10. $f(x) = e^{x} + x + \sigma\upsilon\nu x$

α) $f'(x) = \underbrace{e^{x}}_{+} + \underbrace{1 - \eta\mu x}_{+} > 0$

$f \nearrow$

- $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$

$1 \geq -\eta\mu x \geq -1$

$\boxed{2 \geq 1 - \eta\mu x \geq 1}$

β) i) νδο $f(\varepsilon\varphi x) - e^{x} > x + \sigma\upsilon\nu x$ $\quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$f(\varepsilon\varphi x) > e^{x} + x + \sigma\upsilon\nu x$

$f(\varepsilon\varphi x) > f(x)$

$f \nearrow$

$\varepsilon\varphi x > x$

Αρκει νδο $\varphi(x) > 0$ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\underbrace{\varepsilon\varphi x - x}_{\varphi(x)} > 0$

$\varphi'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2} x} - 1 = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^{2} x}{\sigma\upsilon\nu^{2} x} = \frac{\eta\mu^{2} x}{\sigma\upsilon\nu^{2} x} \geq 0$

$\varphi \nearrow$

Άρα αν $x>0$

$$\varphi(x) \nearrow$$

$$\varphi(x) > \varphi(0)$$

$$\varepsilon\varphi x - x > 0$$

$$\varepsilon\varphi x > x$$

ii). νδο $f(e^{x-1} - 1) > f(\ln x^x)$ $\forall x > 1$.

$$f \nearrow$$

$$e^{x-1} - 1 > \ln x^x$$

$$e^{x-1} - 1 > x \ln x$$

$$\underbrace{e^{x-1} - 1 - x \ln x}_{h(x)} > 0.$$

$$h'(x) = e^{x-1} - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$h'(x) = e^{x-1} - \ln x - 1 \qquad h'(1) = 0$$

$$h''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \qquad h''(1) = 0$$

$$h'''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0.$$

x		1	
h'''	$+$		$+$
h''	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$
h'	$\searrow$ $+$	0	$+$ $\nearrow$
h	$\nearrow$		$\nearrow$

$x < 1 \Rightarrow h''(x) < h''(1) \Rightarrow h''(x) < 0$

$x > 1 \Rightarrow h''(x) > h''(1) \Rightarrow h''(x) > 0$

$h'(x) \geq h'(1)$

$h'(x) \geq 0$

Av $x > 1$

$h \nearrow$

$h(x) > h(1)$

$$e^{x-1} - 1 - x \ln x > 0$$

iii) νδο $f(e^x) > f(1+\eta\mu x)$ $\forall x>0$

$f \nearrow$

Αρκει νδο $e^x > 1+\eta\mu x$ $\forall x>0$

$$\underbrace{e^x - 1 - \eta\mu x}_{t(x)} > 0$$

$$t'(x) = e^x - \sigma\upsilon\nu x$$

$$t'(x) = \underbrace{e^x - 1}_{+} + \underbrace{1 - \sigma\upsilon\nu x}_{+} \geq 0 \qquad t \nearrow$$

- Για $x>0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0$

- $\sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Rightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu x \geq 0$

Αρα στο $x>0$

$t \nearrow$

$t(x) > t(0) \Rightarrow \underline{e^x - 1 - \eta\mu x > 0}$

12. (01) Εξίσωση $e^x = x^2+1$

α' τρόπος

$$\underbrace{e^x - x^2 - 1}_{f(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$f(x) = f(0)$$

f 1-1

$$\boxed{x=0}.$$

$$f'(x) = e^x - 2x$$

$$f''(x) = e^x - 2$$

$$\rightarrow e^x - 2 = 0$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln 2$$

x		$\ln 2$	
f''	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$ $+$		$+$ $\nearrow$
f	$\nearrow$		$\nearrow$

$$f'(x) \geq f'(\ln 2).$$

$$f'(x) \geq e^{\ln 2} - 2\ln 2$$

$$f'(x) \geq 2 - \ln 4$$

$$f'(x) \geq \ln e^2 - \ln 4$$

$$f'(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}$$

β' τρόπος

$$1 = \frac{x^2+1}{e^x} \iff f(x) = \frac{x^2+1}{e^x} - 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2+1)e^x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x - x^2 - 1}{e^x} = -\frac{(x-1)^2}{e^x} \leq 0 \quad f \downarrow$$

(B) Νδο $2e^{\eta\mu\theta} \leq e(2-\sigma\upsilon\nu^2\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

$$2e^{\eta\mu\theta} \leq 2e - e\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$2e^{\eta\mu\theta} \leq 2e - e(1-\eta\mu^2\theta)$$

$$2e^{\eta\mu\theta} \leq 2e - e + e\eta\mu^2\theta$$

$$2e^{\eta\mu\theta} \leq e + e\eta\mu^2\theta$$

$$2e^{\eta\mu\theta} \leq e(1+\eta\mu^2\theta).$$

$$\frac{2}{e} \leq \frac{1+\eta\mu^2\theta}{e^{\eta\mu\theta}}.$$

$$f(1) \leq f(\eta\mu\theta)$$

$$f \downarrow$$

$$1 \geq \eta\mu\theta$$

που ισχύει!

14. (δ) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ και $g(x) = \dfrac{x}{2}$

Έστω $f(x) \leq g(x)$

$$\frac{e^x - 1}{x} < \frac{x}{2}$$

$$\underbrace{\frac{e^x - 1}{x} - \frac{x}{2}}_{h(x)} < 0 \qquad D_h = \mathbb{R}^*.$$

$$h'(x) = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} - \frac{1}{2}$$

$$h'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1 - x^2}{2x^2} = \frac{e^x(x-1) - (x^2 - 1)}{2x^2}$$

$$h'(x) = \frac{e^x(x-1) - (x-1)(x+1)}{2x^2} = \frac{(x-1)\overbrace{(e^x - x - 1)}^{+}}{\underbrace{2x^2}_{+}}$$

- $e^x \geq x + 1$

  $e^x - x - 1 \geq 0$

x		0		1	
h'	$-$	‖	$-$	0	$+$
h	↘	‖	↘		↗

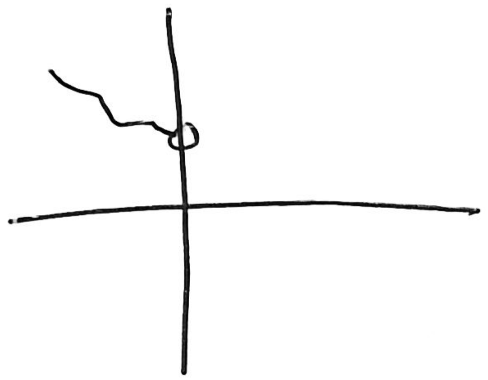
Όταν $x>0$ τότε $h(x) \geq h(1)$

$$f(x)-g(x) \geq \frac{e-1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$f(x)-g(x) > 0$$

$$f(x) > g(x)$$

Όταν $x<0$



$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x-1}{x} - \frac{x}{2}\right) = 1.$$

$$\to \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Η $h(x)>1$ $\forall x<0$

$f(x)-g(x)>1$ $f(x)-g(x)>0 \Rightarrow f(x)>g(x)$

15. γ) $e^x = x^4$ $\quad \Delta = (-1, 0)$,

$f(x) = e^x - x^4$

$f(-1) = e^{-1} - (-1)^4 = \frac{1}{e} - 1 < 0$

$f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$

f συνεχής $[-1,0]$ ως π.σ.σ.

Bolzano $\exists$ $\xi \in (-1,0)$ τ.ω $f(\xi) = 0$

$f'(x) = e^x \underbrace{-4x^3}_{+} > 0$

$-1 < x < 0$

$-1 < x^3 < 0$

$4 > -4x^3 > 0$

$f \nearrow$

18. $f'(x) < 0$ $\qquad f\downarrow$

(B) [illegible] $\quad f(3) - \cos 2 < f(2) - \cos 3$

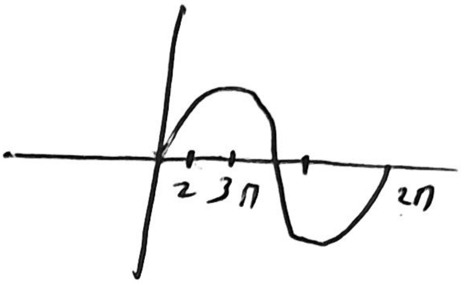
$$f(3) + \cos 3 < f(2) + \cos 2$$

$$\boxed{g(x) = f(x) + \cos x}$$

$$g(3) < g(2)$$

$3 > 2$ אמת

[illegible]!



$g'(x) = \underset{\ominus}{f'(x)} - \underset{\oplus}{\sin x} < 0$

$g\downarrow$

(b) [illegible] $\quad f(2) - \cos 2 < f(1) - \cos 3$.

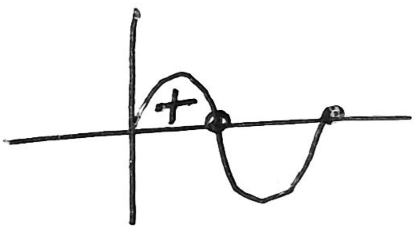
$$f(2) + \cos 3 < f(1) + \cos 2$$

$$\boxed{g(x) = f(x) + \cos(x+1)}$$

$$g(2) < g(1)$$

$g\downarrow$

$g'(x) = \underset{\ominus}{f'(x)} - \underset{\oplus}{\sin(x+1)} < 0 \qquad 2 > 1$ ✓



$g\downarrow$

16. $f(x) = e^x - x - 3συνx$

(α) ΝΔΟ η εξίσωση $\frac{e^x - x}{συνx} = 3$ εχει ριζα $(0, \frac{π}{2})$.

$e^x - x = 3συνx \Rightarrow e^x - x - 3συνx = 0$

$f(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 - 3 = -2 \\ f(\frac{π}{2}) = e^{π/2} - \frac{π}{2} > 0 \end{array}\right\} f(0)f(\frac{π}{2}) < 0$$

Bolzano $\exists x_0 \in (0, \frac{π}{2})$ τ.ω $f(x_0) = 0$.

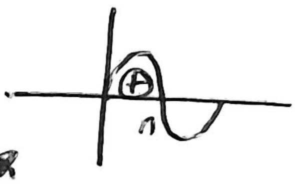
- $e^x \geq x + 1$

$e^x > x$

$e^{π/2} > \frac{π}{2}$

$e^{π/2} - \frac{π}{2} > 0$

$f'(x) = \underset{+}{e^x - 1} + \underset{+}{3ημx} > 0$



- $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0$

$e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0$

$f \nearrow$

(β) ΝΔΟ $\exists!\, x_0 \in (0, \frac{π}{2})$ τ.ω το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)}$ να μην υπαρχει.

x	x_0
$f(x)$	$\nearrow$ − 0 $\nearrow$ +

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty \end{array}\right\}$$ Το οριο δεν υπαρχει!

20. (B) $3^{x-1}+4^{x-1}=5^{x-1}$

$\boxed{x-1=t}$

$3^t+4^t=5^t$

$\frac{3^t}{5^t}+\frac{4^t}{5^t}=1$

$\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t-1}_{f(t)}=0 \Rightarrow f(t)=0$

$f(t)=f(2)$

f 1-1

$t=2$

$x-1=2$

$\boxed{x=3}$

$t_1<t_2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{t_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{t_2}$ (+)

$t_1<t_2 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{t_1}>\left(\frac{4}{5}\right)^{t_2}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{t_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{t_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{t_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{t_2}$

$f\downarrow$

19. ① . $f: (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f'(x) < 0 \quad \forall x > 0$

NSo $f(e) < \ln \dfrac{1+e^2}{5^{1-e}}$ $\qquad f(2) = e\ln 5$.

$f(e) < \ln(1+e^2) - \ln 5^{1-e}$

$f(e) < \ln(1+e^2) - (1-e)\ln 5$.

$f(e) < \ln(1+e^2) - \ln 5 + e\ln 5$

$f(e) < \ln(1+e^2) - \ln 5 + f(2)$

$f(e) - \ln(1+e^2) < f(2) - \ln 5$

$f(2) - \ln(2^2+1)$.

$g(x) = f(x) - \ln(1+x^2)$

$g(e) < g(2)$

$g \downarrow$

$g'(x) = f'(x) - \dfrac{2x}{x^2+1} < 0 \qquad e > 2$ ✓

$g \downarrow$.

21. $2x\,\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x = \pi$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\boxed{f(x) = 2x\,\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x - \pi}$$

$$f\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = -2\tfrac{\pi}{2}\,\eta\mu\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + \cancel{2\sigma\upsilon\nu\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)} - \pi$$

$x = -\frac{\pi}{2}$

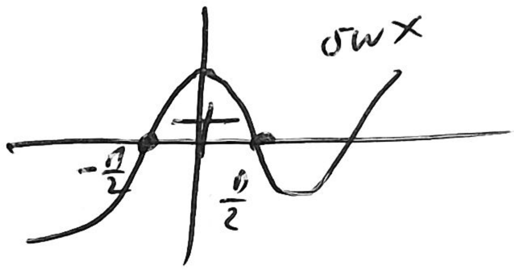
$$f\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = +\pi\,\eta\mu\tfrac{\pi}{2} - \pi = 0$$

$x = \frac{\pi}{2}$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \cancel{2}\,\tfrac{\pi}{\cancel{2}}\,\eta\mu\tfrac{\pi}{2} + \cancel{2\sigma\upsilon\nu\tfrac{\pi}{2}} - \pi = 0$$

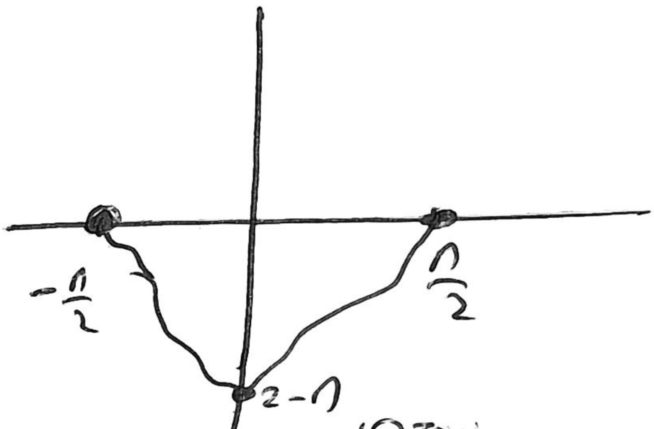
$$f'(x) = \cancel{2\eta\mu x} + 2x\,\sigma\upsilon\nu x - \cancel{2\eta\mu x}$$

$$f'(x) = 2x\,\sigma\upsilon\nu x \quad +$$



x		0	
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

$$f(0) = 2 - \pi$$



Όταν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

- f συνεχής
- $f \downarrow$
- $\Sigma T_f = [2-\pi, 0)$

Το $0 \in \Sigma T_f$ άρα όχι ρίζα εκ

Όταν

Όταν $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

- f συνεχής όχι ρίζα εκ
- $f \nearrow$ $\Sigma T_f = [2-\pi, 0)$

22. $x^4 = 4^x$ στο $(0, +\infty)$.

$\boxed{x=4}$ $\boxed{x=2}$

$$\ln x^4 = \ln 4^x$$

$$4\ln x = x\ln 4$$

$$4\ln x - \ln 4 \cdot x = 0$$

$$\boxed{f(x) = 4\ln x - \ln 4 \cdot x}$$ $D_f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{4}{x} - \ln 4$$

$$f'(x) = \frac{4 - \ln 4 \cdot x}{x}$$

$\rightarrow 4 - \ln 4\, x = 0$

$$4 = \ln 4\, x$$

$$\boxed{x = \frac{4}{\ln 4}}$$

x	0		$\frac{4}{\ln 4}$	
f'		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$		$\searrow$

Στο $\left(0, \frac{4}{\ln 4}\right)$ η $f \nearrow$
άρα έχει μοναδική ρίζα το 2.

Στο $\left(\frac{4}{\ln 4}, +\infty\right)$ η $f \searrow$
άρα έχει μοναδική ρίζ. [illegible]

Βασικές Έννοιες

1. Η f συνεχής στο x_0 $\Leftrightarrow$ $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$

2. Η f παραγωγίσιμη στο x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$

3. Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ όταν:

i) Συνεχής στο (α,β)

ii) $f(\alpha)=\lim_{x\to \alpha^+} f(x)$ και $f(\beta)=\lim_{x\to \beta^-} f(x)$

4. Η f παρ/μη στο $[\alpha,\beta]$

i) Παρ/μη στο (α,β)

ii) $\lim_{x\to \alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = l \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} = \mu \in \mathbb{R}$

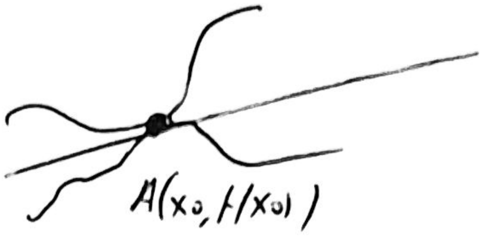
5. Η εφαπτομένη της C_f στο x_0 είναι

$$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

6. Η ευθεία $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$ εφάπτεται της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f'(x_0)=\alpha \\ f(x_0)=\alpha x_0+\beta \end{cases}$

7. κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g στο κοινό τους σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ή $A(x_0, g(x_0))$

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$



8. κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g (όχι σε κοινό σημείο)

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = g(\beta) - \beta g'(\beta) \end{cases}$$

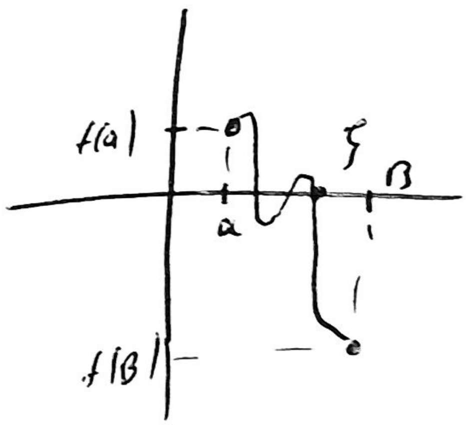
9. Αν η $f(x) \neq 0$ και συνεχής στο Δ $\Rightarrow$ $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ $\forall x \in \Delta$.

10. Η $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο ανάμεσα σε διαδοχικές ρίζες.

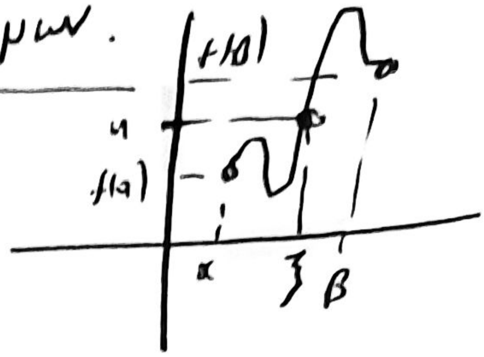
11. Bolzano

1. Η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
2. $f(\alpha) f(\beta) < 0$

Τότε $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f(\xi) = 0$



12. Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

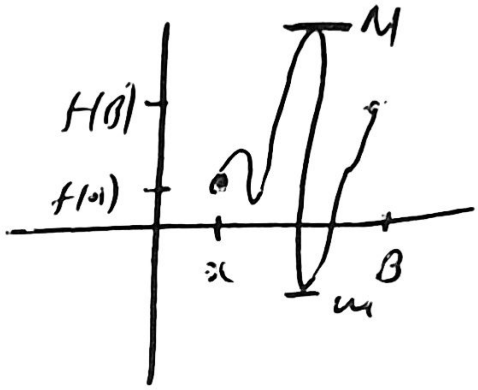


1. f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

2. $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Τότε $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω $f(\xi) = \eta$ όπου $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$

13. Θεώρημα Μέγιστης Ελάχιστης Τιμής

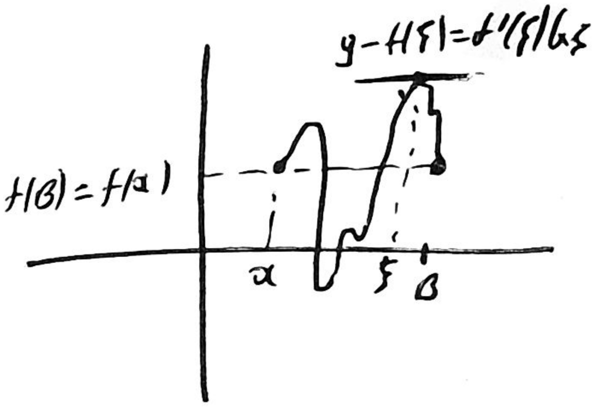


1. f συνεχής $[\alpha, \beta]$

Τότε $m \leq f(x) \leq M$

$\forall x \in [\alpha, \beta]$

14. Rolle



1. f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

2. f παρ/μη στο (α, β)

3. $f(\alpha) = f(\beta)$

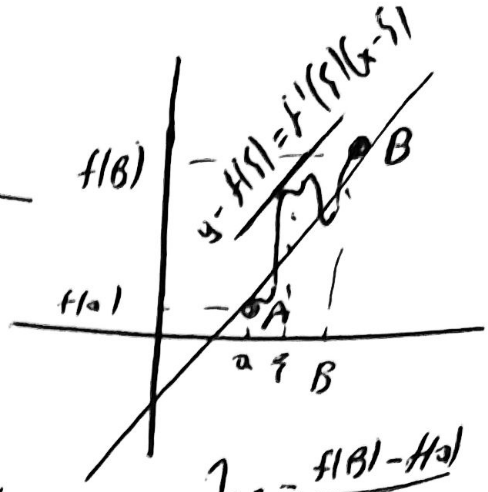
Τότε $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω $f'(\xi) = 0$.

15. Θεώρημα Μέσης Τιμής

1. f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

2. f παρ/μη στο (α, β)

Τότε $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τω $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$



$\lambda_{AB} = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

16. Όταν $f'(x) = 0$ $\forall x \in \Delta$ εσωτερικό

Τότε $f(x) = c$ σταθερή

17. Αν $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in \Delta$ εσωτερικό

Τότε $f(x) = g(x) + c$ $\forall x \in \Delta$.

18. Αν $f'(x) = f(x)$ $\forall x \in \Delta$ εσωτερικό

Τότε $f(x) = ce^{x}$

Επομενο μαθημα

Σελ 95

4

5

6

7

8

9

Παλιες

Νεα

Σελ 96

11

13

14 α β γ

15 α β.

17

18 α γ

19 α β.

20 α.