

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
11-01-2026**

ΘΕΜΑ Α:

A1. Αν $a, b \geq 0$, να αποδείξετε την ισότητα $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

A2. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

- α) Αν η εξίσωση $ax=b$ δεν είναι ταυτότητα, τότε $a=0$
- β) Η εξίσωση $\lambda x = \lambda^2$ έχει μοναδική λύση την $x = \lambda$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- γ) Η εξίσωση $x^n = a$, με $a < 0$ και n περιττό φυσικό αριθμό είναι αδύνατη.
- δ) Ισχύει ότι $\sqrt{(-a)^2} = a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
- ε) Ισχύει ότι $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

A3. Να αντιστοιχίσετε την εξίσωση της στήλης Α με τη λύση της στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $x^3 - 1 = 0$ γ	α) $x = 1$ ή $x = -1$
2. $x^4 - 1 = 0$ δ	β) $x = 0$ ή $x = 1$
3. $x^3 + x = 0$ ε	γ) $x = 1$
4. $x^4 = x$ β	δ) $x = -1$
5. $x^{2026} + 1 = 0$ ζ	ε) $x = 0$
	στ) $x = 0$ ή $x = -1$
	ζ) Αδύνατη

(Μονάδες 5-10-10)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |x - 1|$, $B = |x - 3|$.

B1. Να λύσετε τις εξισώσεις: $A = 2$ και $B = -1$.

B2. Να λύσετε την εξίσωση: $A = B$.

B3. Να λύσετε την εξίσωση: $B = 9 - 2x$.

B4. Να λύσετε την εξίσωση: $A^2 - A - 6 = 0$.

(Μονάδες 6-5-6-8)

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{2\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}, \quad B = \frac{3(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta}} \quad \text{όπου } \alpha, \beta > 0 \text{ με } \alpha \neq \beta$$

για τους οποίους ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 6\beta + 13 = 0$.

Γ1. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 3$ τότε:

Γ2. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις A και B σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές.

Γ3. Για $A = \sqrt{6} + 1$ και $B = \sqrt{6} - 3$ να βρεθούν τα A^2 και B^2 .

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \sqrt{4} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{4}$

Γ5. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\alpha - \frac{x^2 + 7x}{x^2 - 1} = \frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{\beta}{1 - x}$$

(Μονάδες 4-4-4-5-8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $4(x^2 + 4x - 5) = \lambda(\lambda x + 5) + (2x)^2$ (1) με $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

Δ2. i) Να βρείτε για ποια/ποιες τιμές (αν υπάρχουν) του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει λύση την $x = 5$.

ii) Να βρείτε για ποια/ποιες τιμές (αν υπάρχουν) του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την $x = \frac{5}{8}$.

Δ3. Αν $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση $||x - \lambda| - \lambda^2| = |\lambda - |\lambda - x||$

Δ4. Αν $x_0 = \frac{5}{4 - \lambda}$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) τότε να βρείτε την τιμή του λ για την οποία ισχύει: $(x_0 - 1)^3 + 64 = 0$.

(Μονάδες 8-4-4-5-4)

Λοβας Διαγωνισματος

A₁: Αποδειξη

A₂: α 1 β 1 γ 1 δ 1 ε 1

A₃: 1 → γ

$$x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$\boxed{x=1}$$

2 → α

$$x^4 - 1 = 0$$

$$x^4 = 1$$

$$x^4 = 1^4$$

$$\boxed{x=1} \text{ ή } \boxed{x=-1}$$

3 → ε

$$x^3 + x = 0$$

$$x(x^2 + 1) = 0$$

$$\boxed{x=0} \text{ ή } x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

Αδυνατη

4 → β

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$\boxed{x=0} \text{ ή } x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$x^3 = 1^3$$

$$\boxed{x=1}$$

5 → δ

$$x^{2026} + 1 = 0$$

$$x^{2026} = -1$$

Αδυνατη.

Θερω Β

$$B_1: A=2 \Rightarrow |x-1|=2 \quad (\Rightarrow) \quad x-1=2 \quad \text{ή} \quad x-1=-2$$
$$\boxed{x=3} \qquad \boxed{x=-1}$$
$$B=-1 \Rightarrow |x-3|=-1$$

Αδυνατη.

$$B_2: A=B \Rightarrow |x-1|=|x-3| \quad (\Rightarrow) \quad \cancel{x-1}=\cancel{x-3} \quad \text{ή} \quad x-1=-x+3$$

Αδυνατη $2x=4$

$$\boxed{x=2}$$

$$B_3: B=9-2x$$
$$|x-3|=9-2x$$
$$\boxed{\text{πριν } 9-2x \geq 0}$$

$$x-3=9-2x \quad \text{ή} \quad x-3=-9+2x$$
$$x+2x=9+3 \qquad x-2x=-9+3$$
$$3x=12 \qquad -x=-6$$
$$\boxed{x=4} \quad \checkmark \qquad \boxed{\cancel{x=6}}$$

$$B_4: A^2 - A - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$A = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$A=3 \Rightarrow |x-1|=3$$

$$A=-2$$

$$|x-1|=-2$$

Αδυνατη

$$x-1=3$$
$$\boxed{x=4}$$

ή

$$x-1=-3$$

$$\boxed{x=-2}$$

$$1: a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13 = 0$$

$$a^2 - 4a + 4 + b^2 - 6b + 9 = 0$$

$$(a-2)^2 + (b-3)^2 = 0$$

$$a-2=0 \quad \text{or} \quad b-3=0$$

$$\boxed{a=2}$$

$$\boxed{b=3}$$

$$2: A = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{6} + 4 - 3}{3-2} =$$

$$= \sqrt{6} + 1$$

$$B = \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{3}}{\cancel{3}} =$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{3}\sqrt{3} = \sqrt{6} - 3$$

$$3: A^2 = (\sqrt{6}+1)^2 = \sqrt{6}^2 + 2\sqrt{6} + 1 = 6 + 2\sqrt{6} + 1 = 7 + 2\sqrt{6}$$

$$B^2 = (\sqrt{6}-3)^2 = \sqrt{6}^2 - 2\sqrt{6} \cdot 3 + 3^2 = 6 - 6\sqrt{6} + 9 = 15 - 6\sqrt{6}$$

$$74: \sqrt{7+2\sqrt{6}} + \sqrt{15-6\sqrt{6}} = \sqrt{4} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \sqrt[6]{4}$$

$$\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{6}-3)^2} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}}$$

$$|\sqrt{6}+1|^{\oplus} + |\sqrt{6}-3|^{\ominus} = 4^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$$

$$\cancel{\sqrt{6}+1} - \cancel{\sqrt{6}} + 3 = 4^1$$

$$4 = 4.$$

$$75: 2 - \frac{x^2+7x}{x^2-1} = \frac{2x-1}{x+1} + \frac{3}{1-x}$$

$$2 - \frac{x^2+7x}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-1}{x+1} - \frac{3}{x-1}$$

$$\bullet (x-1)(x+1) = 0$$

$$x-1=0 \quad \vee \quad x+1=0$$

$$(x=1)$$

$$(x=-1)$$

$$\bullet x+1=0$$

$$(x=-1)$$

$$\bullet x-1=0$$

$$(x=1)$$

$$\text{Прому } x \neq 1, x \neq -1.$$

$$\in \text{DN } 3 \ (x-1)(x+1)$$

$$2(x-1)(x+1) - \frac{(x-1)(x+1) \cancel{(x+1)} \frac{x^2+7x}{\cancel{(x-1)(x+1)}}}{\cancel{(x-1)(x+1)}} = (x-1)(x+1) \frac{2x-1}{x+1} -$$

$$2(x^2-1) - (x^2+7x) = (x-1)(2x-1) - 3(x+1) \quad \frac{3}{x+1}$$

$$\cancel{2x^2} - 2 - x^2 - 7x = \cancel{2x^2} - x - 2x + 1 - 3x - 3$$

$$-x^2 - 7x - 2 = -6x - 8$$

$$-x^2 - 7x - 2 + 6x + 8 = 0$$

$$-x^2 - x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-1)6$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{-2}$$

$$-3 \quad \checkmark$$

$$-2 \quad \checkmark$$

$$\Delta_1: 4(x^2 + 4x - 5) = 2(2x + 5) + (2x)^2$$

$$\cancel{4x^2} + 16x - 20 = 2^2x + 5 \cdot 2 + \cancel{4x^2}$$

$$16x - 2^2x = 5 \cdot 2 + 20$$

$$(16 - 2^2)x = 5(2 + 4)$$

$$-(2 - 4)(2 + 4)x = 5(2 + 4)$$

1. Av $2 = 4$ TOLC $0x = 40$ Aduca

2. Av $2 = -4$ TOLC $0x = 0$ Aplica

3. Av $2 \neq 4, -4$ TOLC $x = \frac{5(2+4)}{-(2-4)(2+4)}$
 para simplificar

$$x = -\frac{5}{2-4}$$

Δ_2 : i) Αν $x=5$ τότε

$$4 \cdot (5^2 + 4 \cdot 5 - 5) = \lambda (5\lambda + 5) + (2 \cdot 5)^2$$

$$4(40) = 5\lambda^2 + 5\lambda + 100$$

$$160 = 5\lambda^2 + 5\lambda + 100$$

$$0 = 5\lambda^2 + 5\lambda - 60$$

$$0 = \lambda^2 + \lambda - 12$$

$$\lambda = -4 \quad \checkmark \quad \lambda = 3 \quad \checkmark$$

ii) Από οχμ προκύπτει λ ως $x = -\frac{5}{\lambda-4}$

$$\frac{5}{8} = -\frac{5}{\lambda-4}$$

$$5(\lambda-4) = -40$$

$$5\lambda - 20 = -40$$

$$5\lambda = -20$$

$$\cancel{\lambda = -4}$$

δεν υπάρχει λ .

Q3: Av $\lambda=2$ तो $|1x-2|-2^2|=|2-1x-2|$

$$|1x-2|-4 = |2-1x-2|$$

$$|x-2|-4 = 2-|2-x| \quad \text{or} \quad |x-2|-4 = -2+|2-x|$$

$$|x-2|-4 = 2-|x-2|$$

~~$$|x-2|-4 = -2+|x-2|$$~~

$$2|x-2| = 6$$

$$-4 = -2$$

$$|x-2| = 3$$

Answer,

$$x-2=3 \quad \text{or} \quad x-2=-3$$

$$x=5$$

$$x=-1$$

Q4: $x_0 = \frac{5}{4-2}$ तो $(x_0-1)^3 + 64 = 0$

$$(x_0-1)^3 = -64$$

$$(x_0-1)^3 = (-4)^3$$

$$x_0-1 = -4$$

$$x_0 = -3$$

$$\frac{5}{4-2} = -3$$

$$\Rightarrow 5 = -3(4-2)$$

$$5 = -12 + 3\lambda$$

$$\lambda = \frac{17}{3}$$