση.

α) $A = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} =$

$= \frac{\sqrt{15}+3}{5-3} + \frac{5-\sqrt{15}}{5-3} =$

$= \frac{8}{2} = 4$

β) $|x+4| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = 1 \Rightarrow x = -3 \\ x+4 = -1 \Rightarrow x = -5 \end{cases}$

γ) $d(2x, d(x,A)) = d(2x,4) \longrightarrow$

$\longrightarrow d(2x, d(x,4)) = d(2x,4)$

$d(2x, |x-4|) = |2x-4|$

$|2x - |x-4|| = |2x-4|$

$2x - |x-4| = 2x-4$ ή $2x - |x-4| = -2x+4$

$|x-4| = 4$

$4x - |x-4| = 4$

$-|x-4| = 4-4x$

$|x-4| = 4x-4$

$|x-4| = 4(x-1)$

περίπου $4(x-1) \geq 0$

$x-1 \geq 0$

$\boxed{x \geq 1}$

$x-4 = 4$ ή $x-4 = -4$

$x = 8$ $x = 0$

$x-4 = 4x-4$ ή $x-4 = -4x+4$

$x-4x = 0$

$-3x = 0$

$x = 0$

(απορ)

$x+4x = 8$

$5x = 8$

$x = \frac{8}{5}$ ✓

Λύσεις: $x = 8$, $x = 0$, $x = \frac{8}{5}$