3

6 20

7

10 21

13 24

17 27

28

**4** (β) ΝΔΟ η εξίσωση $e^{x-2}=2-x$

έχει ρίζα $(1,2)$.

$$\underbrace{e^{x-2}-2+x}_{f(x)}=0$$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]$

  ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

- $f(1)=e^{-1}-1=\frac{1}{e}-1<0$

  $f(2)=1>0$

  Άρα $f(1)f(2)<0$.

Άρα Bolzano $\exists\, \xi \in (1,2)$

τ.ω. $f(\xi)=0$.

$$e^{\xi-2}-2+\xi=0$$

$$\boxed{e^{\xi-2}=2-\xi} \quad \xi\in(1,2)$$

# Σελ 227

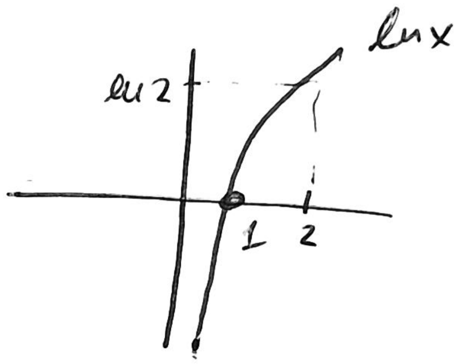
Νδο η εξισωση

**8)** δ) $\dfrac{e^x}{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-2}=1$

εχει ριζα στο $(1,2)$,

$$e^x(x-2)+(x-1)\ln x=(x-1)(x-2)$$

$$\underbrace{e^x(x-2)+(x-1)\ln x-(x-1)(x-2)}_{\varphi(x)}=0$$




$\varphi(1)=-e<0$

$\varphi(2)=\ln 2>0$

Αρα $\varphi(1)\cdot\varphi(2)<0$

$\varphi(x)$ συνεχης $[1,2]$ ως πρ. συνεχων συναρτ.

Απο Bolzano $\exists\ \xi\in(1,2)$

τ.ω $\varphi(\xi)=0$.

$$e^\xi(\xi-2)+(\xi-1)\ln\xi-(\xi-1)(\xi-2)=0.$$

$$\frac{e^\xi}{\xi-1}+\frac{\ln\xi}{\xi-2}=1$$

9 $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Νδο η εξίσωση $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{x^2 - x}$

έχει ρίζα στο $(0,1)$.

$$f(x)(x^2 - x) = 2e^x - 3$$

$$\underbrace{f(x)(x^2 - x) - 2e^x + 3}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής $[0,1]$ ως π.σ.σ

$$\left.\begin{aligned} g(0) &= 1 \\ g(1) &= 3 - 2e < 0 \end{aligned}\right\} g(0)g(1) < 0$$

Bolzano $\exists x_0 \in (0,1)$ τ.ω $g(x_0) = 0$.

$$f(x_0) = \frac{2e^{x_0} - 3}{x_0^2 - x_0}.$$

(11) (γ) Νδο $\ln x = \frac{2}{x}$ έχει

μοναδική ρίζα στο $(1, e)$

$$\underbrace{\ln x - \frac{2}{x}}_{f(x)} = 0$$

Η $f(x)$ συνεχής στο $[1, e]$ ως π.σ.σ

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -2 \\ f(e) = 1 - \frac{2}{e} > 0 \end{array}\right\} f(1)f(e) < 0$$

Bolzano $\exists\, \xi \in (1, e)$ τ.ω $f(\xi) = 0$

Μονοτονία $f(x)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ (+)
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{2}{x_1} < -\frac{2}{x_2}$

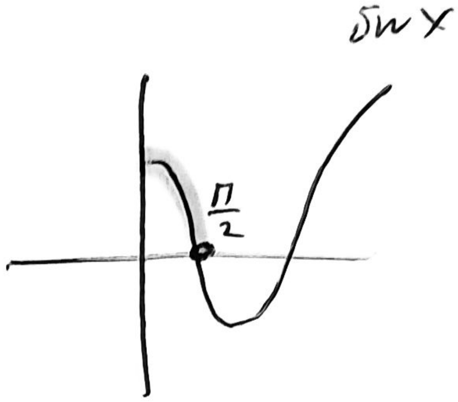
Άρα η $\xi$ μοναδική ρίζα $f \nearrow$

Νδο η εξίσωση

(δ). $e^x - 1 = συνx$

έχει μοναδική ρίζα.

στο $(0, \frac{π}{2})$




$$\underbrace{e^x - 1 - συνx}_{f(x)} = 0$$

Η f(x) συνεχής στο $[0, \frac{π}{2}]$ ως π.σ.σ

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(\frac{π}{2}) = e^{π/2} - 1 > 0 \end{array}\right\} f(0)f(\frac{π}{2}) < 0$$

Bolzano $\exists ξ \in (0, \frac{π}{2})$ τ.ω $f(ξ) = 0$.

Μονοτονία f(x)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \\ \bullet\ x_1 < x_2 \Rightarrow συνx_1 > συνx_2 \Rightarrow -συνx_1 < -συνx_2 \end{array}\right\} (+)$$

$f \nearrow$

Το ξ μοναδικό.

(13) Νδο η $f(x) = e^x + 2x - 3$ $\quad x \in [0, 1]$

Τεμνει τον $x'x$ ακριβως μια φορα

στο $x_0 \in (0, 1)$

Η $f(x)$ συνεχης στο $[0, 1]$ ως π.σ.σ.

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -2 \\ f(1) &= e + 2 - 3 > 0 \end{aligned}\right\} f(0) f(1) < 0$$

Bolzano $\exists x_0 \in (0, 1)$ τ.ω $f(x_0) = 0$

Μονοτονια $f(x)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ $\quad$ (+)
- $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$f \nearrow$$

15 $f: [0,1] \to R$ συνεχής, $\searrow$

$0 < f(x) < 1 \quad \forall x \in [0,1]$

Νδο η $C_f$ τέμνει την ευθ. $y=x$

Ακριβώς μια φορά στο $x_0 \in (0,1)$.

$\boxed{\text{Αρκεί νδο η εξίσωση } f(x)=x \text{ έχει μοναδική ρίζα στο } (0,1)}$

$$\underbrace{f(x)-x}_{g(x)}=0$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως π.σ.σ

$g(0) = f(0) > 0$

$g(1) = f(1) - 1 < 0$ $\qquad$ $f(1) < 1$, $f(1)-1<0$

$g(0)\,g(1) < 0$

Bolzano $\exists x_0 \in (0,1)$ τ.ω $g(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)=x_0$

Μονοτονία $g(x)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2$

$\Big\} \oplus \quad g \searrow$

Το $x_0$ μοναδικό.

# Σελ 229

**24** Νδο η εξίσωση $2x\eta\mu\frac{1}{x}=1$

έχει ρίζα στο $\left(0,\frac{2}{\pi}\right)$.

$$\underbrace{2x\eta\mu\frac{1}{x}-1}_{f(x)}=0$$

$$f\left(\frac{2}{\pi}\right)=2\cdot\frac{2}{\pi}\eta\mu\frac{1}{\frac{2}{\pi}}-1=\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi}>0.$$

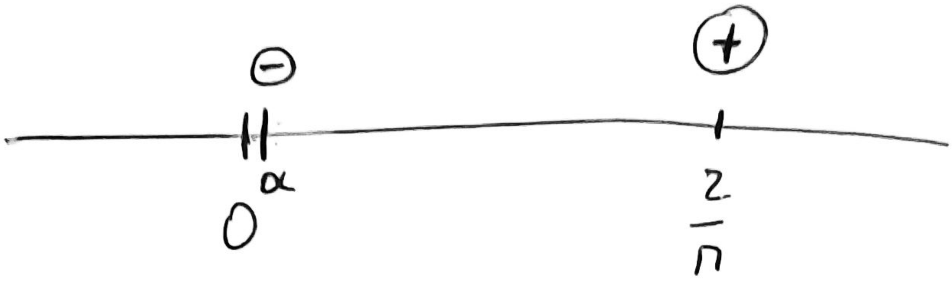
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2x\eta\mu\frac{1}{x}-1\right)=-1.$$

$$-1\le\eta\mu\frac{1}{x}\le 1$$

$$-2x\le 2x\eta\mu\frac{1}{x}\le 2x$$

$$\boxed{-1-2x\le 2x\eta\mu\frac{1}{x}\le 2x-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}-1-2x=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}2x-1=-1\end{array}\right\}$$




Υπερβολικο κοντα στο $0^+$

η $f(x)$ ειναι κοντα στο $-1$

αρα ειναι αρνητικη.

Αρα $\exists\, \alpha$ κοντα στο $0^+$

τ.ω $f(\alpha) < 0$

Αρα $f(\alpha) f\left(\frac{2}{\pi}\right) < 0$

Bolzano $\exists\, \xi \in \left(\alpha, \frac{2}{\pi}\right)$

αρα $\exists\, \xi \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ τ.ω $f(\xi) = 0$

$2\xi\, \eta\mu \frac{1}{\xi} = 1$

# Επομενο Μαθημα

**Σελ 226 - 227**

2 α

3

4 α

5

8 α β γ

10

11 α β

12

14

23

25

**28**

- $f$ συνεχή στο $[a, \beta]$.
- $f(a) \neq 0$

Νδο $\exists x_0 \in (a, \beta)$ τ.ω

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - a} = \frac{f(a)+f(\beta)}{\beta - a}.$$

$$\frac{f(x)}{x-a} = \frac{f(a)+f(\beta)}{\beta - a}$$

$$f(x)(\beta - a) = (f(a)+f(\beta))(x-a)$$

$$\underbrace{f(x)(\beta-a) - (f(a)+f(\beta))(x-a)}_{\varphi(x)} = 0$$

$\varphi(a) = f(a)(\beta - a)$

$\varphi(\beta) = f(\beta)(\beta-a) - (f(a)+f(\beta))(\beta - a) \iff$

$$\varphi(B) = (B-a)\left(f(B) - f(a) - f(B)\right)$$

$$\boxed{\varphi(B) = -f(a)(B-a)}$$

$$\boxed{\varphi(a) = f(a)(B-a)}$$

Άρα

$$\varphi(a)\varphi(B) = -\underset{+}{f^2(a)}\,\underset{+}{(B-a)^2} < 0$$

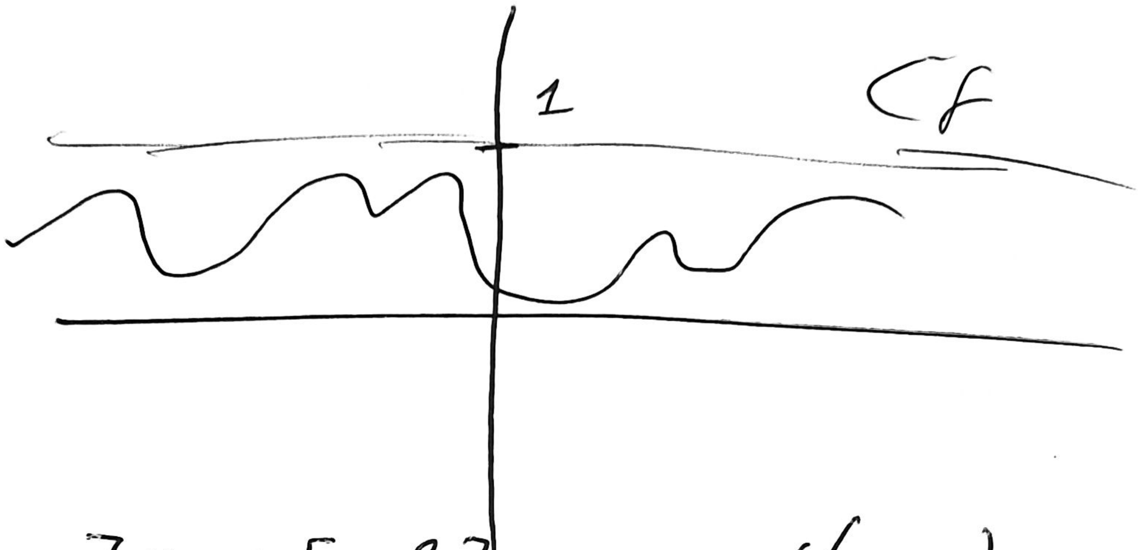
Bolzano $\exists x_0 \in (a, B)$

τ.ω $\varphi(x_0) = 0$.

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - a} = \frac{f(a)+f(B)}{B-a}.$$

(21) $f: R \to R$ συνεχής

$0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in R$.




Νδο $\exists x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ τ.ω $f(\eta\mu x_0) = \eta\mu x_0$.

$$f(\eta\mu x) = \eta\mu x$$

$$\underbrace{f(\eta\mu x) - \eta\mu x}_{\varphi(x)} = 0$$

$\varphi(0) = f(\eta\mu 0) - \eta\mu 0 = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$

$\varphi(\frac{\pi}{2}) = f(\eta\mu \frac{\pi}{2}) - \eta\mu \frac{\pi}{2} = f(1) - 1 \le 0$

$\cdot\, 0 \le f(1) \le 1 \Rightarrow f(1) - 1 \le 0$

Άρα $\varphi(0)\varphi(\frac{\pi}{2}) \le 0$

Αυτό σημαίνει ότι.

$\varphi(0)\varphi(\frac{\pi}{2})=0$ ή $\varphi(0)\varphi(\frac{\pi}{2})<0$

$\varphi(0)=0$ ή $\varphi(\frac{\pi}{2})=0$.

Bolzano

$\exists\, \xi \in (0, \frac{\pi}{2})$

τ.ω $\varphi(\xi)=0$.

Η ρίζα σαν δηλαδή

είναι ή το $0$ ή το $\frac{\pi}{2}$.

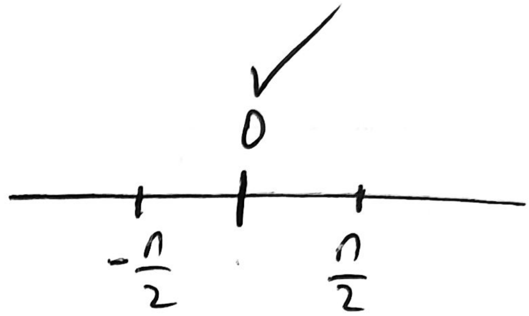
Άρα $\exists\, \xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

τ.ω $\varphi(\xi)=0$

1 **18**

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 0 \\ e^x-1, & x>0 \end{cases}.$$

(a)




Η $f$ συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, 0)$

και $(0, \frac{\pi}{2}]$ ως π.σ.σ

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ;

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} e^x - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$f(0)=0$ άρα αφού $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Τότε η $f$ συνεχής στο $0$

άρα συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$f(-\frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2})^2 = \frac{\pi^2}{4} > 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 = e^{\frac{\pi}{2}} - e^0 > 0$

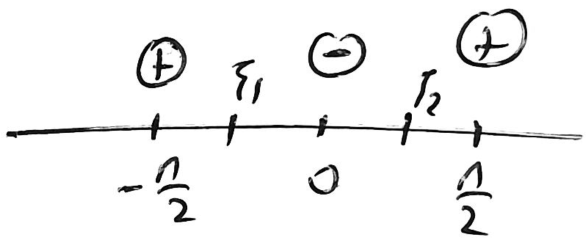
• $0 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^0 < e^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}} - e^0 > 0$

δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Bolzano στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(B) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ $\quad (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$f(x) - \sigma\upsilon\nu x = 0$

$\boxed{h(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x}$




$h(-\frac{\pi}{2}) = f(-\frac{\pi}{2}) - \sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} > 0$

$h(0) = f(0) - 1 = 0 - 1 < 0$

$h(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 > 0$

Αφού $h(-\frac{\pi}{2})h(0) < 0$ Bolzano $\exists\, \xi_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

τ.ω $h(\xi_1) = 0$.

Η $h(x)$ είναι συνεχής $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ και π.ο.σ.ο.

$h(0)h(\frac{\pi}{2}) < 0$ Bolzano $\exists \xi_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$

τ.ω $h(\xi_2) = 0$

Η $h$ συνεχ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ κι π.σ.σ.

Επ/ τωρα εχω δειξει οτι

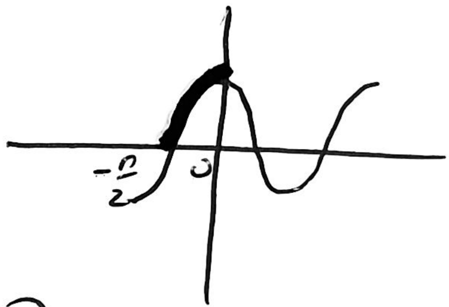
η εξισωση εχει τουλαχιστον

δυο ριζες.

$x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$

$h(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x$

$\boxed{h(x) = x^2 - \sigma\upsilon\nu x}$



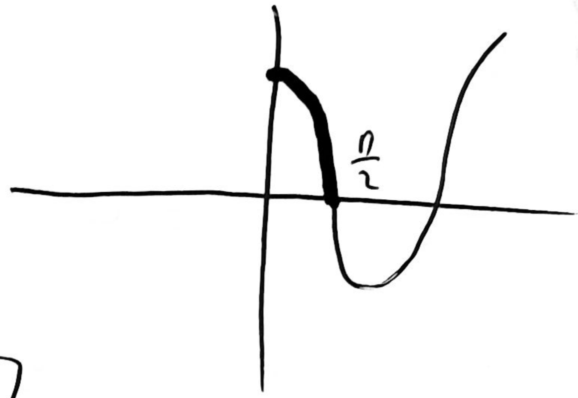

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$

(+)

• $x_1 < x_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 < \sigma\upsilon\nu x_2 \Rightarrow -\sigma\upsilon\nu x_1 > -\sigma\upsilon\nu x_2$

$h \downarrow$ αρα το $\xi_1$ μοναδικο.

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$




$h(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x$

$$\boxed{h(x) = e^x - 1 - \sigma\upsilon\nu x}$$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1$

$(+)$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2 \Rightarrow -\sigma\upsilon\nu x_1 < -\sigma\upsilon\nu x_2$

$h \nearrow$ άρα το $\xi_2$ μοναδικό.

**17** ⓐ

$$\sigma\upsilon\nu x = x(x - \eta\mu x)$$

$$(-\pi, 0) \quad \text{και} \quad (0, \pi).$$

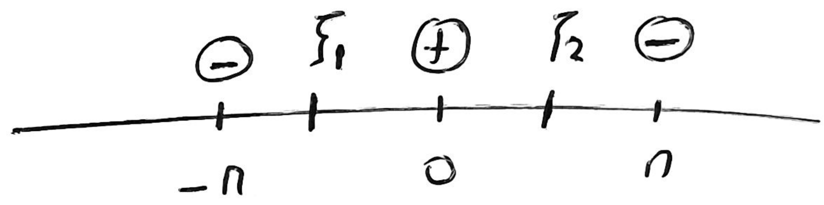
$$\sigma\upsilon\nu x - x(x - \eta\mu x) = 0$$

$$\boxed{f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x(x - \eta\mu x)}$$

$f(0) = 1 > 0$

$f(-\pi) = \sigma\upsilon\nu(-\pi) + \pi(-\pi - \overset{0}{\cancel{\eta\mu(-\pi)}}) = \sigma\upsilon\nu\pi - \pi^2 = -1 - \pi^2 < 0$

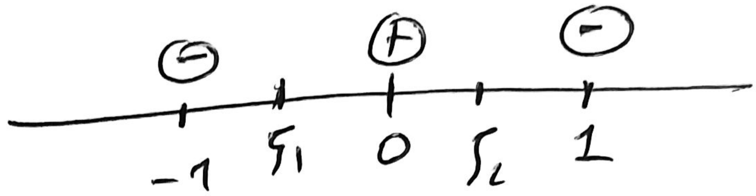
$f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi - \pi(\pi - \overset{0}{\cancel{\eta\mu\pi}}) = -1 - \pi^2 < 0$




$f(-\pi)f(0) < 0$ $\exists \xi_1 \in (-\pi, 0)$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

$f(0)f(\pi) < 0$ $\exists \xi_2 \in (0, \pi)$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$.

(13) $x^3-6x^2+3=0$ έχει δύο ρίζες στο $(-1,1)$




$$\boxed{f(x)=x^3-6x^2+3}$$

$f(-1)=-1-6+3=-4$

$f(0)=3$

$f(1)=-2$

$f(-1)f(0)<0$ Bolzano $\exists\, \xi_1\in(-1,0)$ τ.ω $f(\xi_1)=0$

$f(0)f(1)<0$ Bolzano $\exists\, \xi_2\in(0,1)$ τ.ω

$f(\xi_2)=0.$

(25)

$$e^{\frac{1}{x}} = x+2 \qquad (0,1)$$

$$\underbrace{e^{\frac{1}{x}} - x - 2}_{f(x)} = 0$$

$f(0) = e^{\frac{1}{0}} - 2$ ;

$f(1) = e - 3 < 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{+\infty} - 0 - 2 = +\infty - 2 = +\infty$$

$\exists\, \alpha > 0$ κοντά στο $0^+$ τ.ω $f(\alpha) > 0$

Άρα $f(\alpha) f(1) < 0$ Bolzano $\exists\, \kappa \in (\alpha, 1)$

τ.ω $f(\kappa) = 0$.

23

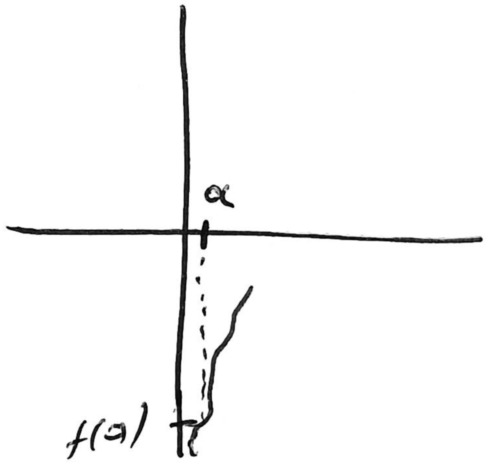
$\ln x = x^2 - 2x$ $\qquad (0,1)$.

$\underbrace{\ln x - x^2 + 2x}_{f(x)} = 0$

$f(0) = \ln 0 - 0^2 + 2 \cdot 0$ ;

εδω τι κανω;

$f(1) = 1$




$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

αρα $\exists\, \alpha > 0$ κοντα στο $0^+$

τ.ω $f(\alpha) < 0$

Αρα $f(\alpha) f(1) < 0$ Bolzano $\exists\, x_0 \in (\alpha, 1)$

τ.ω $f(x_0) = 0$ , $x_0 \in (\alpha, 1)$

$\Leftrightarrow \ln x_0 = x_0^2 - 2x_0$, δηλαδη στο $(0,1)$

39 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

$f \downarrow$

Νδο $\exists ! x_0 \in (a, 3a)$ $a > 0$

τ.ω $f(a) + f(3a) = 2f(x_0)$.

$f(a) + f(3a) = 2f(x)$

$$\underbrace{f(a) + f(3a) - 2f(x)}_{\varphi(x)} = 0$$

$\varphi(a) = f(a) + f(3a) - 2f(a) = f(3a) - f(a)$ $-$

$\bullet\ a < 3a \Rightarrow f(a) > f(3a)$

$f(3a) - f(a) < 0$

$\varphi(3a) = f(a) + f(3a) - 2f(3a) = f(a) - f(3a)$ $+$

Άρα $\varphi(a)\varphi(3a) < 0$ Bolzano $\exists x_0 \in (a, 3a)$

τ.ω $\varphi(x_0) = 0$.

$$\boxed{\varphi(x) = f(a) + f(3a) - 2f(x)}$$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow -2f(x_1) < -2f(x_2)$

$$f(a) + f(3a) - 2f(x_1) < f(a) + f(3a) - 2f(x_2)$$

$$\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$$

$$\varphi \nearrow$$

Το $x_0$ μοναδικό.

8 a $\dfrac{x^4+1}{x-1}+\dfrac{x^6+1}{x-2}=0$ $\qquad (1,2)$

$$\underbrace{(x^4+1)(x-2)+(x^6+1)(x-1)}_{\varphi(x)}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(1)=-2\\ \varphi(2)=65\end{array}\right\}\varphi(1)\varphi(2)<0$$

Bolzano $\exists\, \xi\in(1,2)$ τ.ω $\varphi(\xi)=0$.

$$\frac{\xi^4+1}{\xi-1}+\frac{\xi^6+1}{\xi-2}=0.$$

(14) $f(x)=e^x$    Νδο οι $C_f, C_g$

$g(x)=\frac{1}{x}$    έχουν ένα ακριβώς

σημείο στο $(\frac{1}{2}, \ln 2)$

Αρκεί νδο $\exists!\, \xi \in \cancel{(\alpha,\beta)}\ (\frac{1}{2}, \ln 2)$.

τ.ω $f(\xi)=g(\xi)$.

$\boxed{\text{Αρκεί νδο η εξίσωση } f(x)=g(x) \text{ έχει ακριβώς μια ρίζα στο } (\tfrac{1}{2}, \ln 2)}$

$$e^x=\frac{1}{x} \iff \underbrace{e^x-\frac{1}{x}}_{h(x)}=0$$

$$h\left(\tfrac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}-2<0$$

$$h(\ln 2)=e^{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=2-\frac{1}{\ln 2}=\frac{2\ln 2-1}{\ln 2}$$

• $\cancel{2<e} \Rightarrow \cancel{\ln 2<\ln e} \Rightarrow \cancel{\ln 2<1}$

$\cancel{1<\frac{1}{\ln 2}}$

• $\cancel{2<e^2} \Rightarrow \cancel{\ln 2<}$

$$=\frac{\ln 4-\ln e}{\ln 2}=\frac{\overset{(+)}{\ln\frac{4}{e}}}{\underset{(+)}{\ln 2}}>0$$

Άρα $h(\frac{1}{2}) \cdot h(\ln 2) < 0$ Bolzano $\exists\, \xi \in (\frac{1}{2}, \ln 2)$

$h(x) = e^x - \frac{1}{x}$ τ.ω $h(\xi) = 0$

$\Rightarrow f(\xi) = g(\xi)$.

- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$

$\underbrace{\hspace{6cm}}_{+}$

$h \nearrow$

άρα το $\xi \in (\frac{1}{2}, \ln 2)$

μοναδικό.

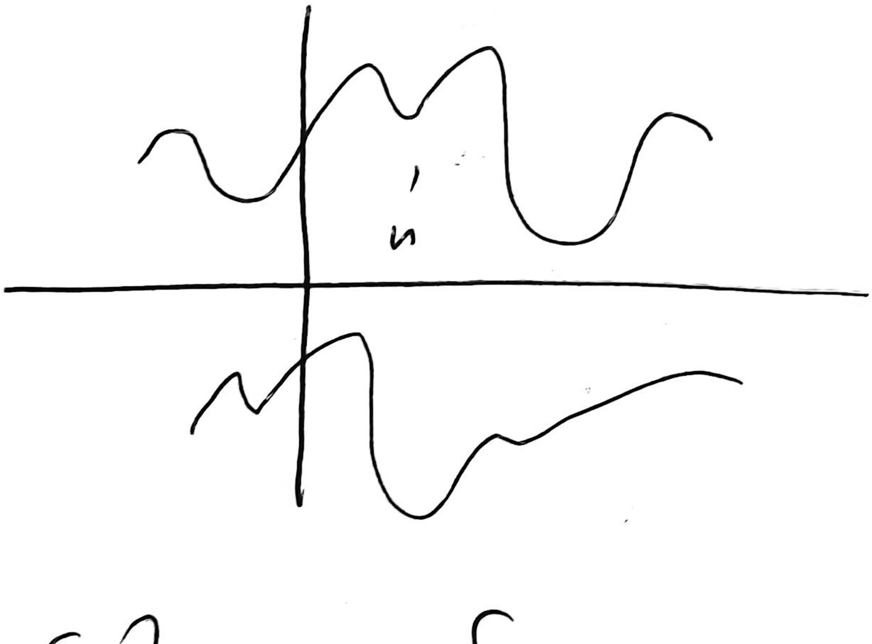
# Συνεπεια Bolzano

1. Αν η $f(x)$ συνεχης συναρτηση στο $A$

και $f(x) \neq 0$ $\forall x \in A$

Τοτε. $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$\forall x \in A$.

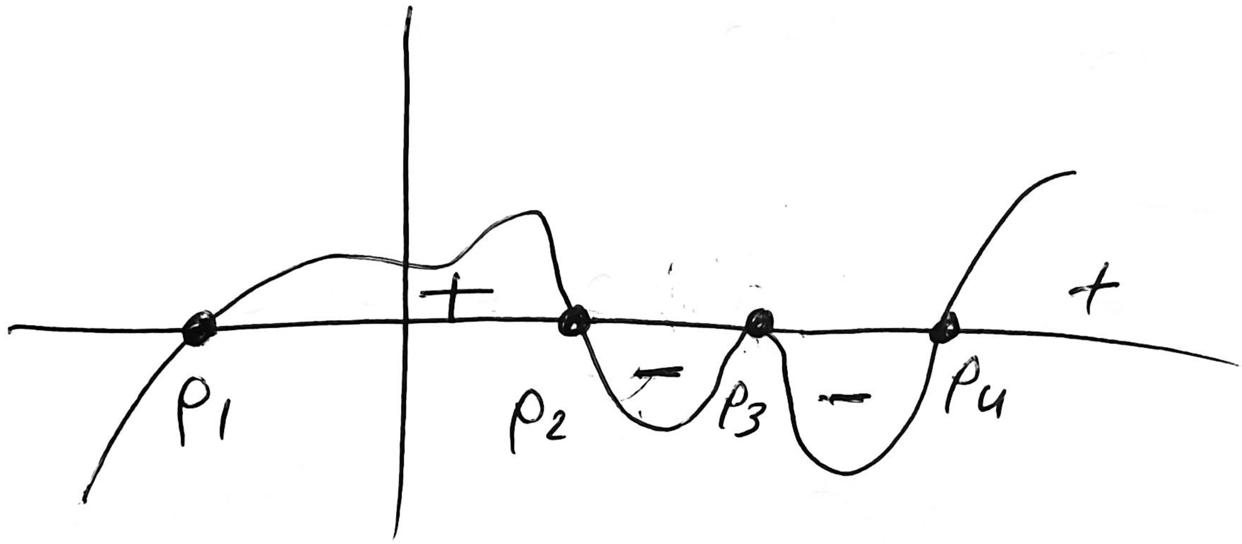



δηλαδη διατηρει προσημο.

2. Ενδος διαδοχικων ριζων

η f(x) η οποια ειναι συνεχης

διατηρει προσημο.



# Σελ 242

(4) • $f$ συνεχής.

• $f(x) \neq 0$

Ν.δ.ο $f(x) > 0$ ;

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 3.$$

Αφού $f$ συνεχής και $f(x) \neq 0$

$\Rightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

Χρειάζομαι ΕΝΑΝ αντιπρόσωπο.

Θεωρώ βοηθητική συνάρτηση.

$g(x) = \frac{f(x)-2}{x-1}$ άρα $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$.

$$\boxed{g(x)(x-1) + 2 = f(x)}$$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x)(x-1) + 2$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 3\cdot(1-1)+2$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

Αφού $f$ συνεχής $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = 2$.

Άρα $f(x) > 0$.

**6)** $f$ συνεχ $\left.\begin{array}{l} \\ f(x) \neq 0 \end{array}\right\}$ $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Βρει $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 f(0) + x - 1}{x^2 f(1) + 1} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 f(0)}{x^2 f(1)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(0)}{f(1)} \cdot x = \overset{+}{\frac{f(0)}{f(1)}} \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$\cancel{f(0)}$

Αφου $f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

αυτο σημαινει οτι το $f(0)$ και το $f(1)$ ειναι ομοσημοι αρα $\dfrac{f(0)}{f(1)} > 0$

8

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

$f(x) \neq 0$

$\Big\}\ f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ν.δ.ο η $\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{e^x}{f(x)}$

έχει ρίζα στο $(-1, 1)$.

$$\underbrace{x f(x) - e^x (x^2-1)}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[-1, 1]$ ως π.σ.σ

$g(-1) = -f(-1) - e^{-1}(1-1) = -f(-1)$

$g(1) = f(1)$

Άρα

$g(-1)\,g(1) = -f(1)f(-1) < 0$ ①

Αφού $f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ άρα

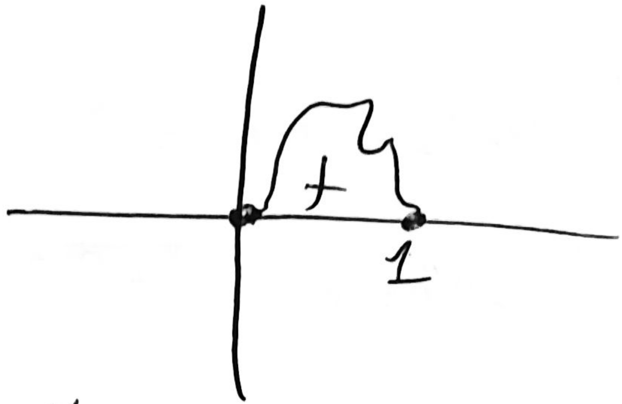
$f(1)$ και $f(-1)$ ομόσημοι άρα $f(1)f(-1) > 0$

## 10

$f$ συνεχής

$f(\frac{1}{2})>0$

| $x$ | $0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$ |
| --- | --- |
| $f(x)$ | $0 \quad + \quad 0$ |




(α) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

γιατί η $f(x)>0$ στο $0^+$

(β) $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{-\frac{1}{f(x)}} = e^{-(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$.

## 11

(β) $f(x) = ημx + x$

$\longrightarrow$ $f(x)=0$

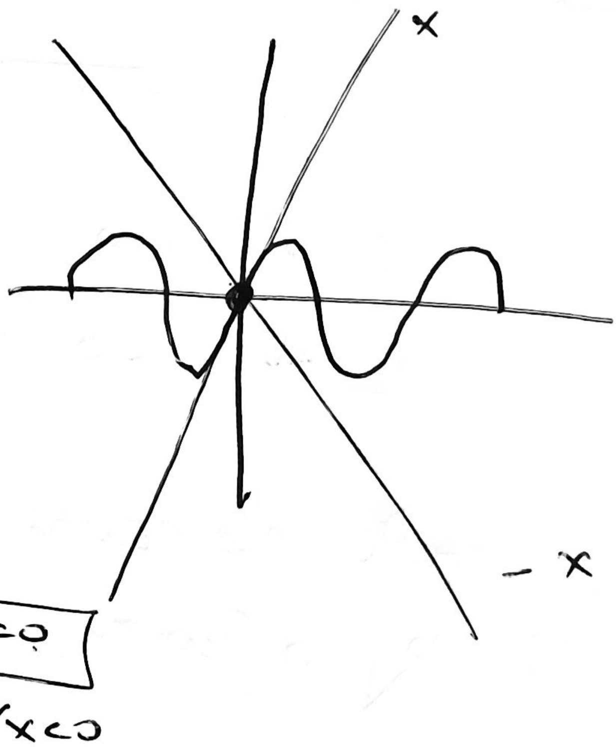
$ημx + x = 0$

$ημx = -x$

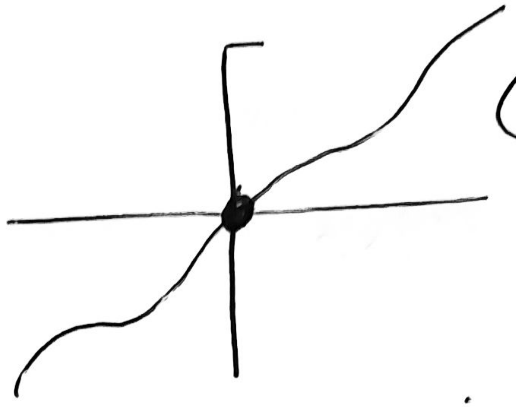
Μοναδική λύση $\boxed{x=0}$

γιατί $ημx < -x \quad \forall x<0$

$ημx > -x \quad \forall x>0$



| $x$ | $0$ $\quad \pi$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $-$ $\quad 0$ $\quad +$ |



$C_f$ ;

$f(\pi) = \eta\mu\pi + \pi = \pi$

$f(-\pi) = \eta\mu(-\pi) - \pi = -\pi$

γ. $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$

$D_f = \mathbb{R}$

$\rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} + x = 0$

$\sqrt{x^2+1} = -x$

1. Αν $x > 0$ τότε αδύνατη.
2. Αν $x < 0$ τότε $\sqrt{x^2+1} = -x$

$\cancel{x^2} + 1 = \cancel{x^2}$

$1 = 0$ αδύνατη

Σε κάθε περίπτωση

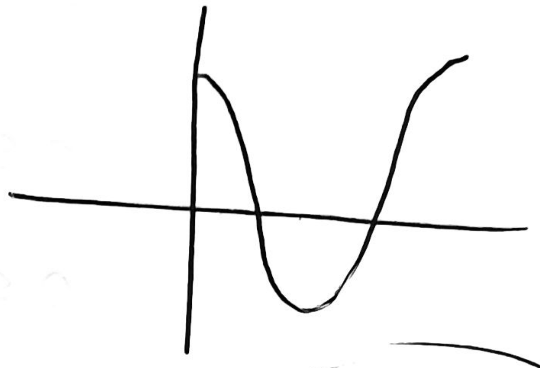
$f(x) = 0$ αδύνατη $\Rightarrow \underline{\underline{f(x) \neq 0}}$

και συνεχής άρα $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(2024) = \sqrt{2024^2 + 1} + 2024 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) > 0}}$

**12** ⓐ $f(x) = \sqrt{2}\,συν x + 1 \qquad x \in [0, \pi]$

$\longrightarrow f(x) = 0$



$\sqrt{2}\,συν x + 1 = 0$

$συν x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$συν x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$συν \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$συν x = -συν \dfrac{\pi}{4}$

$συν x = συν\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$x = 2κ\pi + \pi - \dfrac{\pi}{4}$ ή $x = 2κ\pi - \pi + \dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{x = 2κ\pi + \dfrac{3\pi}{4}}$ $\quad κ \in \mathbb{Z} \quad$ $\boxed{x = 2κ\pi - \dfrac{3\pi}{4}}$

$0 \le x \le \pi$

$0 \le 2κ\pi + \dfrac{3\pi}{4} \le \pi$

$0 \le 2κ + \dfrac{3}{4} \le 1$

$0 \le 8κ + 3 \le 4$

$-3 \le 8κ \le 1$

$-\dfrac{3}{8} \le κ \le \dfrac{1}{8}$

~~$κ = -1 \Rightarrow x = -2\pi + \dfrac{3\pi}{4}$~~

~~$x = -\dfrac{8\pi + 3\pi}{4} = -\dfrac{5\pi}{4}$~~

~~$κ = 0 \Rightarrow \dfrac{3\pi}{4}$~~

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad \dfrac{1}{2} \quad 1$

Για $κ = 0$ $\quad x = \dfrac{3\pi}{4}$

$-1 \quad \dfrac{3}{8} \quad 0 \quad \dfrac{1}{8} \quad 1$

$$0 \le x \le \pi$$

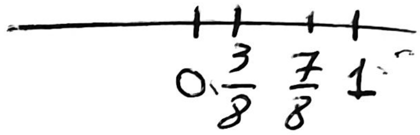
$$0 \le 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \le \pi$$

$$0 \le 2k - \frac{3}{4} \le 1$$

$$0 \le 8k - 3 \le 4$$

$$3 \le 8k \le 7$$

$$\frac{3}{8} \le k \le \frac{7}{8}$$




$k \in \mathbb{Z}$.

δεν έχω ρίζα.

| $x$ | $0$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $\emptyset$ | $-$ |

$$f(0) = \sqrt{2}\,\text{συν}\,0 + 1 = \sqrt{2} + 1$$

$$f(\pi) = \sqrt{2}\,\text{συν}\,\pi + 1$$

$$= -\sqrt{2} + 1$$

$$= 1 - \sqrt{2}.$$

δ) $f(x) = ημx + συνx \quad , \quad x \in [0, 2π]$

$\longrightarrow f(x) = 0$

| $x$ | $0$ | | $\frac{3π}{4}$ | | $π$ | $\frac{7π}{4}$ | | $2π$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $0$ | $+$ | |

$ημx + συνx = 0$

$συνx = -ημx$

$f(0) = 1$

$συνx = ημ(-x)$

$f(2π) = 1$

$συνx = συν\left(\frac{π}{2} - (-x)\right)$

$f(π) = ημπ + συνπ = -1$

$συνx = συν\left(\frac{π}{2} + x\right)$

$\cancel{x} = 2κπ + \frac{π}{2} + \cancel{x}$ ή $x = 2κπ - \frac{π}{2} - x$

αδύνατη

$2x = 2κπ - \frac{π}{2}$

$\boxed{x = κπ - \frac{π}{4}}$

$0 \le x \le 2π$

$0 \le κπ - \frac{π}{4} \le 2π$

$0 \le κ - \frac{1}{4} \le 2$

$0 \le 4κ - 1 \le 8$

$1 \le 4κ \le 9$

$\frac{1}{4} \le κ \le \frac{9}{4}$

$0 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{9}{4}$

Για $κ=1 \Rightarrow x = π - \frac{π}{4}$

Για $κ=2$ $\frac{7π}{4}$ $\qquad x = \frac{3π}{4}$

## 13

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

$|f(x)| = x^2 + 5$

(α) ΝΔΟ $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Rightarrow\ & |f(x)| = 0 \\ & x^2 + 5 = 0 \\ & \text{Αδύνατη.} \end{aligned}\right\} \text{ Άρα } f(x) \neq 0.$$

(β) Αν $f(0) = 5$ βρείτε την $f(x)$.

$|f(x)| = x^2 + 5$

Αφού $f(x)$ συνεχής και $f(x) \neq 0$.

$\Rightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

και επειδή $f(0) = 5 \Rightarrow f(x) > 0$.

$f(x) = x^2 + 5$.

14 (δ) $f^2(x) = 2 - ημx$ $f(0) = \sqrt{2}$

Προσπαθώ να φτιάξω τετράγωνα

$f^2(x) = \sqrt{2 - ημx}^{\,2}$

$|f(x)| = |\sqrt{2-ημx}|$

$|f(x)| = \sqrt{2-ημx}$

Ρίζες $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$\sqrt{2-ημx} = 0$

$2 - ημx = 0$

$2 = ημx$

Αδύνατη

Άρα $f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(x) = \sqrt{2-ημx}$,

$f(x) > 0$

# Επομενο Μαθημα

Τριτη 6:30 - 8:30

---

Σελ 228 - 229

16

19

20

26

27

29

30

32

33

Σελ 242

2

3

5

7

9

11

12

# Σελ 228

(16)

Ν.δ.ο η εξίσωση $3x^4 = x+1$ έχει

δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

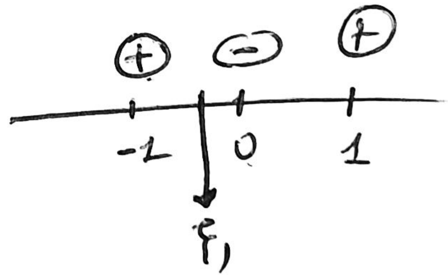
$$3x^4 - x - 1 = 0$$

$$\boxed{f(x) = 3x^4 - x - 1\,.}$$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-1, 1)$

ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$f(-1) = 3 > 0$




$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 1 > 0$

Αφού $f(-1)f(0) < 0$ Bolzano $\exists\, \xi_1 \in (-1, 0)$

τ.ω $f(\xi_1) = 0$

Αφού $f(0)f(1) < 0$ Bolzano $\exists\, \xi_2 \in (0, 1)$ τ.ω $f(\xi_2) = 0$

(19) $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} - x, & x \leq 1 \\ \ln x + x - 1, & x > 1. \end{cases}$

Νδο η εξίσωση $f(x)=1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,2)$.

Είναι η $f$ συνεχής στο 1;

$f(1) = 0$

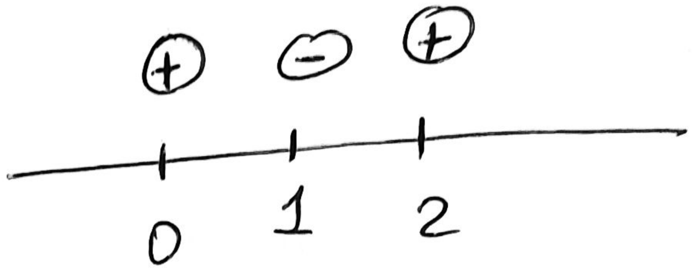
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} e^{1-x} - x = 0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \ln x + x - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

Άρα $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$

άρα η $f$ συνεχής στο 1.

$f(x) = 1$

$f(x) - 1 = 0$




$\boxed{g(x) = f(x) - 1}$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[0,2]$ ως πρ. συνεχ. συναρτ.

$g(0) = f(0) - 1 = e - 1 > 0$

$g(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$

$g(2) = f(2) - 1 = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2 > 0$

Αφού $g(0)\,g(1) < 0$ Bolzano $\exists\, \xi_1 \in (0,1)$

τ.ω $g(\xi_1) = 0$. $\Rightarrow f(\xi_1) - 1 = 0$

$f(\xi_1) = 1$

Αφού $g(1)\,g(2) < 0$ Bolzano $\exists\, \xi_2 \in (1,2)$

τ.ω $g(\xi_2) = 0$ $\Rightarrow f(\xi_2) = 1$.

$x \in (0,1)$

$g(x) = H(x) - 1.$

$$\boxed{g(x) = e^{1-x} - x - 1.}$$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2$

$$\boxed{e^{1-x_1} > e^{1-x_2}}$$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow \boxed{-x_1 - 1 > -x_2 - 1}$

$$\underbrace{e^{1-x_1} - x_1 - 1}_{g(x_1)} > \underbrace{e^{1-x_2} - x_2 - 1}_{g(x_2)}$$

$g \downarrow$

άρα το $\xi_1$ μοναδικό.

**20** $f: [1,2] \to \mathbb{R}$, συνεχής.

$1 \le f(x) \le 2 \quad \forall x \in [1,2]$.

Ν.δ.ο $\exists x_0 \in [1,2]$ τ.ω $f(x_0) = x_0$

Αρκεί ν.δ.ο η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $[1,2]$

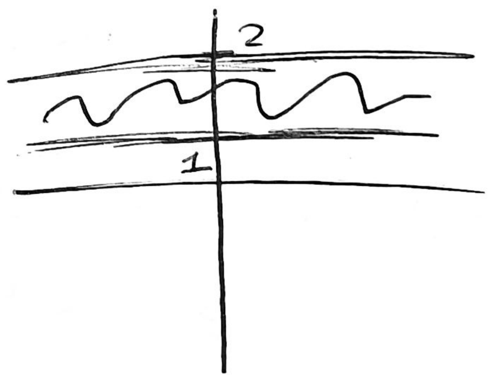
$$f(x) = x \Rightarrow f(x) - x = 0$$

$$\boxed{g(x) = f(x) - x}$$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως π.σ.σ

$g(1) = f(1) - 1 \geq 0$

$g(2) = f(2) - 2 \leq 0$




Επειδή $1 \le f(1) \le 2 \Rightarrow f(1) - 1 \geq 0$

Επειδή $1 \le f(2) \le 2 \Rightarrow f(2) - 2 \le 0$

Άρα $g(1)g(2) \le 0$ άρα Bolzano $\exists x_0 \in [1,2]$ τ.ω $g(x_0) = 0$.

**26** $f: [0,1] \to \mathbb{R}$,

$4 < f(x) < 5 \quad \forall x \in [0,1]$,

Νδο η $f^2(x) - 5f(x) + 4x = 0$.

έχει ρίζα $(0,1)$.

$$\boxed{g(x) = f^2(x) - 5f(x) + 4x}$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως π.σ.σ.

$$g(0) = f^2(0) - 5f(0) = \overset{+}{f(0)}\,(\overset{-}{f(0) - 5}) < 0$$

$$g(1) = f^2(1) - 5f(1) + 4 = (\overset{+}{f(1) - 4})(\overset{+}{f(1) - 1}) > 0.$$

$\rightarrow \quad 4 < f(0) < 5 \quad \Rightarrow f(0) - 5 < 0$

$\rightarrow \quad 4 < f(1) < 5 \quad \Rightarrow f(1) - 4 > 0$

$f(1) > 4 \quad \Rightarrow f(1) > 1$

$f(1) - 1 > 0$

Άρα $g(0)g(1) < 0$ Bolzano $\exists \xi \in (0,1)$

τ.ω $g(\xi) = 0$

**27** Νδο η εξισωση $x^3-(\kappa\lambda-2)x+1=0$ εχει τουλαχιστον μια ριζα στο $(-1,0)$ οταν $\kappa+\lambda=2$

$$\underbrace{x^3-(\kappa\lambda-2)x+1}_{f(x)}=0$$

Η $f(x)$ ειναι συνεχη στο $[-1,0]$ ως π.σ.σ

$f(-1)=-1+\kappa\lambda-2+1 \quad =\kappa\lambda-2 \quad =\kappa(2-\kappa)-2$

$=2\kappa-\kappa^2-2$

$=-\kappa^2+2\kappa-2$

$\Delta<0$

$<0$

$f(0)=1>0$.

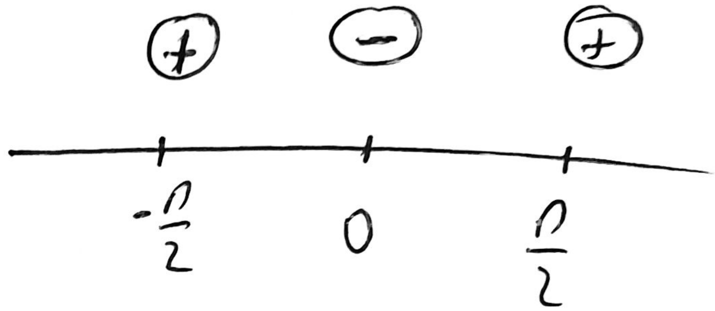
$\boxed{\text{Αφου } \kappa+\lambda=2 \Rightarrow \lambda=2-\kappa.}$

Αρα $f(-1)f(0)<0$ Bolzano

$\exists\, \xi\in(-1,0)$ τ.ω $f(\xi)=0$.

**29** Νδο η εξισωση $x εφx = 1$

εχει δυο τουλ. ριζες στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$




$x \cdot εφx = 1$

$x \cdot \frac{ημx}{συνx} = 1$

$xημx = συνx$

$\underbrace{xημx - συνx}_{f(x)} = 0$

Η $f(x)$ συνεχ. στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ως π.σ.σ

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} ημ\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cancel{συν\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2} ημ\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$

$f(0) = -1 < 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} ημ\frac{\pi}{2} - συν\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)f(0) < 0$ Bolzano $\exists ξ_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ τ.ω $f(ξ_1) = 0$

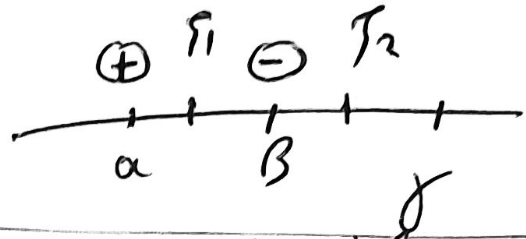
$f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ Bolzano $\exists ξ_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τ.ω $f(ξ_2) = 0$

$\alpha<\beta<\gamma$

**30**

$$(x-\beta)(x-\gamma)+2(x-\alpha)(x-\gamma)+3(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

(a).




$$\boxed{f(x)=(x-\beta)(x-\gamma)+2(x-\alpha)(x-\gamma)+3(x-\alpha)(x-\beta)}$$

$$f(\alpha)=(\overset{\ominus}{\alpha-\beta})(\overset{\ominus}{\alpha-\gamma})>0$$

$$f(\beta)=2(\overset{\oplus}{\beta-\alpha})(\overset{\ominus}{\beta-\gamma})<0$$

$$f(\gamma)=3(\overset{\oplus}{\gamma-\alpha})(\overset{\oplus}{\gamma-\beta})>0$$

Άρα $f(\alpha)f(\beta)<0$ Bolzano $\exists\,\xi_1\in(\alpha,\beta)$

τ.ω $f(\xi_1)=0$

και $f(\beta)f(\gamma)<0$ Bolzano $\exists\,\xi_2\in(\alpha,\beta)$

τ.ω $f(\xi_2)=0$.

B. Η $H(x)$ είναι 2ου βαθμού

άρα έχει το πολύ

δύο ρίζες.

Συνεπώς αφού έχω δείξει

ότι έχει τουλάχιστον δύο

Άρα έχει ακριβώς δύο.

**32** $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

(α) νδο η $f(x) = x$ έχει ρίζα στο $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

$f(x) - x = 0$

$\boxed{g(x) = f(x) - x}$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = \ln\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}-1}\right) - \frac{3}{2} =$

$= \ln\left(\frac{\frac{5}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right) - \frac{3}{2} = \ln 5 - \frac{3}{2} > 0.$

Έστω $\ln 5 < \frac{3}{2} \iff 5 < e^{3/2}$

$5 < \sqrt{e^3}$

$5 < \sqrt{e^2 e}$

$5 < e\sqrt{e}$

$25 < e^2 e$

$25 < e^3$ Άτοπο

Άρα $\ln 5 > \frac{3}{2}$

$\ln 5 - \frac{3}{2} > 0$

$g(2) = f(2) - 2 = \ln 3 - 2 < 0$

32

$3 < e^2$

$\ln 3 < \ln e^2$

$\ln 3 < 2$

$\ln 3 - 2 < 0$

Άρα $g\left(\frac{3}{2}\right) g(2) < 0$

Bolzano $\exists \xi \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ τ.ω $g(\xi) = 0$

$\Downarrow$

$f(\xi) - \xi = 0$

$f(\xi) = \xi$

Αυτό ισχύει!

(B) Αρκεί νδο $g(-\xi) = 0$

$f(-\xi) - (-\xi) = 0$

$-f(\xi) + \xi = 0$

f περιττή $f(\xi) = \xi$ που ισχύει,

$\boxed{f \text{ περιττή} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)}$.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{-(x+1)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}$$

$$= -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) =$$

$$= -f(x)$$

$f$ περιττη.

1 33 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχης.

$f(0) < 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Νδο $\exists x_0 < 0$ τ.ω $f(x_0) = e^{x_0} + x_0 \eta\mu \frac{1}{x_0}$

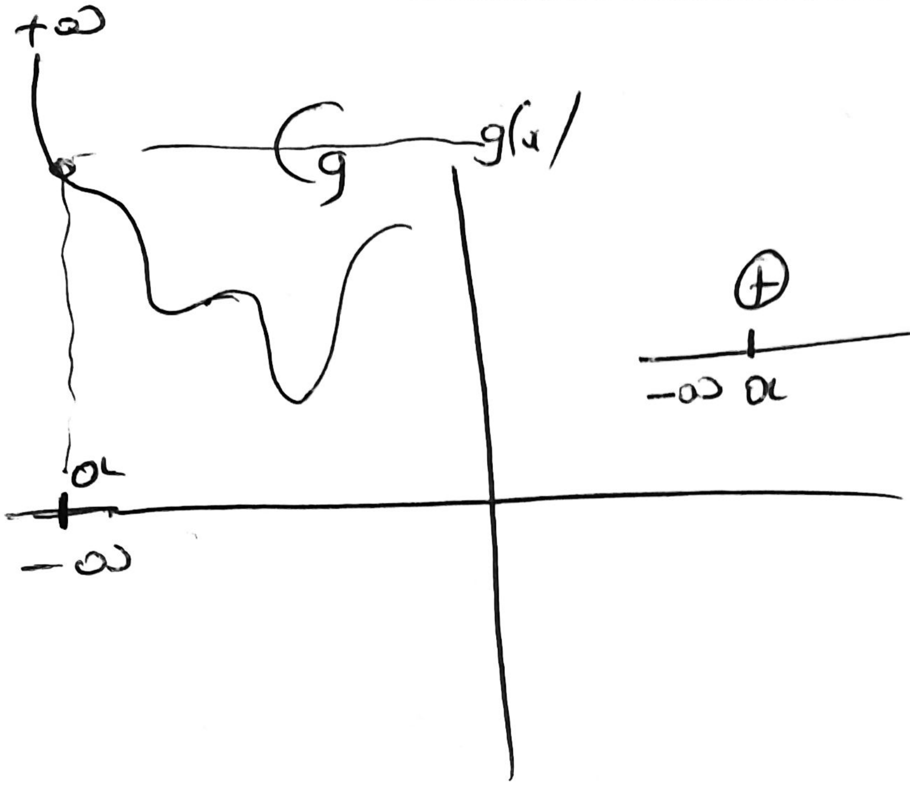
Αρκει νδο η εξισωση $f(x) = e^{x} + x\eta\mu\frac{1}{x}$ εχει τουλαχιστον μια αρνητικη ριζα

$$\underbrace{f(x) - e^{x} - x\eta\mu\frac{1}{x}}_{g(x)} = 0$$


$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \left( f(x) - e^{x} - x\eta\mu\frac{1}{x} \right) = +\infty - 0 - 1$$
$$= +\infty.$$

$$\to \lim_{x \to -\infty} x\eta\mu\frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \cancel{x} \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cancel{\frac{1}{x}} = 1$$

Αρα κοντα στο $-\infty$ η $g(x)$ παει στο $+\infty$





Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ $\exists\, \alpha<0$ κοντά

στο $-\infty$ τ.ω. $g(\alpha)>0$.

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-}\left(f(x)-e^x-\cancel{x\eta\mu\frac{1}{x}}^{\,0}\right) = f(0)-1<0$$

$$-1\le \eta\mu\frac{1}{x}\le 1$$

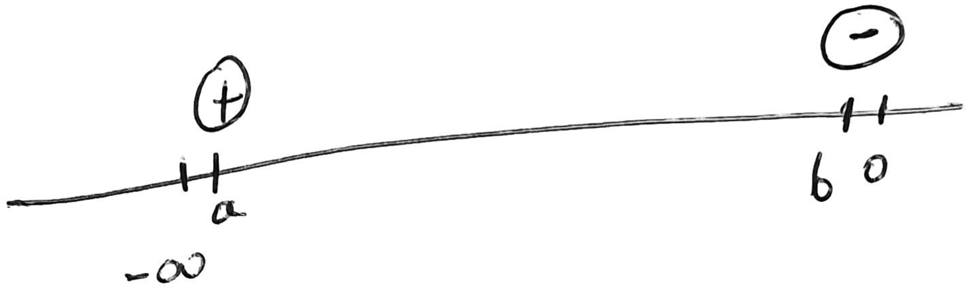
$$\boxed{-x\ge x\eta\mu\frac{1}{x}\ge x}$$

$\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{x\to0^-} -x=0 \\ \cdot \lim\limits_{x\to0^+} x=0 \end{array}\right\}$ Από Κ.Π. $\lim\limits_{x\to0^-} x\eta\mu\frac{1}{x}=0$

Άρα $\lim_{x \to 0^-} g(x) < 0$

άρα $\exists\, b < 0$ ... κοντά στο $0^-$

τ.ω $g(b) < 0$.




Η $g(x)$ συνεχής στο $[a, b]$ ως π.σ.σ

$g(a)\, g(b) < 0$

Bolzano $\exists\, x_0 \in (a, b)$ τ.ω

$g(x_0) = 0$

# Σελ 242

(2)

- $f(1)=2$
- $f$ συνεχ.
- $f(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)>0$ ή $f(x)<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Αφού $f(1)=2$ τότε $f(x)>0$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$$

πρέπει $f(x)>0$ που ισχύει

Άρα $D_g=\mathbb{R}$.

3

$f(1) = 2$

$g(1) = -3$

$f, g$ συνεχείς.

$f(x) \cdot g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

νδο $f(x) \cdot g(x) < 0$,

Θέτω $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

άρα $h(x) \neq 0$ και $h(x)$ συνεχής
στο Π.Ο.Ο.

$\Rightarrow h(x) > 0$ ή $h(x) < 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$.

$h(1) = f(1) g(1) = 2(-3) = -6$

$h(x) < 0 \Rightarrow f(x) g(x) < 0$.

(5) $f: R \to R$ συνεχής

$f(x) \neq 0$

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = -2$

$f(1) = -2$.

(α) $\lim_{x\to 1} \frac{|f(x)|-2}{f^2(x)+2f(x)} \underset{\substack{x\to 1 \\ t\to -2}}{\overset{f(x)=t}{=}} \lim_{t\to -2} \frac{|t|-2}{t^2+2t} \overset{(*)}{=}$

Αφού $f(x)\neq 0$ και συνεχής $f(x)>0$ ή $f(x)<0$ $\forall x \in R$.

Αφού $f(1)=-2$

$\Rightarrow f(x)<0 \ \forall x \in R$

$\overset{(*)}{=} \lim_{t\to -2} \frac{-t-2}{t^2+2t} = \lim_{t\to -2} \frac{-\cancel{(t+2)}}{t\cancel{(t+2)}}$

$= \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

(β). $\lim_{x\to -\infty} \left[ (f(2)-1)\, x^3 + 5x - 1 \right] = \lim_{x\to -\infty} (f(2)-1)x^3$

$= (f(2)-1)(-\infty) = +\infty$

**7** · $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχ.

· $f(x) \neq 0$

Νδο η εξίσωση $x f(x) = x^2 - 4$ έχει μια τουλ. λύση στο $(-2, 2)$.

$$\underbrace{x f(x) - x^2 + 4}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ είναι συνεχ. στο $[-2, 2]$ ως π.σ.σ

$g(-2) = -2 f(-2)$

$g(2) = 2 f(2)$.

Άρα

$$g(-2)\, g(2) = -4 \underbrace{f(-2) f(2)}_{+} < 0$$

Αφού $f(x) \neq 0$ και συνεχ.

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Το $f(-2)$ και $f(2)$

είναι ομόσημοι άρα $f(-2)f(2)>0$

Άρα από Bolzano

$\exists\ \xi \in (-2,2)$ τ.ω

$g(\xi)=0$:

$\xi f(\xi)=\xi^2-4$

**9**

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής
- $f(2) = 1$
- 1, 4 διαδοχικές ρίζες της $f(x)=0$.

Ψάχνω το $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( f(3)x^3 - 2x + 3 \right)$

$$= \lim_{x \to -\infty} f(3)x^3 = \overset{+}{f(3)}(-\infty) = -\infty$$

| $x$ | | 1 | 2 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | 0 | + | 0 | |

$f(3) > 0$

**11** (α) $f(x) = 3x^3 - 2x - 1.$

$f(x) = 0$

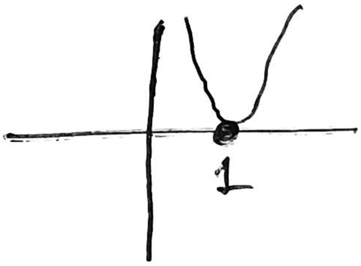
$3x^3 - 2x - 1 = 0$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 0 & -2 & -1 \\ \downarrow & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$+$

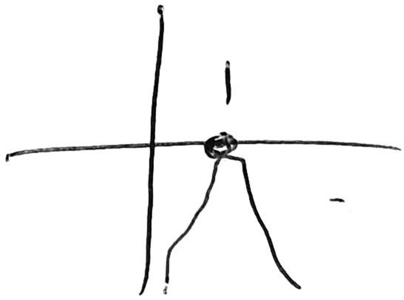
$(x-1)(3x^2+3x+1) = 0,$

$\Delta < 0$



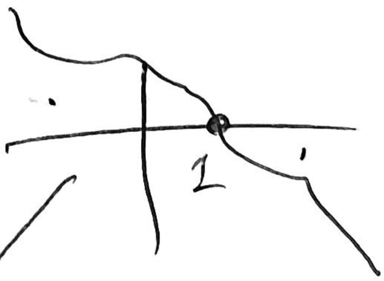
$x = 1$

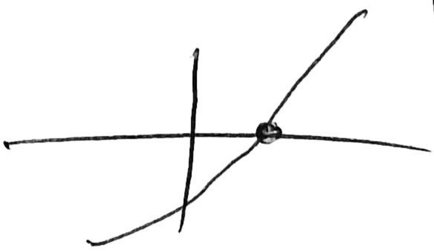
| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |



Αν $x<1$ η $f(x)<0$

Αν $x>1$ η $f(x)>0$.





**12** (α) $f(x) = \sqrt{2}\,\eta\mu x - 1 \qquad x \in [0, \pi]$,

$f(x) = 0$

$\sqrt{2}\,\eta\mu x - 1 = 0$

$\sqrt{2}\,\eta\mu x = 1$

$\eta\mu x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\eta\mu x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\eta\mu x = \eta\mu \dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4}}$ ή $x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4}}$ $\qquad k \in \mathbb{Z}$.

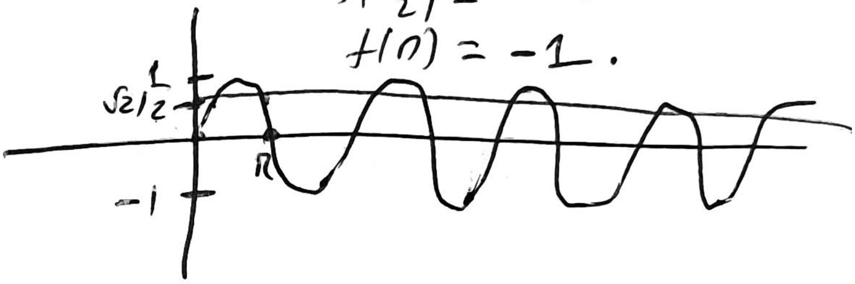
| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Αναπροσωπο

$f(0) = -1$

$f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} - 1$

$f(\pi) = -1$.




$0 \le x \le \pi$

$0 \le 2k\pi + \frac{\pi}{4} \le \pi$

$0 \le 2k + \frac{1}{4} \le 1$

$0 \le 8k + 1 \le 4$

$-1 \le 8k \le 3$

$-\frac{1}{8} \le k \le \frac{3}{8}$

$k = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$

$-1 \quad -\frac{1}{8} \quad 0 \quad \frac{3}{8} \quad 1$

$0 \le x \le \pi$

$0 \le 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \le \pi$

$0 \le 2k + \frac{3}{4} \le 1$

$0 \le 4k + 3 \le 4$

$-3 \le 4k \le 1$

$-\frac{3}{4} \le k \le \frac{1}{4}$

$k = 0$

$k = 0$

$x = \frac{3\pi}{4}$

γ). $f(x) = ημx - συνx$ , $x \in [0, π]$ .

$f(x) = 0$.

$ημx - συνx = 0$

$ημx = συνx$

$συν\left(\frac{π}{2} - x\right) = συνx$

$\frac{π}{2} - x = 2κπ + x$ ή $\cancel{\frac{π}{2} - x = 2κπ - x}$

Αδύνατη

$-2κπ + \frac{π}{2} = 2x$

$\boxed{x = -κπ + \frac{π}{4}}$

$x = \frac{π}{4}$

$0 \le x \le π$

$0 \le \frac{π}{2} - κπ \le π$

$0 \le \frac{1}{2} - κ \le 1$

$0 \le 1 - 2κ \le 2$

$-1 \le -2κ \le 1$

$\frac{1}{2} \ge κ \ge -\frac{1}{2}$

$κ = 0$

**15** Σελ 244

(B) $f^2(x) + 4\eta\mu x = \eta\mu^2 x + 4$. $\qquad$ $f(0)=2$.

$$f^2(x) = \eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 4$$

$$f^2(x) = (\eta\mu x - 2)^2$$

$$|f(x)| = |\eta\mu x - 2|$$

Ρίζα $f(x)$ $\qquad$ $f(x) = -\eta\mu x + 2$

$$f(x) = 0$$

$$|f(x)| = 0$$

$$|\eta\mu x - 2| = 0$$

$$2 - \eta\mu x = 0$$

Αδύνατο!

$\Rightarrow f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(0) = 2 \Rightarrow f(x) > 0$

19 (B) $f^2(x) + 2e^x = e^{2x} + 1$

$x \geq 0$

$f(\ln 2) = -1$ ,

$f^2(x) = e^{2x} - 2e^x + 1$

$f^2(x) = (e^x - 1)^2$

$|f(x)| = |e^x - 1|$ (+)

• $x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq e^0 \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0$

$|f(x)| = e^x - 1$ , (−)

P.T.d $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$e^x - 1 = 0$

$e^x = 1$

$x = 0$

| $x$ | 0 | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\cancel{\phi}$ | − |

$f(\ln 2) = -1$

$-f(x) = e^x - 1$

$f(x) = 1 - e^x$

**20** B. $f^2(x) = 4 - x^2$ $\quad x \in [-2, 2]$

$f(0) = 2$

$f^2(x) = \sqrt{4 - x^2}^{\,2}$

| $x$ | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $4-x^2$ | $-\ 0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$|f(x)| = |\sqrt{4-x^2}|$

$|f(x)| = \sqrt{4-x^2}$

P,11

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$\sqrt{4-x^2} = 0$

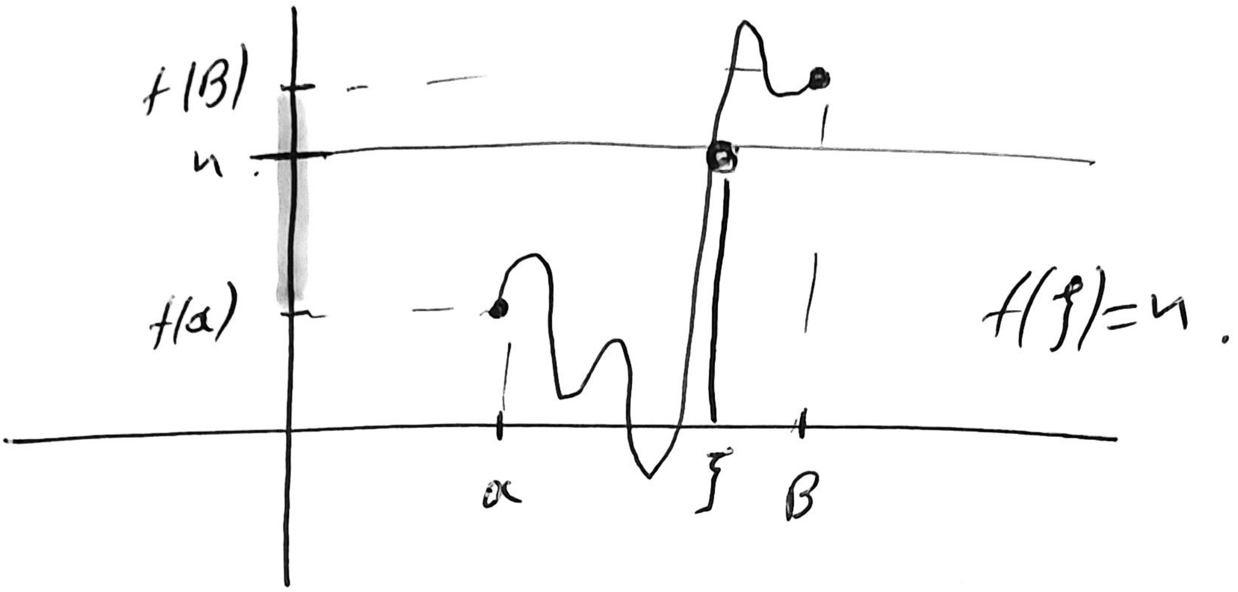
$x = 2$ $\quad x = -2$

| $x$ | $-2$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ |

$f(0) = 2$

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$

# Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.




## Απόδειξη

Αρκεί νδο $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω $f(\xi) = n$

Αρκεί νδο η εξίσωση

$f(x) = n$

έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(\alpha, \beta)$.

$\underbrace{f(x) - n}_{g(x)} = 0$

Η $g(x)$ συνεχής $[\alpha, \beta]$ ως π.σ.σ

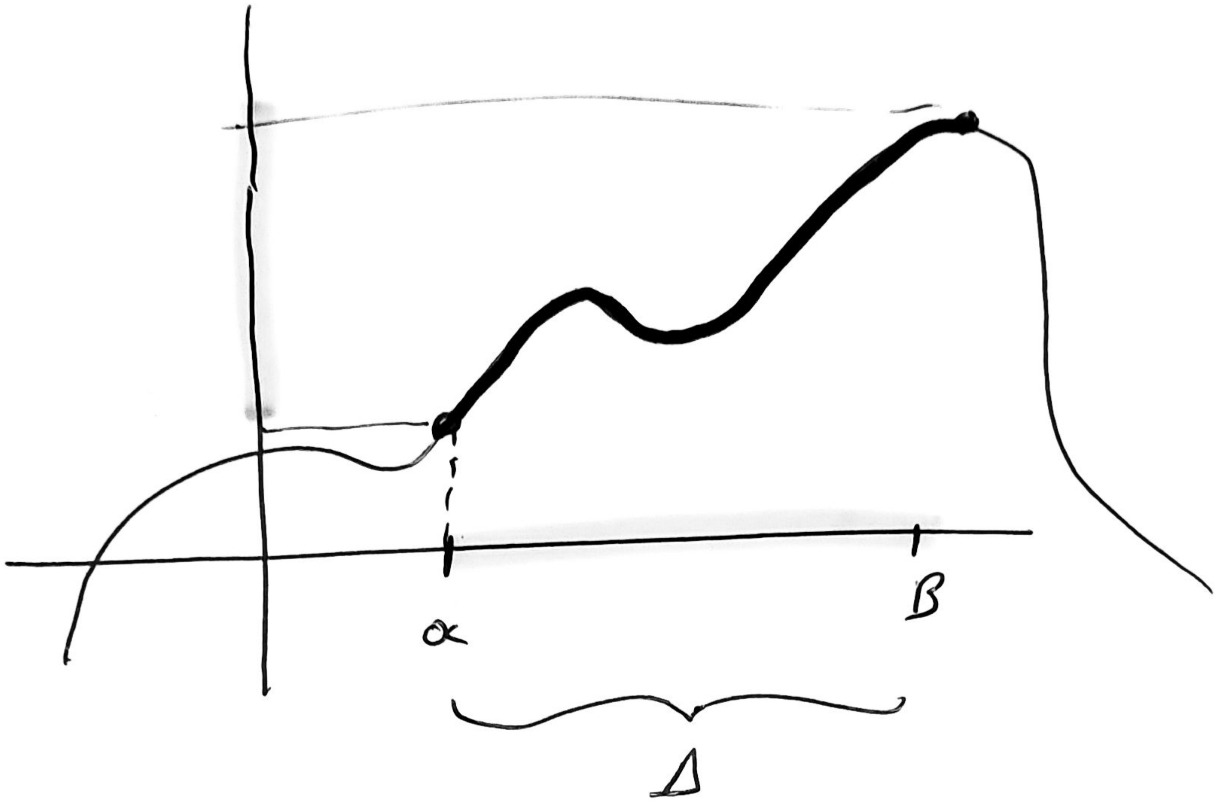
$f(\alpha) < n < f(\beta)$

$g(\alpha) = f(\alpha) - n < 0$

$g(\beta) = f(\beta) - n > 0$

Άρα $g(\alpha)\, g(\beta) < 0$ Bolzano $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω $g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) - n = 0$

$f(\xi) = n$.




Η εικονα $f(\Delta)$ ενος διαστηματος Δ μεσω μιας συνεχους και μη σταθερης συναρτησης ειναι διαστημα.

## ΘΕΤ:

- $f$ συνεχής $[\alpha, \beta]$
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Τότε $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω $f(\xi) = \eta$

όπου $\eta \in (f(\alpha), f(\beta))$

δηλαδή $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.

## ΘΜΕΤ

- $f$ συνεχής $[\alpha, \beta]$.

Τότε $m \leq f(x) \leq M$

$\forall x \in [\alpha, \beta]$.

③ Σελ 261

$f(x) = x^4 + 3x + 1$.

Νδο η εξισωση $f(x) = 10$ εχει τουλαχιστον μια ριζα στο $(1, 2)$.

α' τροπος

$f(x) = 10$

$f(x) - 10 = 0$

$x^4 + 3x + 1 - 10 = 0$

$\underbrace{x^4 + 3x - 9}_{g(x)} = 0$

$\left.\begin{array}{l} g(1) = -5 \\ g(2) = 13 \end{array}\right\} g(1)g(2) < 0$

Bolzano $\exists \xi \in (1, 2)$ τ.ω $g(\xi) = 0$

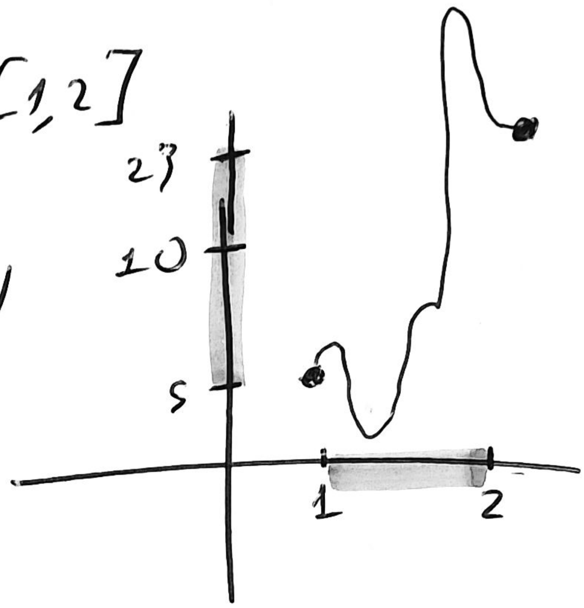
$f(\xi) = 10$

Β' τρόπος

νδο η $f(x)=10$ έχει τουλ. μια ρίζα στο $(1,2)$.

$$f(x)=x^4+3x+1.$$

Η $f(x)$ συνεχής στο $[1,2]$




$\left.\begin{array}{l} f(1)=5 \\ f(2)=23 \end{array}\right\} f(1)\neq f(2)$

Το $10\in(5,23)$

άρα $\exists\xi\in(1,2)$ τ.ω $f(\xi)=10$.

**8** $f:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχής και $\nearrow$

νδο $\exists!\ \xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$.

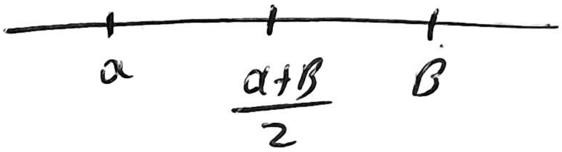
$$f(x)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}.$$

---

Η $f(x)$ είναι συνεχής $[\alpha,\beta]$

άρα από ΘΜΕΤ $m\le f(x)\le M$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$

---




$$\left.\begin{aligned} m&\le f(\alpha)\le M\\ m&\le f(\beta)\le M\\ m&\le f\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\le M\end{aligned}\right\}\ (+)\quad 3m\le f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\le 3M$$

$$m\le\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}\le M$$

Ο αριθμός $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$ ανήκει στο

$\Sigma T_f$ τότε $\exists\,\xi\in[\alpha,\beta]$ τ.ω

$$f(\xi)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3},\quad \xi\in[\alpha,\beta].$$

Το $\xi$ μοναδικό γιατί $f\nearrow$

(5) $f: [1,3] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

- $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

- $f(1) f(3) = 10$

Αφού $f$ συνεχής

$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$

$f(1) = 2$

Ν.δ.ο η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει

τουλ. μια λύση στο $(1,3)$.

$\underbrace{f(x) - 4}_{g(x)} = 0$

Η $g(x)$ συνεχής ως π.σ.σ στο $[1,3]$.

$g(1) = f(1) - 4 = 2 - 4 = -2$

$g(3) = f(3) - 4 = 5 - 4 = 1$

$g(1) g(3) = -2 < 0$

Bolzano $\exists\, \xi \in (1,3)$

τ.ω $g(\xi) = 0$ $\underline{\quad f(\xi) = 4 \quad}$

Σελ 262

**14** Εστω $f: [0,2] \to R$ συνεχης.

Ν.δ.ο $\exists x_0 \in [0,2]$ τ.ω

$$f(x_0) = \frac{f(0) + 5f(1) + 4f(2)}{10}.$$

Αφου $f$ συνεχης στο $[0,2]$
απο ΘΜΕΤ $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [0,2]$

$$\left.\begin{aligned} & m \leq f(0) \leq M \\ & m \leq f(1) \leq M \Rightarrow 5m \leq 5f(1) \leq 5M \\ & m \leq f(2) \leq M \Rightarrow 4m \leq 4f(2) \leq 4M \end{aligned}\right\} (+)$$

$$10m \leq f(0) + 5f(1) + 4f(2) \leq 10M$$

$$m \leq \frac{f(0) + 5f(1) + 4f(2)}{10} \leq M$$

Ο αριθμος $\dfrac{f(0)+5f(1)+4f(2)}{10}$

ανηκει στο $\Sigma T_f$

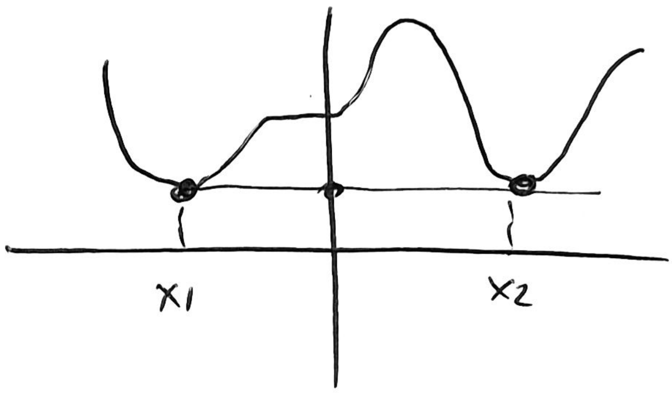
αρα $\exists\, x_0 \in [0,2]$

τ.ω $f(x_0)=\dfrac{f(0)+5f(1)+4f(2)}{10}$.

**11**

$$f(x) = (x-2)^2(x-4)^4$$

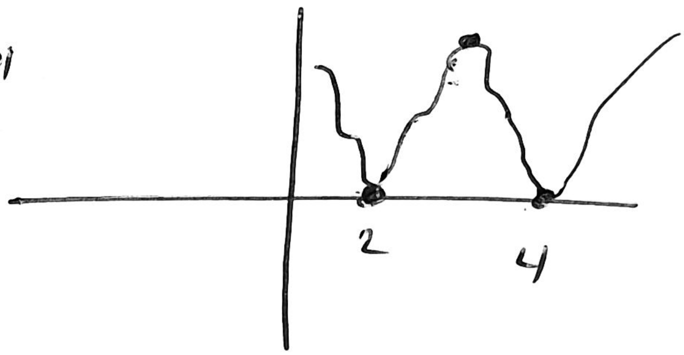
Νδο η $f$ εχει δυο θεσεις $x_1, x_2$ $(x_1 < x_2)$ ελαχιστων και $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ τ.ω $f$ εχει μεγιστο στο $x_0$.




$$f(x) = (x-2)^2(x-4)^4 \geq 0$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$

Αρα η $C_f$ εχει ολικο ελαχιστο στα $A(2,0)$ $B(4,0)$.




Η $f(x)$ συνεχης στο $[2,4]$ αρα απο ΘΜΕΤ η $f(x)$ εχει μεγιστη τιμη. Αρα $\exists \xi \in (2,4)$ τ.ω $f(\xi) = M$.

**16** $f(x) = e^{-x} - x$

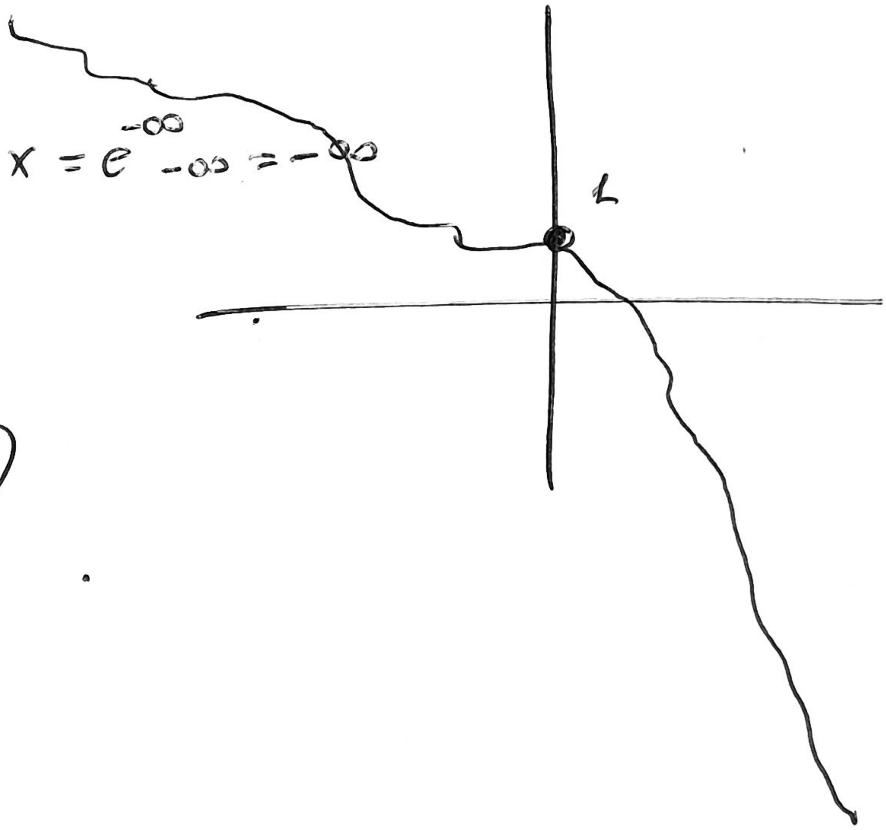
$D_f = \mathbb{R}$.

- $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2$ (+)

$$\underbrace{e^{-x_1} - x_1}_{f(x_1)} > \underbrace{e^{-x_2} - x_2}_{f(x_2)}$$

$$f \searrow$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{-x} - x\right) = +\infty + \infty = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} - x = e^{-\infty} - \infty = -\infty$



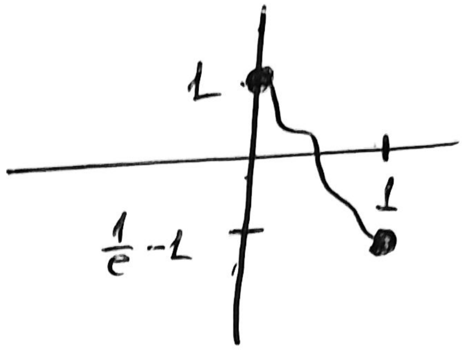

$\Sigma\ T_f = \mathbb{R}$.

(B) i) $B=[0,1]$ $\qquad f(x)=e^{-x}-x \qquad f \downarrow$

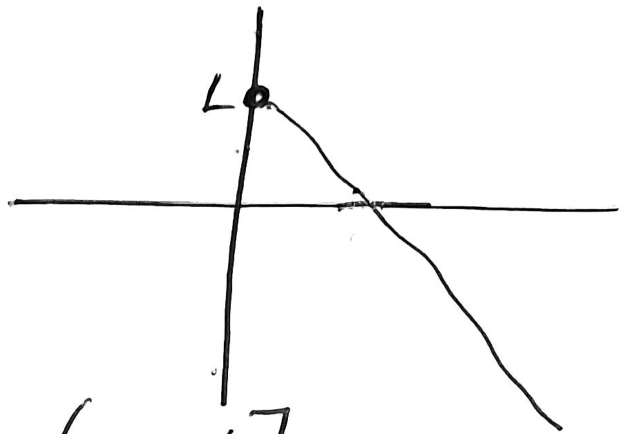
$f(0)=1$

$f(1)=\frac{1}{e}-1$

$\Sigma T_f=\left[\frac{1}{e}-1,\ 1\right]$.




ii) $B=[0,+\infty)$

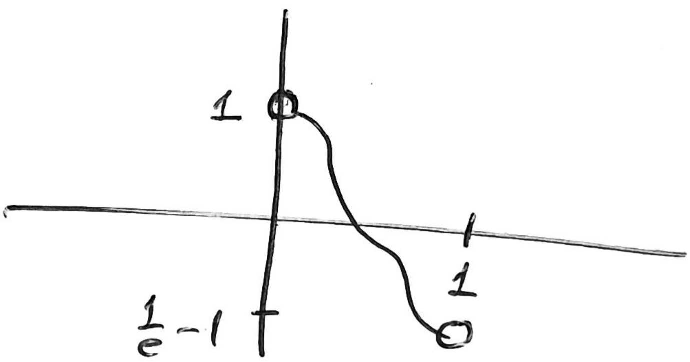



$f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \qquad \Sigma T_f=(-\infty,\ 1]$

iii) $B=(0,1)$

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} e^{-x}-x=1$
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\frac{1}{e}-1$




$$\Sigma T_f=\left(\frac{1}{e}-1,\ 1\right).$$

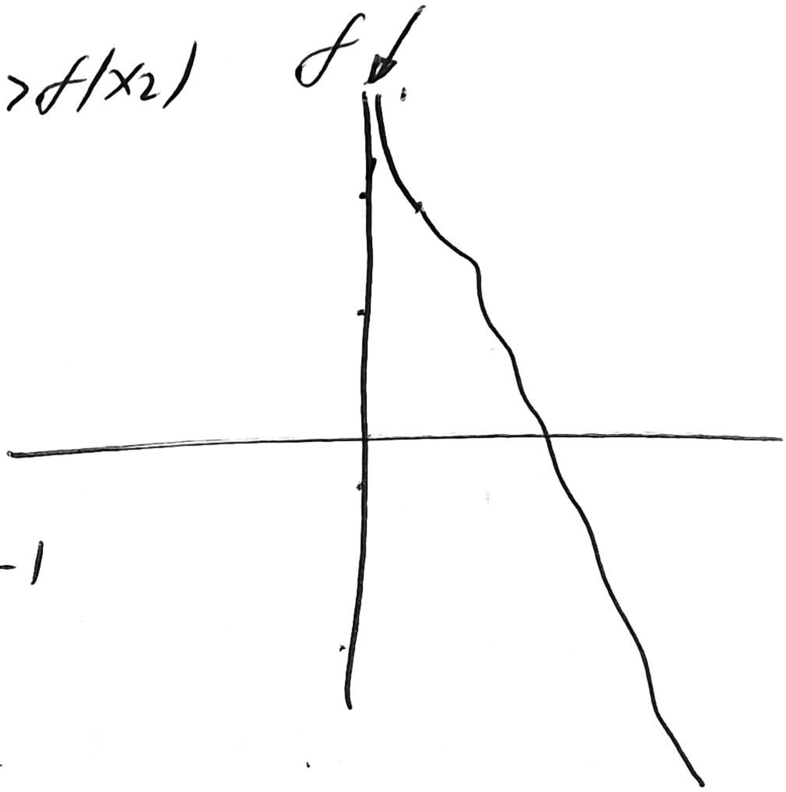
17 $\quad f(x) = e^{-x} - \ln x - 1$

$D_f = (0, +\infty)$

α) , • $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}$ (+)

• $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$

$f(x_1) > f(x_2) \quad f \downarrow.$



$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-x} - \ln x - 1$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} e^{0} - \ln 0 - 1 =$

$= \cancel{1} - (-\infty) - \cancel{1} =$

$= +\infty$

$\Sigma T_f = \mathbb{R}.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} - \ln x - 1\right) = e^{-\infty} - \ln(+\infty) - 1$

$= 0 - (+\infty) - 1$

$= -\infty$

(13) Νδο $\exists!\, x_0 > 0$ τ.ω $e^{x_0} \ln x_0 + e^{x_0} = 1$.

$\boxed{f(x) = e^{-x} - \ln x - 1}$

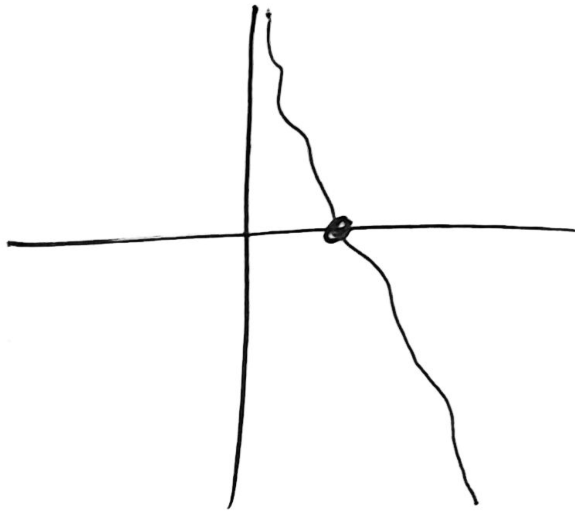
$$e^x \ln x + e^x = 1$$

$$\frac{\cancel{e^x} \ln x}{\cancel{e^x}} + \frac{e^x}{e^x} = \frac{1}{e^x}$$

$$\ln x + 1 = e^{-x}$$

$$0 = e^{-x} - \ln x - 1$$

$$0 = f(x)$$



Στην ουσια μου ζητασι νδο οτι η εξισωση $f(x) = 0$ εχει μοναδικη ριζα.

δηλαδη Αρκει νδο η $C_f$ τεμνει τον $x'x$ μια φορα

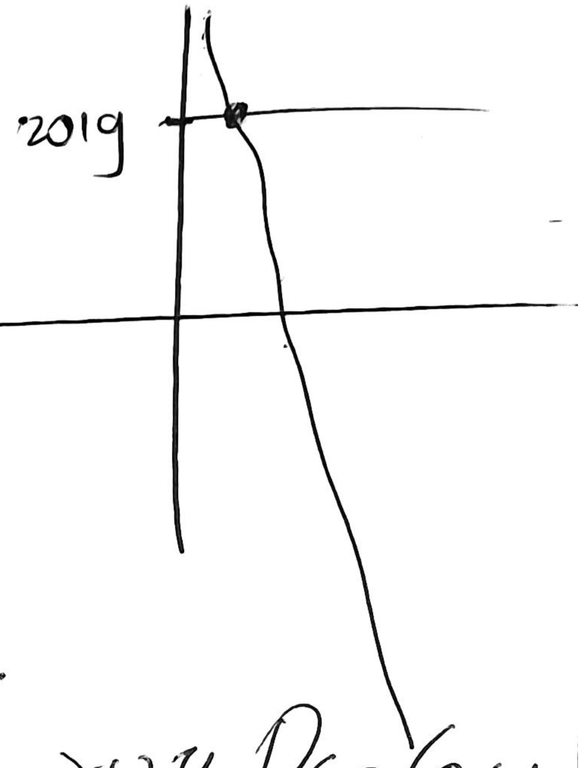
Συμπερασμα

- $f$ συνεχ.
- $\Sigma T_f = \mathbb{R}$.
- το $0 \in \Sigma T_f$

αρα $\exists\, x_0 \in D_f$ τ.ω $f(x_0) = 0$.

και λογω μονοτονιας ειναι μοναδικο.

① . Νδο η εξισωση $f(x)=2019$ εχει ακριβως μια θετικη ριζα.




- $f$ συνεχης.
- $ΣT_f=\mathbb{R}$.
- το $2019 \in ΣT_f$.

αρα $\exists!\ \xi \in D_f$

λογω μονοτονιας

τ.ω $f(\xi)=2019$.

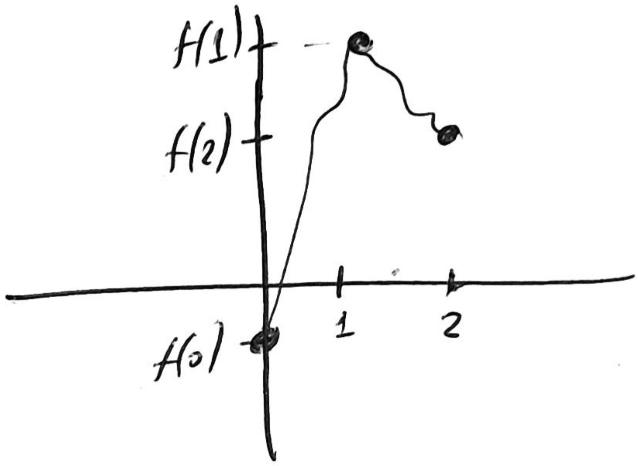
προφανως $\xi>0$ γιατι $D_f=(0,+\infty)$.

**(26)** • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής!.

• $f(0) < f(2) < f(1)$.

νδο η $f$ δεν 1-1.

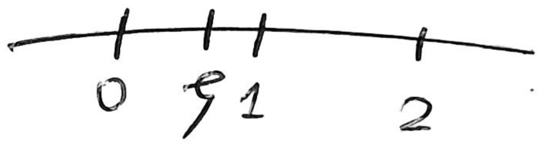
Έστω ότι $f$: 1-1




Το $f(2) \in (f(0), f(1))$

άρα από ΘΕΤ

$\exists\, \xi \in (0,1)$ τ.ω $f(\xi) = f(2)$




δηλαδή

$\xi \neq 2$ όμως $f(\xi) = f(2)$

όχι 1-1.

# Επόμενο Μάθημα

## Παρασκευή 4:30 - 6

Σελ 243-244

14 α γ β

15 α

17 α γ

19 α

20 α

21

22

23 α.

24

26

27

## Σελ 243

**14** ⓐ $|f(x)| = 1$ και $f(0) = -1$.

Ρίζα $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$1 = 0$

Άτοπο!

$f(x) \neq 0$ και συνεχ.

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$.

$f(0) = -1$

$f(x) < 0$

$|\overset{\ominus}{f(x)}| = 1$

$-f(x) = 1$

$f(x) = -1$

(B) $|\overset{(+)}{f(x)}| = e^x + 1 \Rightarrow f(x) = e^x + 1$

$f(0) = 2.$

P.Π.Δ $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$e^x + 1 = 0$

Αδύνατο

$f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(0) = 2 \Rightarrow f(x) > 0$

(Γ). $f^2(x) = x^2 + 4$ $\quad f(2) = \sqrt{5}$,

$f^2(x) = \sqrt{x^2+4}^{\,2}$

$|f(x)| = |\overset{(+)}{\sqrt{x^2+4}}|$

$|\overset{(+)}{f(x)}| = \sqrt{x^2+4}$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+4}$

P.Π.Δ $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$\sqrt{x^2+4} = 0$

Αδύνατο

$f(x) \neq 0$ και συνεχής

άρα $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(2) = \sqrt{5} \Rightarrow f(x) > 0$

**15** (α) $f^2(x) = e^{2x} + 2e^x + 1$ $\qquad f(0) = 2$

$$f^2(x) = (e^x+1)^2$$

$$|f(x)| = |\overset{(+)}{e^x+1}|$$

$$|\overset{(+)}{f(x)}| = e^x + 1 \quad \Rightarrow f(x) = e^x + 1$$

Ρίζα $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$e^x + 1 = 0$

Άτοπο

$\Bigg\}$ $f(x) \neq 0$ και συνεχής,

$f(0) = 2 \quad \Rightarrow f(x) > 0$

$f(0) = 2$

**17** (α) $f^2(x) = 4x f(x) + 4$

$$f^2(x) - 4x f(x) = 4$$

$$f^2(x) - 4x f(x) + 4x^2 = 4 + 4x^2$$

$$\left(f(x) - 2x\right)^2 = \sqrt{4+4x^2}^{\,2}$$

$$|f(x) - 2x| = |\overset{(+)}{\sqrt{4+4x^2}}|$$

$$\underbrace{|f(x) - 2x|}_{g(x)} = \sqrt{4+4x^2}$$

$$|g(x)| = \sqrt{4+4x^2}$$

Ριζα $g(x)$

$g(x)=0$

$|g(x)|=0$

$\sqrt{4+4x^2}=0$

Ατοπο!

$g(x)\neq 0$ και συνεχής.

$g(0)=f(0)-0=2-0=2$

$g(x)>0$.

$|g(x)|=\sqrt{4+4x^2}$

$g(x)=\sqrt{4+4x^2}$

$f(x)-2x=\sqrt{4+4x^2}$

$f(x)=\sqrt{4+4x^2}+2x$

**17** (γ) $f^2(x) - 2f(x) = 0$

$f^2(x) - 2f(x) + 1 = 1$

$(f(x) - 1)^2 = 1^2$

$|\underbrace{f(x) - 1}_{g(x)}| = |1|$

$|g(x)| = 1 \iff g(x) = 1$

$f(x) - 1 = 1$

$f(x) = 2$

Ρ.Μ. $g(x)$

$g(x) = 0$

$|g(x)| = 0$

$1 = 0$

Άτοπο

$g(x) \neq 0$ και συνεχής.

$g(2) = f(2) - 1 = 2 - 1 = 1.$

$g(x) > 0$

20

01 $|f(x)| = 1 - x^2$ $\quad (+)$

$f(0) = 1$

$x \in [-1, 1]$,

P,Td $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

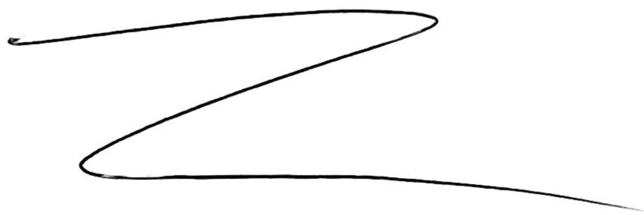
$1 - x^2 = 0$

$x = 1$ $\quad x = -1$.

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | //// | 0 | + | 0 | //// |

$f(0) = 1$

$f(x) = 1 - x^2$



**19**

01 $f^2(x) = x + 2f(x)$ $\qquad f(0) = 2.$

$$f^2(x) - 2f(x) = x$$

$$f^2(x) - 2f(x) + 1 = x + 1$$

$$\left(f(x) - 1\right)^2 = \sqrt{x+1}^{\,2}$$

$$\left|\underbrace{f(x) - 1}_{g(x)}\right| = \left|\overset{+}{\sqrt{x+1}}\right|$$

$$\left|\overset{+}{g(x)}\right| = \sqrt{x+1} \quad \Rightarrow g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$f(x) - 1 = \sqrt{x+1}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} + 1$$

P,Tl $g(x)$

$g(x) = 0$

$|g(x)| = 0$

$\sqrt{x+1} = 0$

$x = -1$

| $x$ | | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $g$ | ////////// | $0$ | $+$ |

$g(0) = f(0) - 1 = 2 - 1 = 1.$

$\Delta = [-1, +\infty)$

(21)

$$f^2(x) + 2x^2 = 2x\,f(x) + 1 \qquad f(0) = 1.$$

$$f^2(x) - 2x\,f(x) = 1 - 2x^2$$

$$f^2(x) - 2x\,f(x) + x^2 = 1 - x^2$$

$$\left(f(x) - x\right)^2 = \sqrt{1-x^2}^{\,2}$$

| $x$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $1-x^2$ | $-$ 0 $+$ 0 $-$ | |

$$\Big|\underbrace{f(x) - x}_{g(x)}\Big| = \Big|\overset{+}{\sqrt{1-x^2}}\Big|$$

$$\Big|\overset{+}{g(x)}\Big| = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f(x) - x = \sqrt{1-x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + x$$

P,Id $g(x)$

$g(x) = 0$

$|g(x)| = 0$

$\sqrt{1-x^2} = 0$

$x = 1$ $\quad$ $x = -1$

| $x$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | //// 0 $+$ 0 //// | |

$$g(0) = f(0) - 0 = 1$$

**22** $x^2 + f^2(x) = 4$

$f^2(x) = 4 - x^2$

**α**

$f(x) = 0$

$f^2(x) = 0$

$4 - x^2 = 0$

$x = 2$ $\quad$ $x = -2$

**β**

| $x$ | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | /// | 0 | | 0 | /// |

Αφού το $-2$ και το $2$ είναι διαδοχικές ρίζες της $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

**γ** $f^2(x) = 4 - x^2$

$f^2(x) = \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2$

$|f(x)| = \left|\overset{+}{\sqrt{4-x^2}}\right|$

$|f(x)| = \sqrt{4-x^2}$

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$

$f(x) = -\sqrt{4-x^2}$

**δ** $f(1) = -\sqrt{3}$

$f(x) < 0$

$f(x) = -\sqrt{4-x^2}$,

# 23

(a) $f^2(x) = x^2 - 4x + 4$

$f^2(x) = (x-2)^2$

$|f(x)| = |x-2|$

P, T, I $f(x)$

---

$f(x) = 0$

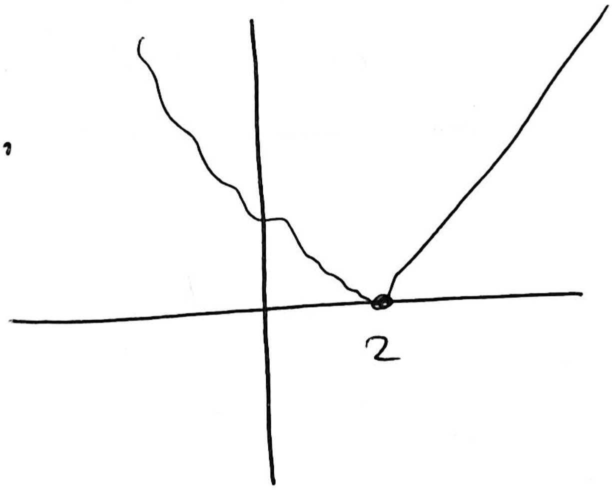
$|f(x)| = 0$

$|x-2| = 0$

$\underline{\underline{x = 2}}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | | 2 | |
| $f(x)$ | | 0 | |

1.

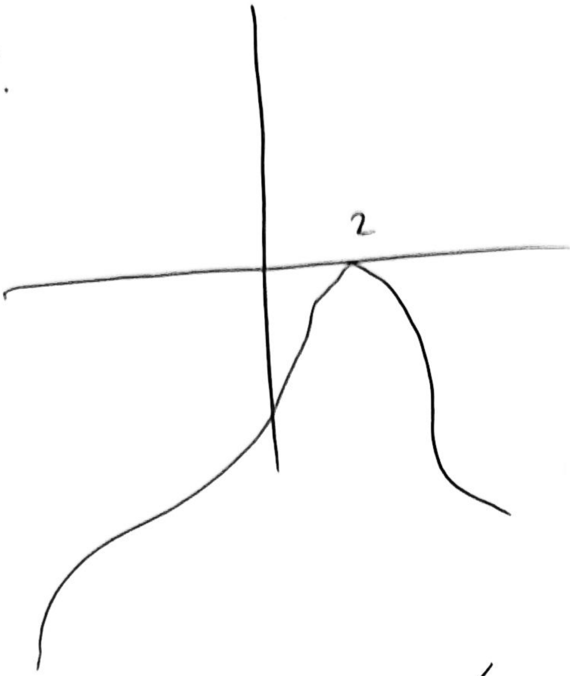


$|\overset{+}{f(x)}| = |x-2|$

$f(x) = |x-2|$

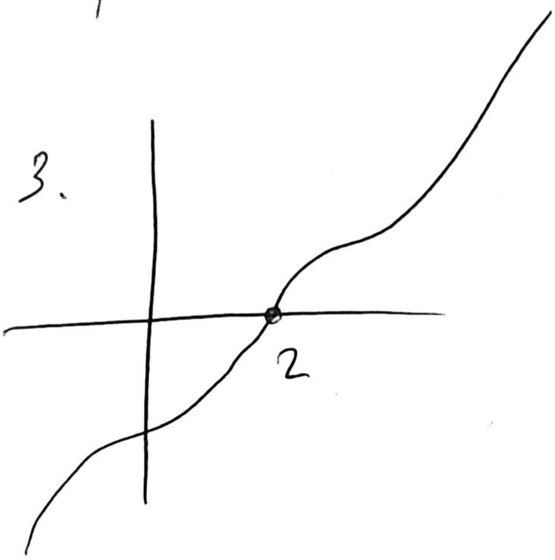
$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$$

2.




$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \geq 2 \\ x-2, & x < 0. \end{cases}$$

3.




$$|f(x)| = |x-2|$$

→ Av $x<2$ $\quad |\overset{\ominus}{f(x)}| = |\overset{\ominus}{x-2}|$

$$-f(x) = -x+2$$

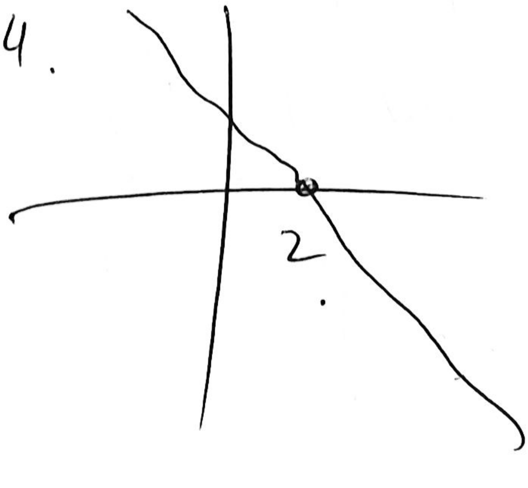
$$f(x) = x-2$$

→ Av $x>2$ $\quad |\overset{\oplus}{f(x)}| = |\overset{\oplus}{x-2}|$

$$f(x) = x-2$$

$$f(x) = x-2$$

4.




o point.

$$f(x) = 2-x$$

24

$f(x) \neq x$

$\underbrace{f(x) - x}_{g(x)} \neq 0$

$g(x) \neq 0$ και συνεχ.

$\Rightarrow g(x) > 0$ ή $g(x) < 0$

άρα $g(-1)$ και $g(1)$ ομόσημοι

Νδο $x f(x) = 1$ έχει ρίζα $(-1, 1)$.

$\underbrace{x f(x) - 1}_{\varphi(x)} = 0$

$\varphi(-1) = -f(-1) - 1 = -(f(-1)+1) = -g(-1)$

$\varphi(1) = f(1) - 1 = g(1)$

Άρα $\varphi(-1)\varphi(1) = -\underbrace{g(-1)g(1)}_{+} < 0$

Bolzano $\exists \xi \in (-1,1)$ τ.ω $\varphi(\xi) = 0$.

$\xi f(\xi) = 1$.

**26**

$$e^{f(x)} + 2x = e^{-f(x)}$$

$$e^{f(x)} + 2x = \frac{1}{e^{f(x)}}$$

$$e^{2f(x)} + 2x\,e^{f(x)} = 1.$$

$$\left(e^{f(x)}\right)^2 + 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2+1$$

$$\left(e^{f(x)} + x\right)^2 = x^2+1$$

$$\left(e^{f(x)} + x\right)^2 = \sqrt{x^2+1}^{\,2}$$

$$\Big|\underbrace{e^{f(x)}+x}_{g(x)}\Big| = \Big|\overset{+}{\sqrt{x^2+1}}\Big|$$

$$|g(x)| = \sqrt{x^2+1}$$

<u>Ρίζα $g(x)$</u>

$g(x)=0.$ ⟶ $g(x)\neq 0$ και συνεχής

$g(x)>0$ ή $g(x)<0$

$|g(x)|=0$

$\sqrt{x^2+1}=0$ Αδύνατο.

$g(x)=\sqrt{x^2+1}$ ή $g(x)=-\sqrt{x^2+1}$

$e^{f(x)}+x=\sqrt{x^2+1}$

$e^{f(x)}=\sqrt{x^2+1}-x$

$$\boxed{f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$e^{f(x)}+x=-\sqrt{x^2+1}$

$e^{f(x)}=-x-\sqrt{x^2+1}$

$\cancel{f(x)=\ln\left(-x-\sqrt{x^2+1}\right)}$

πρέπει $-x-\sqrt{x^2+1}>0$

$-x>\sqrt{x^2+1}$

$x<0$

$\cancel{x^2}>\cancel{x^2}+1$

$0>1$

Άτοπο!

Απορρίπτεται

**27** ⓐ $e^x + x - 1 = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0$

$\varphi(x) = e^x + x - 1$

$\varphi(x) = \varphi(0)$

$\varphi\ \%\ 1-1$

$x = 0$

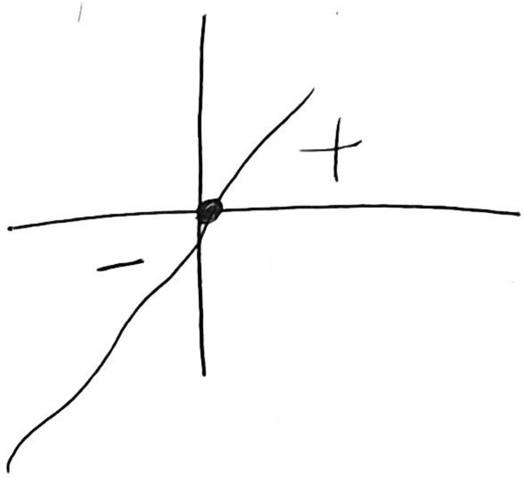
- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ ⊕
- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$

$\varphi \nearrow$

$\varphi\ \%\ 1-1$

ⓑ $f^2(x) = (e^x + x - 1)^2$

$|f(x)| = |e^x + x - 1|$




P.T.U $f(x)$

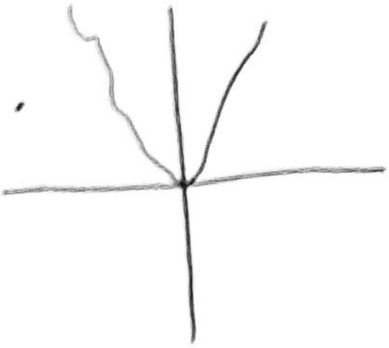
$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$|e^x + x - 1| = 0$

$x = 0$

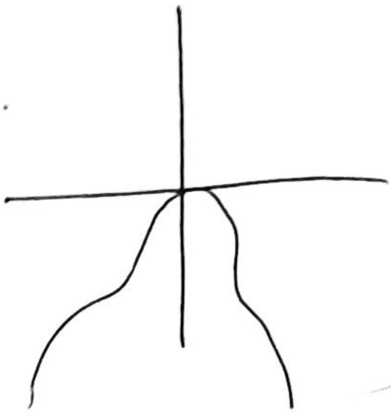
| $x$ | $0$ |
| --- | --- |
| $f(x)$ | $\varphi$ |

1. 

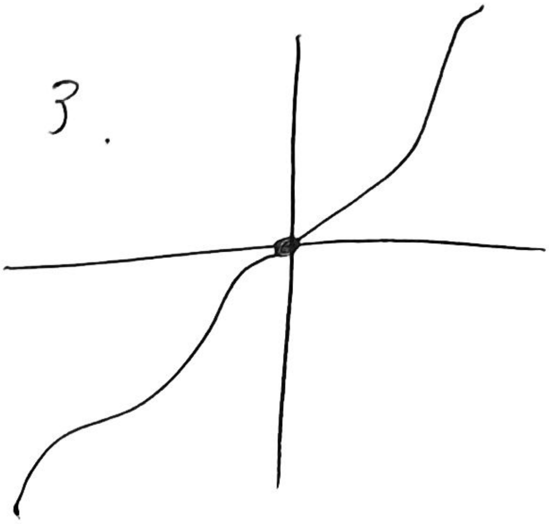
$$|\overset{+}{f(x)}| = |e^x + x - 1|$$

$$f(x) = |e^x + x - 1|$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -e^x - x + 1 & x \leq 0 \\ e^x + x - 1 & x > 0 \end{cases}}$$

2. 

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} e^x + x - 1, & x \leq 0 \\ -e^x - x + 1, & x > 0 \end{cases}}$$

3. 

$$|\overset{-}{f(x)}| = |e^{x}\overset{-}{+x-1}|$$

$x < 0$

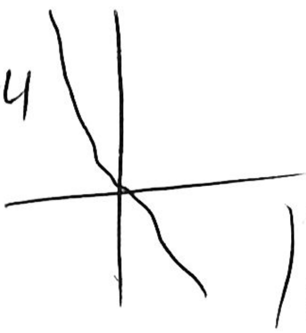
$$-f(x) = -e^x - x + 1$$

$$\boxed{f(x) = e^x + x - 1}$$

$x > 0$

$$|\overset{+}{f(x)}| = |e^x \overset{+}{+x-1}|$$

$$\boxed{f(x) = e^x + x - 1}$$

4 

$$\boxed{f(x) = -e^x - x + 1}$$

# Σελ 261

**7** $f(\alpha)=\beta$

$f(\beta)=\alpha$

$\alpha<\beta$

Η $f$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Τότε $m\le f(x)\le M$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

$$\left.\begin{aligned} m\le f(\alpha)\le M \\ m\le f(\beta)\le M \end{aligned}\right\} \quad 2m\le f(\alpha)+f(\beta)\le 2M$$

$$m\le \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\le M$$

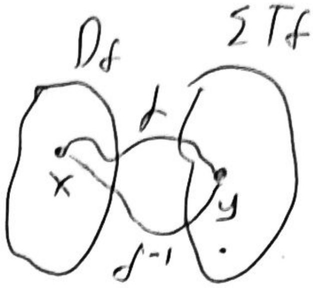
$$m\le \frac{\beta+\alpha}{2}\le M$$

Ο αριθμός $\frac{\beta+\alpha}{2}\in \Sigma T_f$.

$\exists\, \xi\in[\alpha,\beta]$ τ.ω $f(\xi)=\frac{\beta+\alpha}{2}$.

18

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$$




$$D_f = (0, +\infty)$$

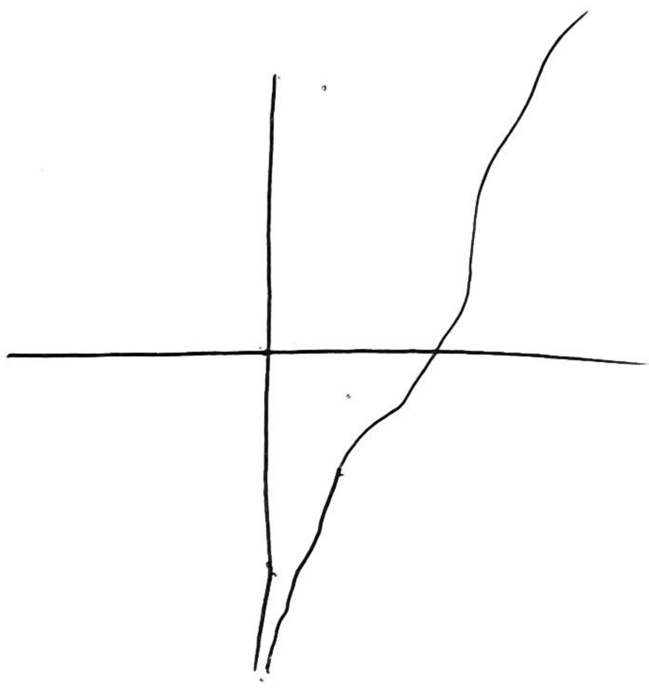
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$ (+)

$$\underbrace{\ln x_1 - \frac{1}{x_1} + 1}_{f(x_1)} < \underbrace{\ln x_2 - \frac{1}{x_2} + 1}_{f(x_2)}$$

$f \nearrow \Rightarrow f$ 1-1

άρα $f$ αντιστρ.

$$D_{f^{-1}} = \Sigma T_f \,,$$



- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty - (+\infty) + 1 = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 1 = +\infty$

$$\Sigma T_f = \mathbb{R} \,.$$

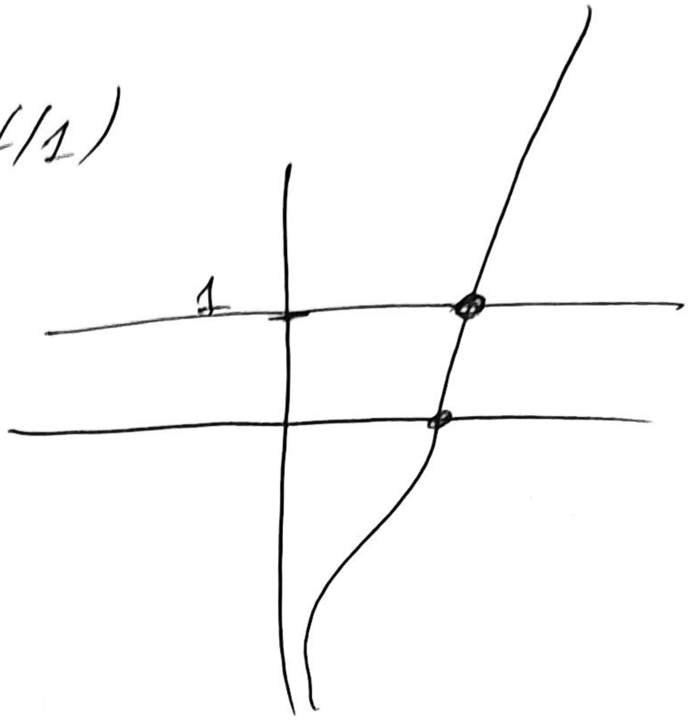
(β) $f^{-1}\left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = 1$

$f\left(f^{-1}\left(\ln x - \frac{1}{x}\right)\right) = f(1)$

$\ln x - \frac{1}{x} = 0$

$\ln x - \frac{1}{x} + 1 = 1$

$f(x) = 1$.




Συμπέρασμα

- $f$ συνεχής.
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = \mathbb{R}$

Το $1 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists\, \xi$ μοναδικό λόγω μονοτονίας

ώστε $f(\xi) = 1$.

# Ασκησας για Τριτη

Σελ 261 - 262 - 263.

2

4

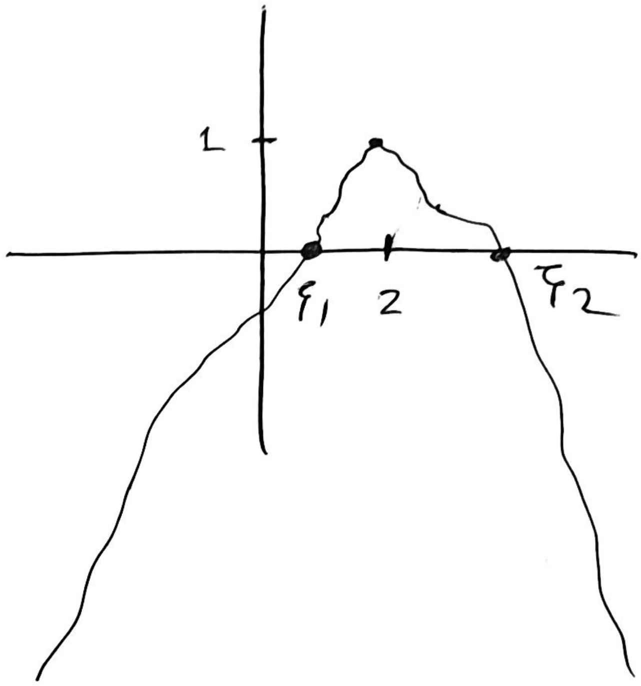
6

9

15

## 19

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow$ | $1$ | $\searrow$ |




α) $\Sigma T_f = (-\infty, 1]$

Η $f \nearrow (-\infty, 2]$

και $\Sigma T_f = (-\infty, 1]$

Η $f \searrow [2, +\infty)$

και $\Sigma T_f = [-\infty, 1]$

Άρα

β). $x \in (-\infty, 2]$

- $f$ συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = (-\infty, 1]$

Το $0 \in \Sigma T_f$ άρα

$\exists!\ \xi_1 < 2$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$.

$x \in [2, +\infty)$

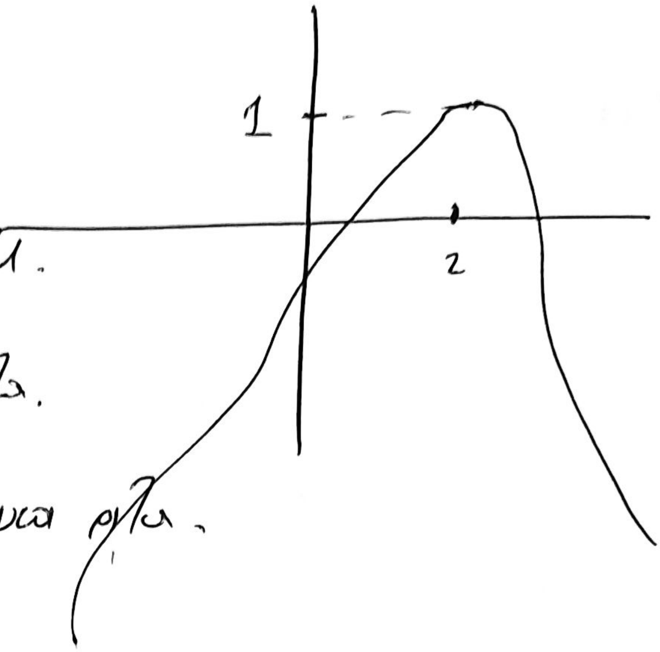
- $f$ συνεχής
- $f \searrow$
- $\Sigma T_f = (-\infty, 1]$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\ \xi_2 > 2$

τ.ω $f(\xi_2) = 0$

(γ) i) $f(x) = \alpha$




1. Αν $\alpha < 1$ τοτε 2 ρίζες.
2. Αν $\alpha = 1$ τοτε 1 ρίζα.
3. Αν $\alpha > 1$ τοτε καμια ρίζα.

ii). $f(x) = \frac{1}{\alpha}$ , $\alpha > 1$

Θέτω $\frac{1}{\alpha} = t$

$f(x) = t$

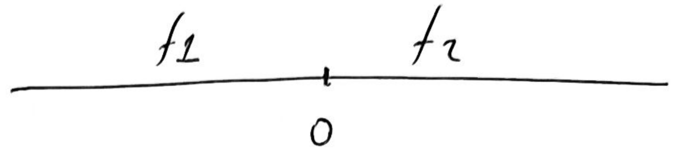
1. Αν $t < 1$ δηλαδη $\frac{1}{\alpha} < 1$ $\cancel{\Rightarrow \frac{1}{\alpha} - 1 < 0}$

$\cancel{\Rightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} < 0}$

$\Leftrightarrow 1 < \alpha$ 2 ρίζες.

**20**

$$f(x) = \begin{cases} x+e^{x}, & x \le 0 \\ e^{-x} - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$$




(α) Για να είναι μια συνάρτηση συνεχής στο $x_0$ πρέπει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Είναι συνεχής στο 0;

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \qquad f(0) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+e^{x}) = 0+e^{0} = 0+1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} - \ln(x+1) = 1 - 0 = 1$$

Επειδή $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ η $f$ συνεχής στο 0.

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$

και $(0, +\infty)$ ως π. σ. σ

και αφού είναι συνεχής και στο $0$

τότε γενικά συνεχής.

(Β)

| $x \leq 0$ | $x > 0$ |
|---|---|
| $f_1(x) = x + e^x$ | $f_2(x) = e^{-x} - \ln(x+1)$ |

• $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$

• $x_1 < x_2$ (+)

$f_1(x_1) < f_1(x_2)$

$f \nearrow$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$ (+)

$\ln(x_1+1) < \ln(x_2+1)$

$-\ln(x_1+1) > -\ln(x_2+1)$

$f_2 \searrow$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + e^x) = -\infty + e^{-\infty} = -\infty + 0 = -\infty$

• $f(0) = 1$

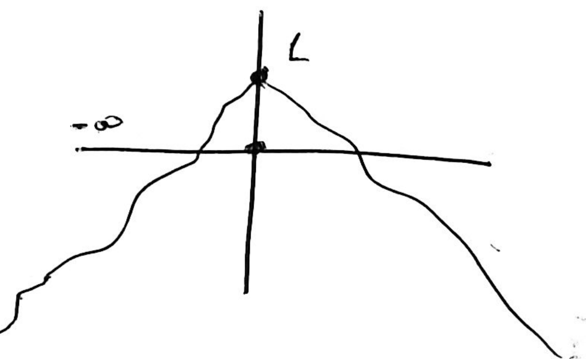
$\Sigma T_f = (-\infty, 1]$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} - \ln(x+1)$

$= e^{-\infty} - \ln(+\infty)$

$= 0 - (+\infty) = -\infty$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow$ | $1$ | $\searrow -\infty$ |



(γ)

$x \in (-\infty, 0]$

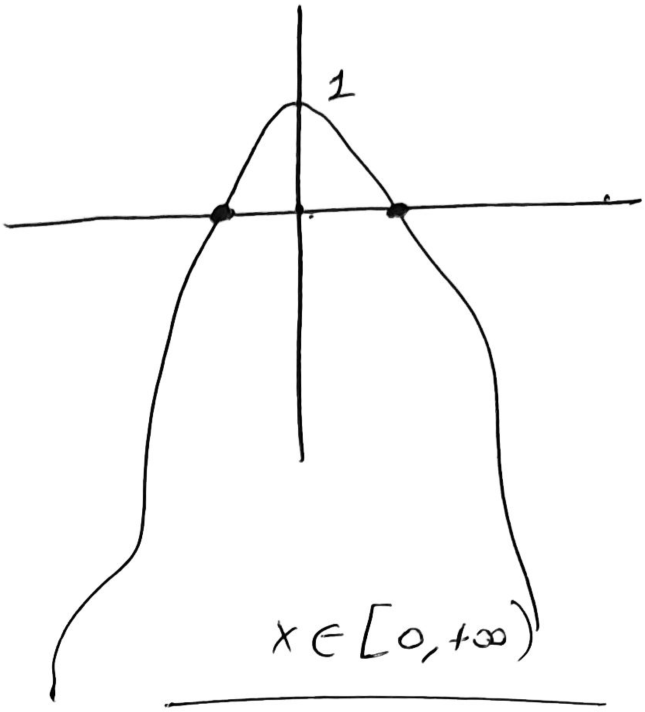
- $f$ συνεχης
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = (-\infty, 1]$

Το $0 \in \Sigma T_f$ αρα

$\exists!\ \xi_1$ τ.ω $f(\xi_1) = 0$

λογω μονοτονιας.

προφανως $\xi_1 < 0$




$x \in [0, +\infty)$

- $f$ συνεχης
- $f \searrow$
- $\Sigma T_f = (-\infty, 1]$

Το $0 \in \Sigma T_f$

αρα $\exists!\ \xi_2$ τ.ω

$f(\xi_2) = 0$ μοναδικη

λογω μονοτονιας

αρα $\xi_2 > 0$

Συνεπως εχει

δυο ριζες $\xi_1\ \xi_2$

ετεροσημες.

(δ) Νδο η εξίσωση $\frac{f(\alpha)-1}{x-1}+\frac{f(\beta)-1}{x-2}=0$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

$$\underbrace{(f(\alpha)-1)(x-2)+(x-1)(f(\beta)-1)}_{g(x)}=0$$

Η $g(x)$ συνεχής $[1,2]$ ως π.σ.σ

$g(1)=-(f(\alpha)-1)=1-f(\alpha)>0$

$g(2)=f(\beta)-1<0$

Άρα $g(1)g(2)<0$ Bolzano $\exists\, \xi\in(1,2)$ τ.ω $g(\xi)=0$.

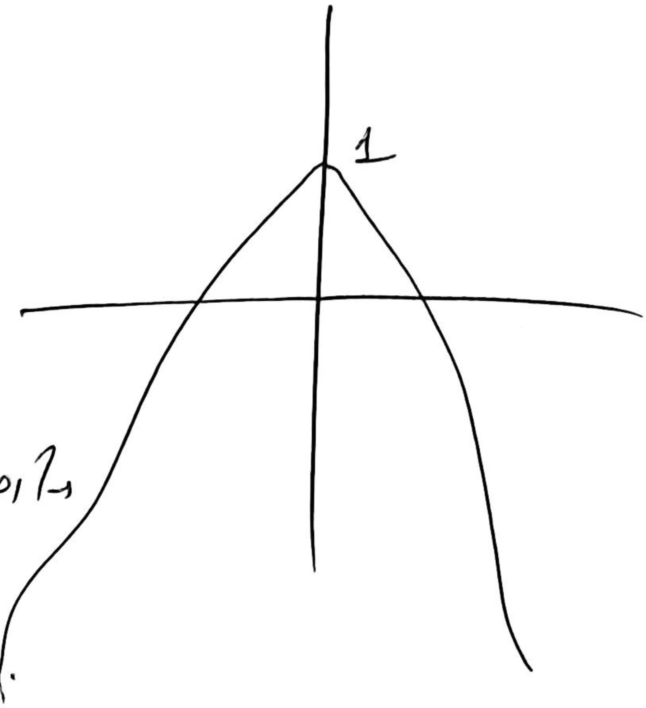
Το Σ.Τ.$f=(-\infty,1]$ αυτό σημαίνει

ότι $f(x)\leq 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

άρα $f(\alpha)<1$ όπως $f(\beta)<1$

$1-f(\alpha)>0 \qquad f(\beta)-1<0$

(Σ) $f(x)=a$




Αν $a<1$ τοτε 2 ρίζες

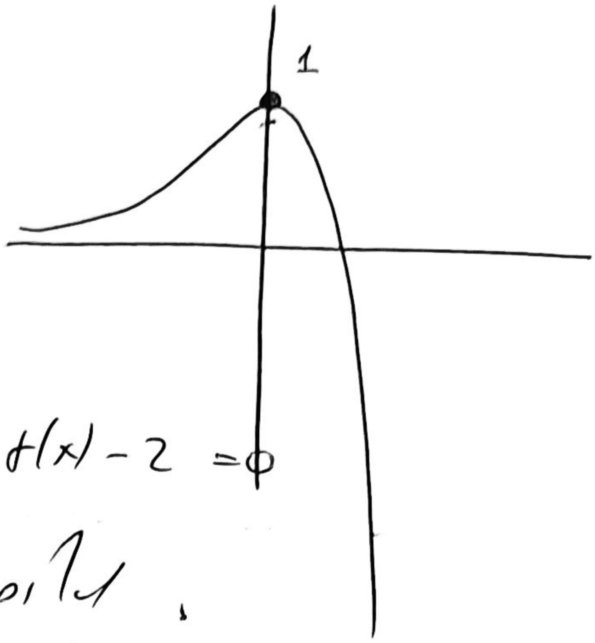
Αν $a=1$ τοτε 1 ρίζα

Αν $a>1$ καμια ρίζα.

**21** • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

•

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0 \nearrow$ | $1$ | $\searrow -\infty$ |




Νδο η εξίσωση $f^2(x) + f(x) - 2 = 0$

έχει ακριβώς δύο ρίζες.

$$f^2(x) + f(x) - 2 = 0 \overset{f(x)=t}{\iff} t^2 + t - 2 = 0$$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$t = \frac{-1 \pm 3}{2}$ → $t = 1 \Rightarrow f(x) = 1$

→ $t = -2 \iff f(x) = -2$.

Άρα αρκεί νδο οι εξισώσεις $f(x) = 1$

και $f(x) = -2$ ~~συνολικά~~ έχουν δύο ρίζες.

Σύνολο
2 ρίζες

$f(x) = 1$

1 ρίζα ($x = 0$).

Αν $x < 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 1$

Αν $x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 1$.

$f(x) = -2$

$x \in (-\infty, 0]$

• $f \nearrow$

• συνεχής

• $ΣΤ_f = (0, 1]$

το $-2 \notin ΣΤ_f$ άρα δεν έχω ρίζα.

$x \in [0, +\infty)$

• $f \searrow$

• $f$ συνεχής

• $ΣΤ_f = (-\infty, 1]$

το $-2 \in ΣΤ_f$ άρα έχω μοναδική ρίζα

**22** (γ) $f: (0,+\infty) \longrightarrow (-\infty, 1)$

$\Big\downarrow$ σημαίνει

$f(x) < 1$

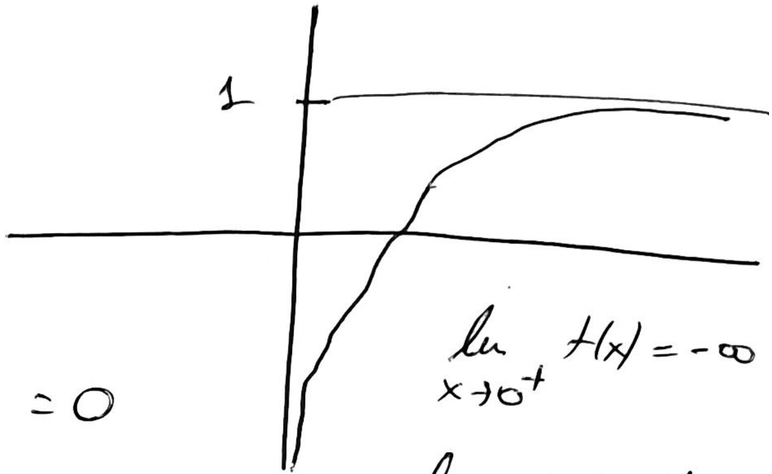
$\forall x > 0$

$f$ συνεχής

$f \nearrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\frac{0}{-\infty} = 0 \cdot \frac{1}{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$




$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$

Θυμήσου

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty$$

(δ) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-f(x))}{1-f(x)} \underset{\substack{x\to+\infty \\ u\to 1}}{\overset{f(x)=u}{=\!=\!=}} \lim_{u\to 1^-} \frac{\ln(1-u)}{1-u}$$

| $u$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|
| $1-u$ | $+$ | $0$ | $-$ |

πρέπει $1-u>0$

$1>u$

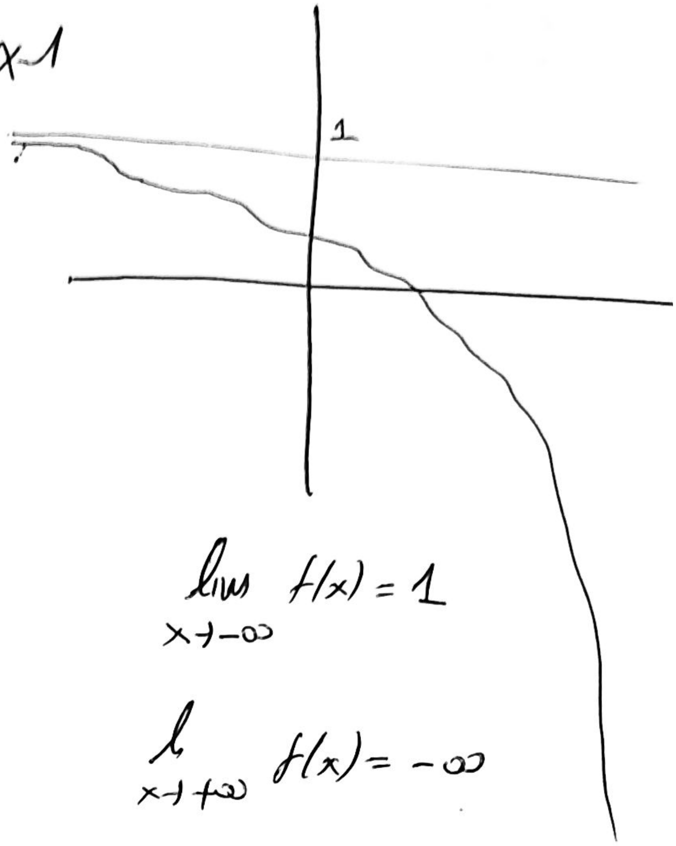
$$= \frac{-\infty}{0} = -\infty \cdot \frac{1}{0} \cancel{+\infty} = (-\infty)(+\infty) = \underline{-\infty}$$

## (23)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

$f \downarrow$

$Σ.Τ_f = (-\infty, 1)$




$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x f(x) - x^2}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}(f(x) - x)}{\cancel{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$

$= \dfrac{-\infty - (+\infty)}{1 - 0} = \dfrac{-\infty - \infty}{1} = -\infty$

(Γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ημx}{f(x)} = 0.$

Στο $+\infty$

$f(x) < 0$

$-1 \le ημx \le 1$

$$\boxed{-\frac{1}{f(x)} \ge \frac{ημx}{f(x)} \ge \frac{1}{f(x)}}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{f(x)} = 0 \\ &\bullet \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Από Κ.Π.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$

**24** $f: (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$

$\Sigma T_f = \mathbb{R}$

(α). $D_f = (0,+\infty)$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$ (+)

• $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} + 1 < -\frac{1}{x_2} + 1$

•

$f \nearrow$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^2 - \frac{1}{x} + 1\right) = 0 - (+\infty) + 1 = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \frac{1}{x} + 1\right) = +\infty$

(β) Αφού $f \nearrow \Rightarrow f$ γν. μονότονη $\Rightarrow f$ 1-1 άρα αντιστρέψιμη.

Έστω $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$

$f \nearrow$

$f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2))$

$x_1 < x_2$ . $f^{-1} \nearrow$

(γ) $f^{-1}$ συνεχής.

i) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f^{-1}(x)} \underset{\substack{f(f^{-1}(x))=f(t)\\ x=f(t)}}{\overset{f^{-1}(x)=t}{=\!=}} \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}=+\infty$$

ii). $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)} \underset{x=f(t)}{\overset{f^{-1}(x)=t}{=\!=}} \lim_{t\to0^+}\frac{t-f(t)}{f(t)+t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\left(t^2-\frac{1}{t}+1\right)}{t^2-\frac{1}{t}+1+t} = \lim_{t\to0^+}\frac{t-t^2+\frac{1}{t}+1}{t^2-\frac{1}{t}+1+t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t^2-t^3+1+t}{t^3-1+t+t^2} = \frac{1}{-1}=-1.$$

iii). $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)} \underset{\substack{x=f(t)\\ x\to+\infty\\ t\to}}{\overset{f^{-1}(x)=t}{=\!=}} \lim_{t\to+\infty}\frac{t-(f(t))}{f(t)+t}.$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t-\left(t^2-\frac{1}{t}+1\right)}{t^2-\frac{1}{t}+1+t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{-t^3+t^2+t+1}{t^3+t^2+t-1}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t^3}{t^2}=-\infty,$$

20/09/2024

# Ασκησας για Τριτη

Σελ 261 - 262 - 263.

2 22 α β

4 23 α γ

6 25

9 28 31

15 29 32

30 33

Την 1η ωρα του μαθηματος της Τριτης μπαινω παρουσιασας.

Η $f(x)$ ειναι συνεχη στο $x_0$

οταν $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο $x_0$

αν το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπαρχει

και ειναι πραγματικος αριθμος.

# Σελ 285

2 (B) $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(1)=1$

Είναι παρ/μη στο 1;

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1}{1}} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x\to 1} -\frac{1}{x} = -1$$

8) $f(x) = 1 + 2ημ^2 x$

Είναι παρ/μη στο 0;

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2ημ^2 x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2ημ^2 x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} 2ημx \cdot \frac{ημx}{x} = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

③ $f(x) = \sqrt{x-1} + 2x - 1$

Είναι παρ/μη στο 1;

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x-1}+2x-1-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x-1}+2x-2}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x-1}+(2x-2)}{x-1}.$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{[\sqrt{x-1}+(2x-2)][\sqrt{x-1}-(2x-2)]}{(x-1)[\sqrt{x-1}-(2x-2)]} = \frac{(x-1)-(2x-2)^2}{(x-1)(\sqrt{x-1}-(2x-2)]} = \frac{x-1-(4x^2-8x+4)}{(x-1)(\sqrt{x-1}-(2x-2))}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\overset{*}{-4x^2+9x-5}}{(x-1)(\sqrt{x-1}-(2x-2)]} \overset{\lim_{x\to1}}{=} \frac{(x-\cancel{1})(x-5/4)}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x-1}-(2x-2))} = \frac{1-5/4}{-2-2} = \frac{1-5/4}{-4}$$

$*\ \Delta = 81-4(-4\cdot(-5))$

$\Delta = 81-80$

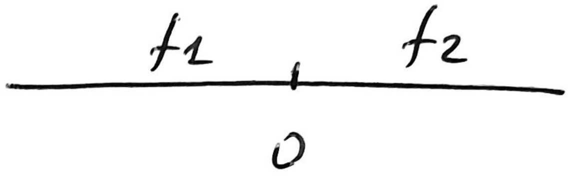
$\Delta = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{-9\pm1}{-8} \begin{cases} -8/8 = 1 \\ -10/-8 = 5/4 \end{cases}$

(5) $f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x - 2, & x \leq 0 \\ x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$

Είναι συνεχ/ στο 0;

$$\boxed{f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)} \checkmark$$




- $f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 - 2 = -1.$

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sigma\upsilon\nu x - 2 = 1 - 2 = -1$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - 1) = -1$

$\left.\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = -1$

Είναι συνεχ/ στο 0!

Είναι παρ/μη στο 0;

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0}$$

- $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 2 - (-1)}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-1-(-1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0.$$

5 δ $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta\mu \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 . \end{cases}$

Είναι συνεχής στο 0;

• $f(0) = 0$

• $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left( x^3 \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$ ,

ημ∞

$$-1 \leq \eta\mu \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq 1 .$$

$$|x^3| \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq 1 \cdot |x^3|$$

$$\left| x^3 \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x^3|$$

$$\boxed{-|x^3| \leq x^3 \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x^3|}$$

ΝΑΙ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ 0!

• $\lim_{x \to 0} -|x^3| = 0$

• $\lim_{x \to 0} |x^3| = 0$

$\Big\}$ Από Κ.Π $\lim_{x \to 0} x^3 \eta\mu \frac{1}{x} = 0$

Είναι παρ/μη στο 0;

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 ημ\frac{1}{x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0$$

$$-1 \le ημ\frac{1}{x} \le 1$$

$$\boxed{-x^2 \le x^2 ημ\frac{1}{x} \le x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} -x^2 = 0 \\ \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0$$

(4) $f(x) = x+2 - x\,\eta\mu|x|$

Είναι παρ/μη στο 0;

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \cancel{2} - x\cdot\eta\mu|x| - \cancel{2}}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - x\,\eta\mu|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1-\eta\mu|x|)}{\cancel{x}} = 1$$

⑤ ε $f(x) = |x-3|$

Είναι παρ/μη η $f$ στο 3;

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{|x-3|-0}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$$

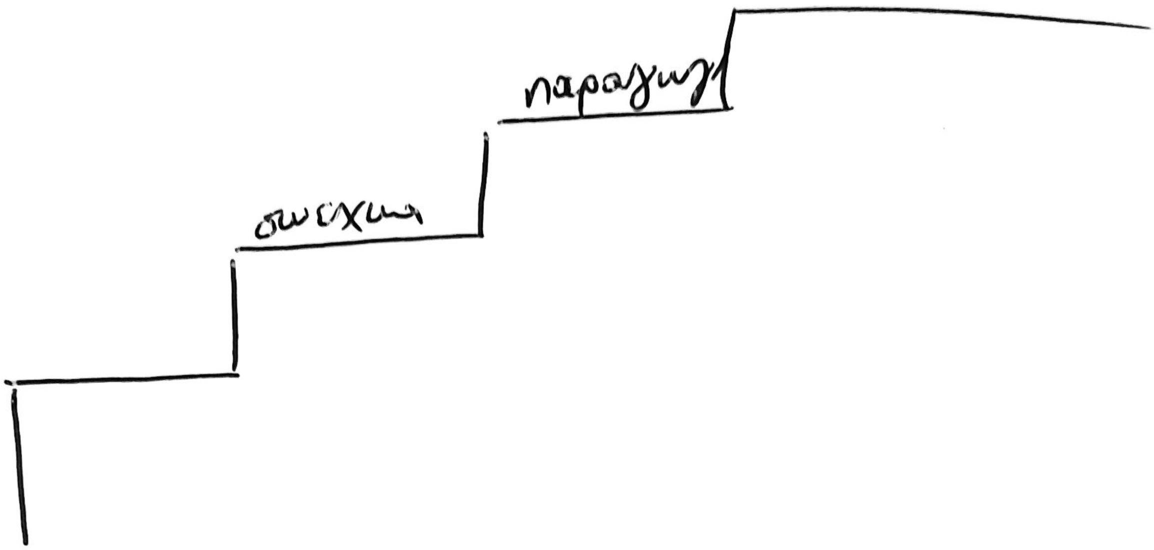
• Αν $x>3$ τοτε $\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3} = 1$

• Αν $x<3$ $\to \lim_{x\to 3^+} \frac{-\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = -1$

Άρα το όριο δεν υπαρχει

→ Δεν είναι παραγωγίσιμη

# Προσοχη




1. Αν $f$ συνεχης $\not\Rightarrow$ παρ/μη.
2. Αν $f$ οχι συνεχης $\Rightarrow$ οχι παρ/μη
3. Αν $f$ παραγ/μη $\Rightarrow$ $f$ συνεχης.
4. Αν $f$ οχι παρ/μη $\not\Rightarrow$ $f$ συνεχης

Εστω $f(x) = x^3$

Είναι παρ/μη στο 1;

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}} = 3.$$

$$\Rightarrow f'(1) = 3.$$

Χειροκίνητος Τρόπος

---

Αυτόματος Τρόπος

$f(x) = x^3$.

$f'(x) = 3x^2$

$f'(1) = 3$

# Κανόνες Παραγώγισης

1. $(c)' = 0$

2. $(x)' = 1$

3. $(e^x)' = e^x$

4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

7. $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

8. $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$

9. $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

10. $(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

11. $(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

$$(c\,f(x))' = c\,f'(x).$$

④ $f(1)=2$

$f(f(x))=4$

Ν.δ.ο $\exists x_0 \in (1,2)$

τ.ω $f(x_0)=3$.

$f(x)=3$

$\underbrace{f(x)-3}_{g(x)}=0$

Η $g(x)$ συνεχής ως π.σ.σ.

$$\left.\begin{array}{l} g(1)=f(1)-3=2-3=-1 \\ g(2)=f(2)-3=4-3=1. \end{array}\right\} g(1)\,g(2)<0$$

Bolzano

$\exists x_0 \in (1,2)$

τ.ω $g(x_0)=0$.

$f(x_0)-3=0$

$f(x_0)=3$.

$f(f(1))=4$

$f(2)=4$

## Σελ 261

$f(0)=1 \quad f(1)=3$

**(2)** $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Νδο $\exists\, \xi \in (0,1)$ τ.ω $f(\xi)=2$

$$f(x)=2.$$

$$\underbrace{f(x)-2}_{g(x)}=0$$

Η $g(x)$ συνεχής $[0,1]$ ως π.σ.σ

$g(0)=f(0)-2=1-2=-1$

$g(1)=f(1)-2=3-2=1$

$g(0)\,g(1)<0$

Bolzano $\exists\, \xi \in (0,1)$ τ.ω

$g(\xi)=0$ ✓

⑥ $f: [-1,3] \to \mathbb{R}$. συνεχή

$f \downarrow$.

Ν.δ.ο. $\exists x_0 \in (-1,3)$ τ.ω. $6f(x_0) = 2f(-1) + f(0) + 3f(3)$

Η $f$ συνεχής $[-1,3]$ άρα από ΘΜΕΤ

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [-1,3]$$

$$\left.\begin{aligned} m \leq f(-1) \leq M &\Rightarrow 2m \leq 2f(-1) \leq 2M \\ m \leq f(0) \leq M & \\ m \leq f(3) \leq M &\Rightarrow 3m \leq 3f(3) \leq 3M \end{aligned}\right\} (+)$$

$$6m \leq 2f(-1) + f(0) + 3f(3) \leq 6M$$

$$m \leq \frac{2f(-1) + f(0) + 3f(3)}{6} \leq M$$

Ο αριθμός $\dfrac{2f(-1) + f(0) + 3f(3)}{6} \in \Sigma T_f$.

άρα $\exists!\, x_0 \in [-1,3]$ τ.ω. $f(x_0) = \dfrac{2f(-1) + f(0) + 3f(3)}{6}$

9 $f(3)=2$ Βρει $f(2)$ και $f(1)$.

$f(x)\,f(f(x))=1$

$f(3)\,f(f(3))=1$.

$2\cdot f(2)=1$

$f(2)=\frac{1}{2}$

Επειδή $f(2)\neq f(3)$ τοτε το $1\in\left(\frac{1}{2},2\right)$

αρα $\exists\,\xi\in(2,3)$ τ.ω $f(\xi)=1$.

$f(\xi)\cdot f(f(\xi))=1$

$1\cdot f(1)=1$

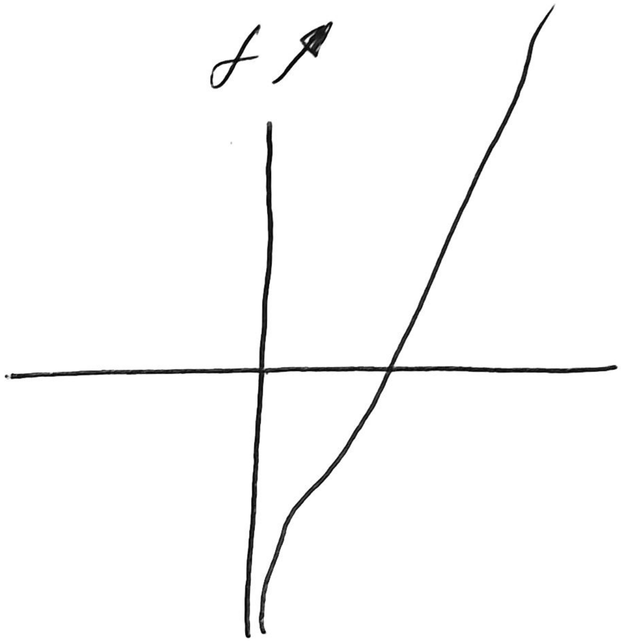
$f(1)=1$.

(15) $f(x) = x + \ln x$ $\qquad D_f = (0, +\infty)$

(α) • $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$

• $x_1 < x_2$ $\quad$ (+) $\quad f(x_1) < f(x_2)$

$f \nearrow$



• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + \ln x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\Sigma T_f = \mathbb{R}$.

(B) i) $B = [1, e]$.

$f(1) = 1$ $\qquad \Sigma T_f = [1, e+1]$.

$f(e) = e + 1$

ii). $B = (1, e]$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$ $\qquad \Sigma T_f = (1, e+1)$.

$f(e) = e + 1$

iii) $B = [1, +\infty)$

$H(1) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} H(x) = +\infty$

$\Sigma T_f = [1, +\infty)$

**25** $f(x) = x + \ln(1+e^{x})$.

Πρέπει $1+e^{x} > 0$ που ισχύει

$D_f = \mathbb{R}$

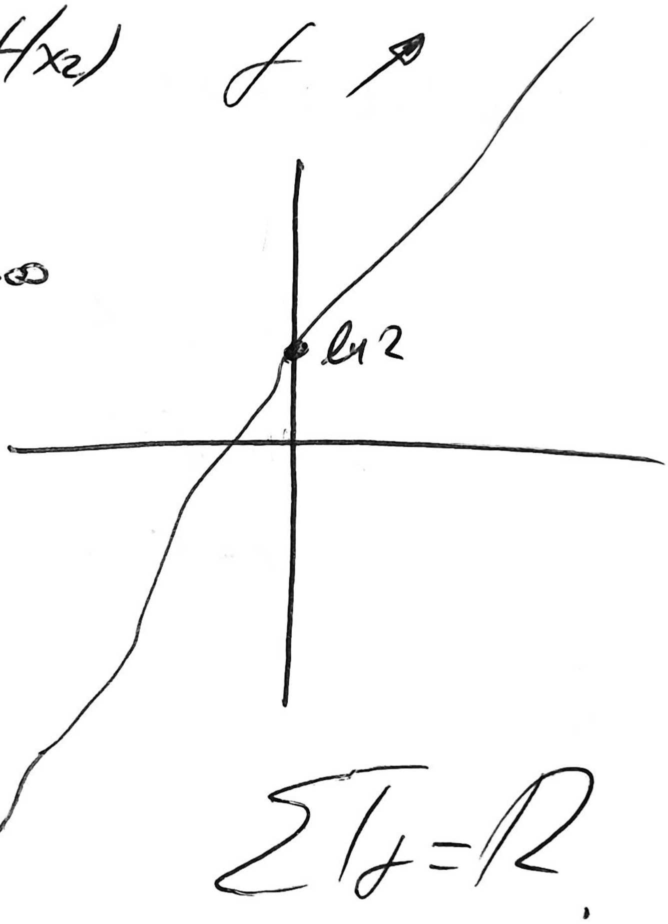
• $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}+1 < e^{x_2}+1$

$\ln(1+e^{x_1}) < \ln(e^{x_2}+1)$

$f(x_1) < f(x_2)$ $f \nearrow$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + \ln(1+e^{x}) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$




$f(D_f) = \mathbb{R}$.

(B) $e^{f(f(x))} < 6$

$f(f(x)) < \ln 6$

$f(f(x)) < f(\ln 2)$

$f \nearrow$

$f(x) = x + \ln(1+e^{x})$

$f(\ln 2) = \ln 2 + \ln(1+e^{\ln 2}) = \ln 2 + \ln(3)$

$= \ln 2 \cdot 3 = \ln 6$

$f(x) < \ln 2$

$f(x) < f(0)$

$x < 0$.

(1) $f\left(\ln(e^{2x}+e^{x})-2019\right)=\ln\dfrac{1+e}{e^{2}}$

$f\left(\ln(e^{2x}+e^{x})-2019\right)=\ln(1+e)-\ln e^{2}$

$f\left(\ln(e^{2x}+e^{x})-2019\right)=\ln(1+e)-2$

$f\left(\ln(e^{2x}+e^{x})-2019\right)=f(-1)$

$f(-1)=-1+\ln(1+e^{-1})=\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)-1=$

$=\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)-1=$

$=\ln(e+1)-\ln e-1=$

$=\ln(e+1)-1-1=$

$=\ln(e+1)-2.$

$\ln(e^{2x}+e^{x})-2019=-1$

$\ln(e^{2x}+e^{x})=2018.$

$\ln\left(e^{x}(e^{x}+1)\right)=2018$

$\ln e^{x}+\ln(e^{x}+1)=2018.$

$x + \ln(e^x+1) = 2018$

$f(x) = 2018$


- $f$ συνεχής.
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = \mathbb{R}$.

Το $2018 \in \Sigma T_f$ άρα $\exists!\ \xi \in D_f$

τ.ω $f(\xi) = 2018$

**28** $f(x) = \begin{cases} \lambda(x-1)+e^x, & x \leq 1 \\ e+\ln x, & x>1 \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \lambda(x-1)+e^x = e$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e+\ln x = e$

$\lim_{x\to 1} f(x) = e$

$f(1) = e$.

Συνεχής στο 1

όμως $f$ συνεχής στο $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$

ως π.δ.δ.

Άρα συνεχής!

(B) Αφού δεν ικανοποιεί τότε το ΘΕΤ.

και $f$ συνεχής τότε $f(0)=f(e)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -\lambda+1 \\ f(e) = 1+e \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} -\lambda+1 = 1+e \\ -\lambda = e \\ \hline \lambda = -e \end{array}$$

(γ).
$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -e(x-1)+e^x, & x \leq 1 \\ e+\ln x, & x > 1 \end{cases}}$$

$f(x)=3$


$$\underbrace{f(x)-3}_{g(x)} = 0$$

$g(0)=f(0)-3 = e+1-3 = e-2>0$

$g(1)=f(1)-3 = e-3<0$

$g(e) = e+1>0$

$g(0)g(1)<0$ Bolzano $\exists \xi_1 \in (0,1)$ τ.ω $g(\xi_1)=0$

$g(1)g(e)<0$ Bolzano $\exists \xi_2 \in (1,e)$ τ.ω $g(\xi_2)=0$.

8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ημx}{f(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ημx}{\underbrace{e^x - e(x-1)}_{+}}$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - e(x-1) = 0 - e(-\infty) = +\infty$

$-1 \le ημx \le 1$

$-\dfrac{1}{e^x - e(x-1)} \le \dfrac{ημx}{e^x - e(x-1)} \le \dfrac{1}{e^x - e(x-1)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{e^x - e(x-1)} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x - e(x-1)} = 0$

Άρα Κ.Π. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ημx}{e^x - e(x-1)} = 0$

**30**

$f$ συνεχής

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)+\eta\mu x-2}{x^2+x} = 1.$

- $e^{-x}\left(f^2(x)-1\right) = 2f(x) - e^{x}$

α) Βρείτε το $f(0)$

Θέτω $\dfrac{f(x)+\eta\mu x-2}{x^2+x} = g(x),$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$

$$\boxed{f(x) = (x^2+x)\,g(x) - \eta\mu x + 2}$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^2+x)\,g(x) - \eta\mu x + 2$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 2,$

Αφού $f$ συνεχής $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$

$f(0) = 2.$

(B). $e^{-x}\left(f^2(x)-1\right) = 2f(x) - e^x$

$$f^2(x) - 1 = 2f(x)e^x - e^{2x}$$

$$f^2(x) - 2f(x)e^x + e^{2x} = 1.$$

$$\left(f(x) - e^x\right)^2 = 1^2$$

$$|\underbrace{f(x) - e^x}_{\varphi(x)}| = |\overset{+}{1}|$$

$$|\overset{+}{\varphi(x)}| = 1 \Rightarrow \varphi(x) = 1$$

$$f(x) - e^x = 1$$

$$\underline{f(x) = e^x + 1}$$

P.p.a. $\varphi(x)$

$\varphi(x) = 0$

$|\varphi(x)| = 0$ $\qquad \varphi(0) = f(0) - 0 = 2$

$1 = 0$ $\qquad \varphi(x) > 0.$

Atunci

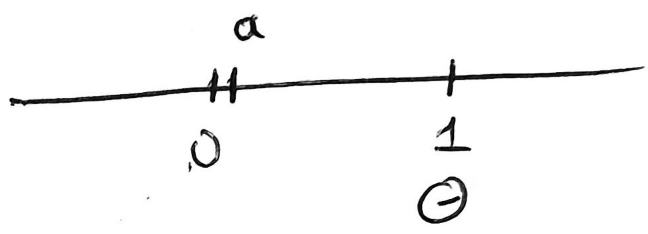
$\varphi(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0 \vee \varphi(x) < 0.$

(γ). Αρκει νδο η εξισωση $f(x)=g(x)$

εχει μοναδικη λυση στο $(0,1)$

$$e^x+1=\frac{1}{x}+1$$

$$\underbrace{e^x-\frac{1}{x}}_{h(x)}=0 \quad \nearrow$$



$h(0)=\,/$

$h(1)=e^1-1=e-1<0$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0^+} e^x-\frac{1}{x}=1-(-\infty)=+\infty$$

αρα $\exists\, \alpha>0$ κοντα στο $0^+$ τ.ω $h(\alpha)>0$

$h(\alpha)h(1)<0$ Bolzano

$\exists\, \xi\in(\alpha,1)$ τ.ω $h(\xi)=0$

3

(b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)-2^x}{f(x)-3^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+1-2^x}{e^x+1-3^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}-\frac{2^x}{e^x}\right)}{3^x\left(\frac{e^x}{3^x}+\frac{1}{3^x}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \overset{0}{\cancel{\left(\frac{e}{3}\right)^x}} \cdot \frac{1+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{e^x}}}-\overset{0}{\cancel{\left(\frac{2}{e}\right)^x}}}{\overset{0}{\cancel{\left(\frac{e}{3}\right)^x}}+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{3^x}}}-1}$$

$$0 \cdot \frac{1}{-1} = 0.$$

# Επόμενο Μάθημα

Σελ 384

1

2

3

6

7

8

9.

(25) $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} = 0\cdot 0 =$

$= 0.$

$\rightarrow \lim_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} \xlongequal[\chi\alpha\sigma\iota\mu\omicron]{\eta\mu\,\infty}$

$-1\le \eta\mu\frac{1}{x}\le 1$

$\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le 1$

$|x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le 1\cdot|x|$

$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|x|$

$$\boxed{-|x|\le x\eta\mu\frac{1}{x}\le|x|}$$

$\left.\begin{array}{l}\cdot \lim_{x\to 0} -|x| = 0\\ \cdot \lim_{x\to 0}|x| = 0\end{array}\right\}\lim_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\,\eta\mu\frac{1}{x}}{e^x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{e^x} = 1 \cdot \frac{1}{e^{+\infty}} = 1 \cdot \frac{1}{+\infty} = 0.$$

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left( x\,\eta\mu\frac{1}{x} + \cancel{\overset{0}{\frac{1}{x}\eta\mu x}} \right)$

$$\to \lim_{x\to+\infty} x\,\eta\mu\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \cancel{x}\, \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\to \lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} \quad \frac{\eta\mu\infty}{\text{χασιν}} \quad 0$$

$-1 \le \eta\mu x \le 1$

$$\boxed{-\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

(δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 f(x)}{\sqrt{x^2+1}-1} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \cdot x\,\text{ημ}\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\,\text{ημ}\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \cancel{\frac{\frac{\text{ημ}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\quad}}\ \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{ημ}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\cancel{x^2}} = +\infty$$

(18) $f(x) = x^5 + x^3 + x$

(α) Μονοτονια και νδο $f$ αντιστρεψιμη

Μονοτονια) • $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1^5 \leq x_2^5$

• $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1^3 \leq x_2^3$

• $x_1 \leq x_2$ +

$x_1^5 + x_1^3 + x_1 \leq x_2^5 + x_2^3 + x_2$

$\Leftrightarrow f(x) \leq f(x_2)$ Αρα $f \uparrow$

Αντιστροφη: Πρέπει να δείξω οτι είναι 1-1:

Αφου $f \uparrow \Rightarrow f$ 1-1 αρα αντιστρεψιμη.

(β) εξισωση $(x^2+1)^2 + 1 = \dfrac{2-x^2}{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+1)^2 \cdot (x^2+1)^3 + (x^2+1)^3 = 2 - x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+1)^5 + (x^2+1)^3 = 2 - x^2 \Leftrightarrow$

$(x^2+1)^5 + (x^2+1)^3 + x^2+1 = \cancel{x^2} + 1 + 2 - \cancel{x^2}$

$f(x^2+1) = f(1)$

$f$ 1-1

$x^2+1 = 1$ $\quad x^2 = 0$ $\quad x = 0.$

① Νδο $f(e^x) > f(1-x^3)$ $\forall x>0$

$f \nearrow$

Νδο $e^x > 1-x^3$ $\forall x>0$

$$\underbrace{e^x - 1 + x^3}_{\varphi(x)} > 0$$

$\varphi(x) > 0$

$\varphi(x) > \varphi(0)$

$\varphi \nearrow$

$x > 0$

Μονοτονια $\varphi(x)$

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$

$\Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3$ (2)

$\oplus$ $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$

$\varphi \nearrow$

⑤ ανισωση $\underbrace{(f^{-1}(x))^5 + (f^{-1}(x))^3 + f^{-1}(x)}$ $> 3$

$f(f^{-1}(x)) > 3$

$x > 3$

**15** $f(x) = x^3 + e^{x+1}$

(β1) Ν.δ.ο $f$ αντιστρέφεται.

Έστω $x_1, x_2$ $x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \\ \bullet\ x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1+1} < e^{x_2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^3 + e^{x_1+1} < x_2^3 + e^{x_2+1}$$

$f(x_1) < f(x_2)$

οπότε $f \uparrow$, $f$ 1-1, $f$ αντιστρέφεται

(β) Εξίσωση $\left(f^{-1}(x)\right)^3 = x^2 - e^{1+f^{-1}(x)}$

$$\left(f^{-1}(x)\right)^3 + e^{1+f^{-1}(x)} = x^2$$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x^2$$

$$x = x^2$$

$$x - x^2 = 0$$

$$x(1-x) = 0$$

$x = 0$ $\quad$ $x = 1$

① $(x+\ln x-1)^3+xe^x>e$

$$\boxed{f(x)=x^3+e^{x+1}}$$

$\rightarrow f(x+\ln x-1)=(x+\ln x-1)^3+e^{x+\ln x-1+1}$

$=(x+\ln x-1)^3+e^{x+\ln x}=$

$=(x+\ln x-1)^3+e^x\cdot e^{\ln x}$

$=(x+\ln x-1)^3+xe^x$

$\cdot\ f(x+\ln x-1)>e$

$f(x+\ln x-1)>f(0)$

$f\nearrow$

$\underbrace{x+\ln x-1}_{t(x)\ \nearrow}>0,\ \rightarrow\ t(x)>0$

$t(x)>t(1)$

$x>1$

(δ) $f^{-1}(x)=0$

$f(f^{-1}(x))=f(0)$

$x=e$.

| $x$ | | $e$ | |
|---|---|---|---|
| $f^{-1}(x)$ | $\nearrow$ $-$ | $0$ | $+$ $\nearrow$ |

Αφού $f\nearrow \Rightarrow f^{-1}\nearrow$

Απόδειξη

Έστω $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$

$\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}$

$f(f^{-1}(x_1))<f(f^{-1}(x_2))$

$x_1<x_2$

$x<e \Rightarrow f^{-1}(x)<f^{-1}(e) \Rightarrow f^{-1}(x)<0$

$x>e \Rightarrow f^{-1}(x)>f^{-1}(e) \Rightarrow f^{-1}(x)>0$.

# 5. Σελ 385

- $f(x) = \frac{\alpha - 1}{x}$ $\qquad f(1) = 1$

- $g(x) = x^2 - 3x + 3$

(α) Βρεί το α και βρεί τα x ώστε η $C_f$ να είναι πάνω από την ευθ. $y=1$.

$f(1) = \frac{\alpha - 1}{1} = 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$.

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R}^*}$$

$f(x) > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{x}{x} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0$

| $x$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $\frac{1-x}{x}$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |

$x \in (0, 1)$.

(B) $f(x) = g(x)$ $\qquad \dfrac{1}{x} = x^2 - 3x + 3 \iff$

$\iff 1 = x^3 - 3x^2 + 3x \quad \Rightarrow$

$0 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow (x-1)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$(x-1)^3 = 0$

$x = 1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | −3 | 3 | −1 | 1 |
| | 1 | −2 | 1 | |
| 1 | −2 | 1 | 0 | |

$(x-1)\cdot(x^2 - 2x + 1)$

$f(x) = g(x) \iff \dfrac{1}{x} = x^2 - 3x + 3 \iff 0 = x^2 - 3x + 3 - \dfrac{1}{x}$

$$0 = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x} = g(x) - f(x).$$

$(x-1)^3$

| $x$ | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ | − | | − | 0 | + |
| $x$ | − | | + | | + |
| $g(x) - f(x)$ | + | | − | | + |

$x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$g(x) - f(x) > 0$

$g(x) > f(x)$

$x \in (0, 1) \Rightarrow g(x) - f(x) < 0$

$g(x) < f(x)$

(γ) Αν $h(x) = \ln x - 1$

$D_h = (0, +\infty)$

$f \circ h$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R}^*$

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = \frac{1}{\ln x - 1}$$

$x \in D_h$ και $h(x) \in D_f$

$x > 0$

$\ln x - 1 \neq 0$

$\ln x \neq 1$

$e^{\ln x} \neq e^1$

$x \neq e$

$$D_{f \circ h} = (0, e) \cup (e, +\infty)$$

(8) $\varphi(x) = \dfrac{\cancel{x^2} - 3x + 3 - \cancel{x^2}}{3x}$

$$\varphi(x) = \frac{3-3x}{3x} = \frac{1-x}{x}$$

$$\varphi(x) = \frac{1-x}{x} \quad x \neq 0$$

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

$$\frac{1-x_1}{x_1} = \frac{1-x_2}{x_2}$$

$$(1-x_1)\,x_2 = x_1(1-x_2)$$

$\varphi$ 31-1

$$x_2 - \cancel{x_1 x_2} = x_1 - \cancel{x_1 x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

$$f(x) = y$$

$$\frac{1-x}{x} = y$$

$$1 - x = yx$$

$$1 = yx + x$$

$$1 = x(y+1)$$

$$x = \frac{1}{y+1} \qquad y \neq -1$$

$$\downarrow$$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{y+1}$$

$$\boxed{\begin{gathered} f^{-1}(x) = \frac{1}{x+1} \\ D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{-1\} \end{gathered}}$$

Τεσλ

$$x \neq 0$$

$$\frac{1}{y+1} \neq 0$$

$1 \neq 0$ που ισχυυ

10 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\downarrow$

- $f(e^x + x) + f(1-2x) = 0$

$$\xrightarrow{x=0}$$

$f(e^0 + 0) + f(1 - 2\cdot 0) = 0$

$f(1) + f(1) = 0$

$2f(1) = 0$

$f(1) = 0$

(a) $f(x) < 0$

$f(x) < f(1)$

$f \downarrow$

$x > 1$

(B) Αφού $f\downarrow$ αντιστρέφεται

$f^{-1}(f(x) - e^{x-1} + 1) > 1$

$f \downarrow$

$f(f^{-1}(f(x) - e^{x-1} + 1)) < f(1)$

$f(x) - e^{x-1} + \cancel{1} < \cancel{1}$

$f(x) - e^{x-1} < 0$

$$\underbrace{f(x) - e^{x-1}}_{\varphi(x)} < 0.$$

$$\varphi(x) < 0$$

$$\varphi(x) < \varphi(1)$$

$$\varphi \downarrow$$

$$x > 1$$

Μονοτονία $\varphi(x)$

- $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 \leq x_2 - 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow e^{x_1-1} \leq e^{x_2-1} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow -e^{x_1-1} \geq -e^{x_2-1}$

$\oplus$

$$f(x_1) - e^{x_1-1} \geq f(x_2) - e^{x_2-1}$$

$$\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$$

$$\varphi \downarrow$$

γ

$$f^{-1}(x) + f(x+1) = x+1$$

$$\underbrace{f^{-1}(x) + f(x+1) - x - 1}_{h(x)} = 0$$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1+1 < x_2+1 \Rightarrow f(x_1+1) > f(x_2+1)$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1-1 > -x_2-1$

$(+)$

$h(x_1) > h(x_2)$

$h \downarrow$

$h$ 1-1

$h(x) = 0$

$h(x) = h(0)$

$h$ 1-1

$\underline{\underline{x = 0}}$

$$h(0) = f^{-1}(0) + f(1) - 0 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

- $f(1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = \underline{1}$

**26** $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$\sqrt{4x^2+1} - x \le f(x) + x \le \sqrt{x^2+1} \quad \forall x>0.$$

ⓐ Νδο $f(x)>0 \quad \forall x>0$.

$$\boxed{\sqrt{4x^2+1} - 2x \le f(x) \le \sqrt{x^2+1} - x}$$

$$\boxed{\varphi(x) = \sqrt{4x^2+1} - 2x}$$

$\varphi(x) = 0$

$\sqrt{4x^2+1} - 2x = 0$

$\sqrt{4x^2+1} = 2x$

$4\cancel{x^2}+1 = \cancel{4x^2}$

$1 = 0$

Άτοπο!

Επειδή $\varphi(x) \neq 0$

και συνεχής

$\Rightarrow \varphi(x)>0$ ή $\varphi(x)<0$

$\forall x>0$

$\varphi(1) = \sqrt{5} - 2 > 0$

$\varphi(x) > 0$

$\Rightarrow f(x) > 0$

(β) $\sqrt{4x^2+1} - 2x \leq f(x) \leq \sqrt{x^2+1} - x$

$\cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = 0$

$\cdot \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

Άρα Κ.Π $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

(γ) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3-x}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} (3-x)\,\dfrac{1}{f(x)_{(+)}}$

$= (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty.$

(δ) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{f(x)+1}-1}{f(x)} \;\underset{\substack{x\to+\infty \\ t\to 0}}{\overset{f(x)=t}{=\!=\!=}}\; \lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t+1}-1}{t}$

$= \lim_{t\to 0} \dfrac{\cancel{t}}{\cancel{t}\left(\sqrt{t+1}+1\right)} = \dfrac{1}{2}.$

# Ασκησεις για το μαθημα της Τριτης

Σελ 384

1

2

3

6

7

8

9

11

24

32

29

30

31

Η $f(x)$ συνεχής στο $x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ υπάρχει}$$

και είναι πραγματικός αριθμός

$(x)' = 1$

$(c)' = 0$

$(x^{\nu})' = \nu x^{\nu - 1}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(c f(x))' = c f'(x)$.

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) g'(x)$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$$

9. (B) $f(x) = x \ln x$

$f'(x) = (x)' \ln x + x (\ln x)'$

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$$\boxed{f'(x) = \ln x + 1.}$$

(8). $f(x) = (x^2+2) e^x$

$f'(x) = (x^2+2)' e^x + (x^2+2) (e^x)'$

$$\boxed{f'(x) = 2x e^x + (x^2+2) e^x}$$

(10) $f(x) = (3x-1)(1+\ln x)$

$f'(x) = (3x-1)' \cdot (1+\ln x) + (3x-1) \cdot (1+\ln x)'$

$f'(x) = (3x' - 0) \cdot (1+\ln x) + (3x-1) \cdot (0 + \frac{1}{x})$

$f'(x) = 3 \cdot (1+\ln x) + (3x-1) \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = 3 + 3\ln x + 3\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 6 + 3\ln x - \frac{1}{x}$

**8.** (δ) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 3x - 1$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x - 1$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{5}{2}(x^2)' - 3(x') - 0$

$f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - \frac{5}{2}2x - 3 - 0$

$f'(x) = x^2 - 5x - 3$

**3.** (B) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}}$$

Είναι παρ/μη στο 0; ΟΧΙ

• $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

6. (13) $f(x) = 5x^4$

$f'(x) = 5 \cdot (x^4)'$

$f'(x) = 5 \cdot 4 \cdot x^3$

$\boxed{f'(x) = 20x^3}$

(18) $f(x) = \frac{1}{5} x^5$

$f'(x) = \frac{1}{5} (x^5)'$

$f'(x) = \frac{1}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5}x^4 = x^4$

(20) $f(x) = -\frac{2x^3}{3}$

$f(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^3$

$f(x) = -\frac{2}{3} (x^3)'$

$f(x) = -\frac{2}{3} 3x^2$

$f(x) = -2x^2$

5. (8) $f(x) = 5 \cdot \text{συν}x$

$f'(x) = 5\,(\text{συν}x)'$

$f'(x) = 5\,(-\text{ημ}x)$

$\boxed{f'(x) = -5\,\text{ημ}x}$

(9) $f(x) = 2\sqrt{x}$

$f'(x) = 2 \cdot (\sqrt{x})'$

$f'(x) = \cancel{2}\,\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(10) $f(x) = \dfrac{e^x}{2}$

α' τρόπος

$f(x) = \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}e^x$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^x)'$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{2}e^x}$

β' τρόπος

$f(x) = \dfrac{e^x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{(e^x)' \cdot 2 - e^x \cdot (2)'}{2^2}$

$f'(x) = \dfrac{2e^x - 0}{4} = \dfrac{e^x}{2}$

**29.** (α) $f(x) = \begin{cases} e^x \eta\mu x, & x \le 0 \\ x + \sigma\upsilon\nu x - 1, & x > 0 \end{cases}$

- Όταν $x < 0$

$f'(x) = (e^x)'\eta\mu x + e^x(\eta\mu x)' = e^x \eta\mu x + e^x \sigma\upsilon\nu x = e^x(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)$

όταν $x > 0$

$f'(x) = (x)' + (\sigma\upsilon\nu x)' - \cancel{(1)'}^{0} = 1 - \eta\mu x$

Είναι παραγωγίσιμη στο 0;

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x \eta\mu x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x + \sigma\upsilon\nu x - 1) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1 + 0 = 1$

Άρα όχι παραγωγίσιμη

$f'(x) = \begin{cases} e^x(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x), & x \le 0 \\ 1 + \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$

NAI

## 2. Σελ 317

(β) $f(x)=\alpha^2$ $\qquad$ $x_0=1$

$f'(x)=0$

$f'(1)=0$

(δ) $f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad$ $x_0=\frac{1}{4}$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(\frac{1}{4})=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}}=1.$

$f'(\frac{1}{4})=1$

(στ) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ $\qquad$ $x_0=\frac{2\pi}{3}$

$f'(x)=-\eta\mu x$

$f'(\frac{2\pi}{3})=-\eta\mu\frac{2\pi}{3}=-\eta\mu 120=-\eta\mu(180-60)=$
$=-\eta\mu 60=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(\frac{2\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(η) $f(x) = \ln x \qquad x_0 = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

**4.** (β) $f(x) = \ln x + \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$$f'(x) = \left(\ln x + \sqrt{x} + \sqrt{2}\right)'$$

$$f'(x) = (\ln x)' + (\sqrt{x})' + (\sqrt{2})'$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0}$$

(δ) $f(x) = x^5 + \text{συν}\,x + \ln 2$

$$f'(x) = (x^5)' + (\text{συν}\,x)' + (\ln 2)'$$

$$\boxed{f'(x) = 5x^4 - \text{ημ}\,x + 0}$$

(ιζ) $f(\theta) = \text{συν}\,\theta + \text{ημ}\,\theta + 1 - \text{ημ}\,x$

$$f'(\theta) = (\text{συν}\,\theta)' + (\text{ημ}\,\theta)' + (1)' - (\text{ημ}\,x)'$$

$$f'(\theta) = -\text{ημ}\,\theta + \text{συν}\,\theta + 0 - 0.$$

**19.** (β) $f(x) = \dfrac{3}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{3' \cdot x^2 - 3\cdot(x^2)'}{x^4}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{0 - 3\cdot 2x}{x^4} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{6x}{x^4} = \dfrac{6}{x^3}$

(δ) $f(x) = \dfrac{1}{2\eta\mu x} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1' \cdot 2\eta\mu x - 1\cdot(2\eta\mu x)'}{(2\eta\mu x)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{0 - 2\sigma\upsilon\nu x}{4\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu^2 x}$

(στ) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1' \cdot \ln x - 1\cdot \ln x'}{(x\cdot \ln x)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{0 - 1\cdot \frac{1}{x}}{(x\cdot\ln x)^2} = \dfrac{-\frac{1}{x}}{(x\cdot\ln x)^2}$

**11.** $f(x) = (x^2 \eta\mu x)\cdot(\ln x)$

$$f'(x) = (x^2 \eta\mu x)' \ln x + x^2 \eta\mu x\, (\ln x)'$$

$$f'(x) = \left[(x^2)'\eta\mu x + x^2(\eta\mu x)'\right]\ln x + x^2\eta\mu x\, \frac{1}{x}$$

$$\boxed{f'(x) = \left(2x\,\eta\mu x + x^2\, \sigma\upsilon\nu x\right)\ln x + x\,\eta\mu x.}$$

**14.** β) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x-2) - x^2\cdot(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}$$

ε) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

στ) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{(e^x)'\cdot(x^2+1) - e^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{e^x\cdot(x^2+1) - e^x(2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

**18.** (α) $f(x) = \varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

(β) $f(x) = \varepsilon\varphi x - x - 2$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - (x)' - 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1$$

(γ) $f(x) = x + \sigma\varphi x - 1$

$$f'(x) = (x)' - \frac{1}{\eta\mu^2 x} - \cancel{0}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

8. (B) $f(x) = 3x^4 - 12x - 3$

$f'(x) = (3x^4)' - (12x)' - (3)'$

$f'(x) = 3 \cdot (x^4)' - 12 \cdot (x)' - 0$

$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 12 \cdot 1$

$f'(x) = 12x^3 - 12$

(a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$

$F'(x) = (x^3)' - (3x^2)' + (2x) - (1)'$

$F'(x) = 3x^2 - 3(x^2)' + 2(x)' - 0$

$F'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 2x + 2$

$\boxed{F'(x) = 3x^2 - 6x + 2}$

**10.** (β) $f(x) = x\,ημx - 2\sqrt{x}$

$f'(x) = \left((x)'ημx + x\cdot(ημx)'\right) - 2(\sqrt{x})'$

$f'(x) = (1\cdot ημx + x\cdot συνx) - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}$

$f'(x) = ημx + x\,συνx - \frac{1}{\sqrt{x}}$

**15.** (β) $f(x) = \frac{ημx}{e^x}$

$f'(x) = \frac{(ημx)'(e^x) - (ημx)(e^x)'}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{συνx\cdot \cancel{e^x} - ημx\cdot \cancel{e^x}}{(\cancel{e^x})^2}$

$f'(x) = \frac{συνx - ημx}{e^x}$

(δ) $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$

$f'(x) = \frac{(x+1)'(e^x) - (x+1)(e^x)'}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{e^x - (x+1)e^x}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{1 - x - 1}{e^x} = \frac{-x}{e^x}$

~~$f'(x) = \frac{x+2}{e^x}$~~

(στ) $f(x) = \frac{ημx - συνx}{e^x}$

$f'(x) = \frac{(ημx - συνx)'(e^x) - (ημx - συνx)(e^x)'}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{(συνx + ημx)\cdot e^x - (ημx + συνx)\cdot e^x}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{συνx + ημx - ημx + συνx}{e^x}$

$f'(x) = \frac{2συνx}{e^x}$

**8.** (γ) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

$$f(x) = \frac{2}{3}(x^3)' - \frac{1}{2}(x^2)' + (x)' - (1)'$$

$$f(x) = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x^2 - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x + 1 - 0$$

$$f(x) = 2x^2 - x + 1 \quad \checkmark$$

**10.** (δ) $f(x) = 2x\,ημx - \ln x$

$$f(x)' = (2x\,ημx)' - (\ln x)'$$

$$f(x)' = (2x)'\,ημx + 2x \cdot (ημx)' - \frac{1}{x}$$

$$f(x)' = 2(x)' \cdot ημx + 2x \cdot συνx - \frac{1}{x}$$

$$f(x)' = 2ημx + 2x\,συνx - 1$$

**13.** (β) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x^2 - \ln x\,(x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

16. (1) $f(x) = \dfrac{n\mu x + \sigma w x}{1 + n\mu x}$

$$f'(x) = \frac{(n\mu x + \sigma u v x)' \cdot (1 + n\mu x) - (n\mu x + \sigma u v x) \cdot (1 + n\mu x)'}{(1 + n\mu x)^2} \;(=)$$

$$f'(x) = \frac{(\sigma u v x - n\mu x) \cdot (1 + n\mu x) - (n\mu x + \sigma u v x) \cdot \sigma u v x}{(1 + n\mu x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sigma u v x + n\mu x \cdot \sigma u v x - n\mu x - n\mu^2 x - (\sigma u v x \cdot n\mu x + \sigma u v^2 x)}{(1 + n\mu x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sigma u v x + \cancel{n\mu x \cdot \sigma u v x} - n\mu x - n\mu^2 x - \cancel{\sigma u v x \cdot n\mu x} - \sigma u v^2 x}{(1 + n\mu x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sigma u v x - n\mu x - (n\mu^2 x + \sigma u v^2 x)}{(1 + n\mu x)^2} \;\; = 1$$

$$f'(x) = \frac{\sigma u v x - n\mu x - 1}{(1 + n\mu x)^2}$$

17. (B) $f(x) = \dfrac{x\eta\mu x}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{(x\eta\mu x)' e^x - x\eta\mu x (e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left[(x)'\eta\mu x + (\eta\mu x)' x\right] e^x - x\eta\mu x\, e^x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{e^x}\left[\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \cdot x - x\eta\mu x\right]}{(e^x)^{\cancel{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x}{e^x}$$

(δ) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

**20.** (γ) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{(x^2-2)' \cdot (x-1) - (x^2-2) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x - 0 \cdot (x-1) - (x^2-2) \cdot 1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - (x^2-2)}{(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$

29. Ⓑ $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{x+1}, & x > 0. \end{cases}$

$$f(x)' = \begin{cases} (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)', & x \le 0 \\ \dfrac{(x)' \cdot (x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2}, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + x \cdot 6urx, & x \le 0 \\ \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}, & x \ge 0 \end{cases}$$

$$f'(x) \begin{cases} \ln x + x\,6crx, & x < 0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}, & x > 0 \end{cases}$$

~~$\lim_{x \to 0^+} f(x) = x\ln x$~~

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$0 \times$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \ln x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{x+1}}{x} = \frac{x}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)} = 1$$