B1. B2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-3x+2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x)=(x^2-3x+2)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$.

(Μονάδες 6)

α) $P(1)=0 \Leftrightarrow 2-9+\alpha-2-6=0$

$\alpha-15=0 \Rightarrow \underline{\alpha=15}$

$$\boxed{P(x)=2x^3-9x^2+13x-6}$$

β) i/

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-9x^2+13x-6 & x^2-3x+2 \\ \hline -(2x^3-6x^2+4x) & 2x-3 \\ -3x^2+9x-6 & \\ -(-3x^2+9x-6) & \\ 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x^2-3x+2)(2x-3)$

ii) $P(x) < 0$

$$(x^2-3x+2)(2x-3) < 0$$

x		1		$\frac{3}{2}$		2	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

$$x \in (-\infty, 1) \cup \left(\tfrac{3}{2}, 2\right)$$

NSo

iii). $P(\ln 2) < 0$

$2 > 1$

$\ln 2 > \ln 1$

$\ln 2 > 0$

$2 < e$

$\ln 2 < \ln e$

$\ln 2 < 1$

$P(\ln 2) < 0$

B_1, B_2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e}x^3 + 4x^2\ln\sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$.

(Μονάδες 4)

α) $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln\sqrt{e} + 2$

$P(x) = e^1 x^3 + 4x^2 \ln e^{1/2} + 2$

$P(x) = ex^3 + 4x^2 \frac{1}{2} \ln e + 2$

$\boxed{P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2}$

β) $P(x) = ex + 4$

$ex^3 + 2x^2 + 2 = ex + 4$

$\underbrace{ex^3 + 2x^2 - ex}\ - 2 = 0$

$ex(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) = 0 \to (x^2 - 1)(ex + 2) = 0$

$x = 1$ $x = -\frac{2}{e}$

$x = -1$

(γ) $P(x) > ex+4$

$(x^2-1)(ex+2) > 0$

x		-1		$-\frac{2}{e}$		1	
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$ex+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$Q(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

$x \in (-1, -\frac{2}{e}) \cup (1, +\infty)$.

(δ) Προσημο $P(e)-e^2-4$

Βρηκα οτι αν $x \in (-1, -\frac{2}{e}) \cup (1, +\infty)$

το $P(x)-ex-4 > 0$

Το $e > 1$ αρα $P(e)-e \cdot e-4 > 0$

$P(e)-e^2-4 > 0$

B1. B2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha\neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=0$.

(Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha=-1$ και $\beta=0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

(Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log\sqrt{10})>0$.

(Μονάδες 6)

α) $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x$ 3 ακεραιες ριζες.

$P(x)=x(\alpha x^2+\beta x+1)$

Το 0 ριζα προφανως!

Οι διαιρετες του σταθερου ορου ειναι ± 1

Αρα το 1 και -1 ριζες!

β) $P(1)=0 \iff \alpha+\beta+1=0$ $\oplus$ $2\beta=0$

$P(-1)=0 \Rightarrow -\alpha+\beta-1=0$ $\beta=0$ $\alpha=-1$

$$\boxed{P(x)=-x^3+x}$$

γ) i) $P(x) > 0$

$-x^3 + x > 0$

$x(-x^2+1) > 0$

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$-x^2+1$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$P(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$

$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

ii) Νδο $P(\log\sqrt{10}) > 0$

$\log\sqrt{10} = \log 10^{1/2} = \frac{1}{2}\log 10 = \frac{1}{2}$

$P\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ γιατί το $\frac{1}{2} \in (0,1)$.

B1 B2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

ⓐ $f(x)=\ln(e^x-2)$

Πρέπει $e^x-2>0 \Rightarrow e^x>2 \Rightarrow \ln e^x>\ln 2$

$\underline{x>\ln 2}$

$D_f=(\ln 2,+\infty)$

ⓑ $f(x)+x=3\ln 2$

$\ln(e^x-2)+x=3\ln 2$

$\ln(e^x-2)+\ln e^x=\ln 2^3$

$\ln\left((e^x-2)e^x\right)=\ln 8$

$(e^x-2)e^x=8$ $\qquad$ $\underline{e^x=t}$

$(t-2)t=8$

$t^2-2t-8=0$

$t=4 \qquad t=-2$

$e^x=4 \qquad e^x=-2$ Αδύνατη

$\ln e^x=\ln 4$

$\underline{x=\ln 4}$

(γ) $f(x)+x \geq 3\ln 2$

$t^2-2t-8 \geq 0$

t		-2		4	
t^2-2t-8	$+$		$-$		$+$

$t \in (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$

$t \leq -2$ ή $t \geq 4$

$e^x \leq -2$ ή $e^x \geq 4$

Αδύνατη $\quad x \geq \ln 4$

B1 B2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\frac{4^x-1}{2^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log 3-\log 7$.

(Μονάδες 9)

(α) $\frac{4^x-1}{2^x+5}>0$ και $2^x+5\neq 0$ ✓

$\oplus$

$4^x-1>0 \Rightarrow 4^x>1 \Rightarrow 4^x>4^0 \Rightarrow x>0$

$D_f=(0,+\infty)$

(β) $f(x)=\log 3-\log 7$

$\log\frac{4^x-1}{2^x+5}=\log\frac{3}{7}$

$\frac{4^x-1}{2^x+5}=\frac{3}{7} \Leftrightarrow ((2^x)^2-1)7=3(2^x+5)$

$2^x=k$

$(k^2-1)7=3(k+5)$

$7k^2-7=3k+15$

$7k^2-3k-22=0$

$k=2$

$2^x=2$

$x=1$

$k=-\frac{22}{14}$

$2^x=-\frac{22}{14}$

Αδύν.

γ) $f(x) > \log 3 - \log 7$

$7\kappa^2 - 3\kappa - 22 > 0$

κ		$-11/7$		2	
$7\kappa^2-3\kappa-22$	$+$	0	$-$		$+$

$\kappa < -\frac{11}{7}$ ή $\kappa > 2$

$2^x < -\frac{11}{7}$ $\qquad$ $2^x > 2^1$

Αδύν $\qquad$ $x > 1$

B_1 B_2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\sqrt{10^x-2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(\log 2,+\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\log\sqrt{\frac{10^x}{3}}, x\in\mathbb{R}$.

i. **Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}}=\sqrt{10^x-2}$ με $x\in(\log 2,+\infty)$.**

(Μονάδες 09)

ii. **Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g.**

(Μονάδες 09)

(α) πρέπει $10^x-2>0 \Rightarrow 10^x>2 \Rightarrow \log 10^x > \log 2$

$\underline{x>\log 2}$

(β) i) $\sqrt{\frac{10^x}{3}}=\sqrt{10^x-2} \Rightarrow \frac{10^x}{3}=10^x-2$ $\quad \underline{10^x=t}$

$\frac{t}{3}=t-2 \Rightarrow t=3t-6 \Rightarrow 6=2t$ $\boxed{t=3}$

$10^x=3 \Rightarrow \log 10^x=\log 3 \Rightarrow \underline{x=\log 3}$

ii). $f(x)=g(x)$

$\log\sqrt{10^x-2}=\log\sqrt{\frac{10^x}{3}}$ $\quad A(\log 3, 0)$.

$\sqrt{10^x-2}=\sqrt{\frac{10^x}{3}} \Rightarrow \underline{x=\log 3}$

B1 B2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-x+2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$.

(Μονάδες 7)

γ) $1<\log 20<2$.

(Μονάδες 6)

δ) $P(\log 20)<0$.

(Μονάδες 6)

α) $P(1)=1^3-2\cdot1^2-1+2=0$ ✓

1	-2	-1	2	1
↓	1	-1	-2	
1	-1	-2	0	

$$\boxed{P(x)=(x-1)(x^2-x-2)}$$

β)

x	-1	1	2	
$x-1$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
x^2-x-2	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$P(x)<0$

$x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$.

γ) ΝδΟ $1<\log 20<2$

$10^1<10^{\log 20}<10^2$

$10<20<100$ ✓

δ) Άρα $\log 20\in(1,2)\Rightarrow P(\log 20)<0$.

B1. B2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x$, $x>0$ και η ευθεία $\varepsilon: y=2x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2)+f(4)=\frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα x′x και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

α) $f(x)=(x-1)\ln x$, $x>0$

$\varepsilon: y=2x-2$

$f(2)=\ln 2$

$f(4)=3\ln 4=3\ln 2^2=3\cdot 2\ln 2=6\ln 2$

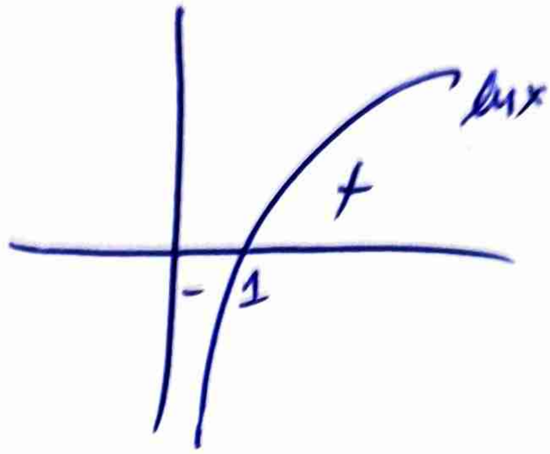
$f(8)=7\ln 8=7\cdot\ln 2^3=7\cdot 3\ln 2=21\ln 2$

Άρα $f(2)+f(4)=\frac{1}{3}f(8) \Leftrightarrow \ln 2+6\ln 2=\frac{1}{3}21\ln 2$

$7\ln 2=7\ln 2$

β) $f(x) = (x-1)\ln x,\ x>0$

x		1	
$x-1$	$-$	0	$+$
$\ln x$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$		$+$



$f(x) > 0$

γ) i) $f(x) = 2x-2$

$(x-1)\ln x = 2x-2$

$(x-1)\ln x = 2(x-1)$

$(x-1)(\ln x - 2) = 0$

$x-1=0$ ή $\ln x - 2 = 0$

$x=1$ $\quad$ $\ln x = 2 \Rightarrow e^{\ln x} = e^2$

$x = e^2$

ii) $f(x) < 2x-2$

$(x-1)(\ln x - 2) < 0$ $\qquad$ $x \in (1, e^2)$

x		1		e^2	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$\ln x - 2$	$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$+$		$-$		$+$

Β1 Β2.

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2+1}-x>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

(Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x)+g(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

(Μονάδες 04)

(α) i) $\sqrt{x^2+1} > x$ αφού $x<0$ πραγματικά ισχύει!

ii). $f(x)>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>x$

Για $x<0$ ισχύει

Για $x\geq 0$ $\sqrt{x^2+1}^{\,2} > x^2 \Rightarrow \cancel{x^2}+1>\cancel{x^2}$

$1>0$ ✓

$f(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

(β) i) $g(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

$g(-x)+g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=$

$\ln(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x) =$

$= \ln(\sqrt{x^2+1}^2 - x^2) = \ln(1) = 0.$

ii) Αρκει νδο περιττη.

$g(-x) + g(x) = 0$

$g(-x) = -g(x)$

g περιττη

$B1 \quad B2$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x'x.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x-1$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι αν α>0, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y=x+\alpha$.

(Μονάδες 8)

(α) Πρέπει $e^x-1>0 \Rightarrow e^x>1 \Rightarrow \underline{\underline{x>0}}$

$D_f=(0,+\infty)$

$f(x)=0 \Rightarrow \ln(e^x-1)=0 \Rightarrow e^{\ln(e^x-1)}=e^0$

$e^x-1=1$

$e^x=2$

$\ln e^x=\ln 2$

$x=\ln 2$

$B(\ln 2, 0)$.

(β) $f(x)=x-1$

$\ln(e^x-1)=x-1$.

$e^{\ln(e^x-1)}=e^{x-1}$

$e^x-1=e^x\cdot e^{-1}$

$\boxed{e^x=t}$

$t-1=t\frac{1}{e}$

$et-e=t$

$et-t=e$

$t(e-1)=e$

$t=\frac{e}{e-1} \Rightarrow e^x=\frac{e}{e-1}$

$$x = \ln \frac{e}{e-1} = \ln e - \ln(e-1) = 1 - \ln(e-1)$$

$$\boxed{x = 1 - \ln(e-1)}$$

(γ) Νδο $f(x) = x + a$, $a > 0$

$$\ln(e^x - 1) = x + a \Rightarrow e^{\ln(e^x-1)} = e^{x+a}$$

$$e^x - 1 = e^{x+a}$$

$$e^x - 1 = e^x \cdot e^a \qquad e^x = t$$

$$t - 1 = t \cdot e^a$$

$$t - te^a = 1$$

$$t(1 - e^a) = 1$$

$$t = \frac{1}{1-e^a}$$

$a > 0$

$e^a > e^0$

$e^a > 1$

$0 > 1 - e^a$

$$e^x = \frac{1}{1-e^a}$$ Αδυνατη

B_1 B_2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x - \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι $\upsilon = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β. (Μονάδες 06)

Αν είναι $\alpha = 5$, $\beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 07)

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 06)

δ) Αν $P(ln\kappa) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ. (Μονάδες 06)

α) $\left.\begin{array}{l} P(3) = 0 \\ P(-1) = -16 \end{array}\right\} \alpha = 5, \ \beta = 3$

β) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

$P(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$

1	-5	7	-3	3
↓	3	-6	3	
1	-2	1	0	

$(x-3)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$x = 3$ $x = 1$.

(γ) $P(x) < 0$

x		1	3	
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
x^2-2x+1	$+$	0	$+$	$+$
$P(x)$	$-$	$-$		$+$

$x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3)$

(δ) Αν $P(\ln\kappa) < 0$ Βρείτε το κ.

$\ln\kappa < 1$ ή $1 < \ln\kappa < 3$

$e^{\ln\kappa} < e^1$ $\quad$ $e^1 < e^{\ln\kappa} < e^3$

$0 < \kappa < e$ $\quad$ $e < \kappa < e^3$

$\kappa \in (0, e) \cup (e, e^3)$

B1. B2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx'.

(Μονάδες 9)

(α) $\frac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0 \Rightarrow \frac{(\omega-2)(\omega^2+2\omega+4)}{\omega^2+4\omega-12}>0$

ω		-6		2	
$\omega-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\omega^2+2\omega+4$ ($\Delta<0$)	$+$		$+$		$+$
$\omega^2+4\omega-12$	$+$	0	$-$	0	$+$
$P(\omega)$	$-$		$+$		$+$

$\omega\in(-6,2)\cup(2,+\infty)$

(β) πρέπει $\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}>0$ και $e^{2x}+4e^{x}-12\neq 0$

Θέτω $e^x=\omega$

$\frac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$

$-6<\omega<2$ ή $\omega>2$

$\underbrace{-6<e^x}_{\checkmark}<2$ ή $e^x>2$

$e^x<2$ $\quad$ $\underline{x>\ln 2}$

$\underline{x<\ln 2}$

$D_f=\mathbb{R}-\{\ln 2\}$

$\rightarrow e^{2x}+4e^{x}-12=0$

$e^{x}=w$

$w^{2}+4w-12=0$

$w=-6 \qquad w=2$

$e^{x}=-6 \qquad e^{x}=2$

Adunat $\qquad \underline{\underline{x=\ln 2}}$

(8) $f(x)=0$

$$\ln\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}=0$$

$$\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}=1 \qquad e^{x}=t$$

$$\frac{t^{3}-8}{t^{2}+4t-12}=1 \Rightarrow t^{3}-8=t^{2}+4t-12$$

$t^{3}-t^{2}-4t+4=0$

$t^{2}(t-1)-4(t-1)=0$

$(t-1)(t^{2}-4)=0$

$x=0 \qquad t=1 \qquad t=2 \qquad t=-2$

$e^{x}=1 \qquad \cancel{e^{x}=2} \qquad e^{x}=-2$

$\cancel{x=\ln 2}$ Adunat.

B_1. B_2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο Α, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο Α.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

α) $f(x) = g(x) \Rightarrow 4^x = 2^x - \frac{1}{4} \Rightarrow (2^x)^2 = 2^x - \frac{1}{4}$

$2^x = t$

$t^2 = t - \frac{1}{4} \Rightarrow 4t^2 = 4t - 1$

$4t^2 - 4t + 1 = 0$

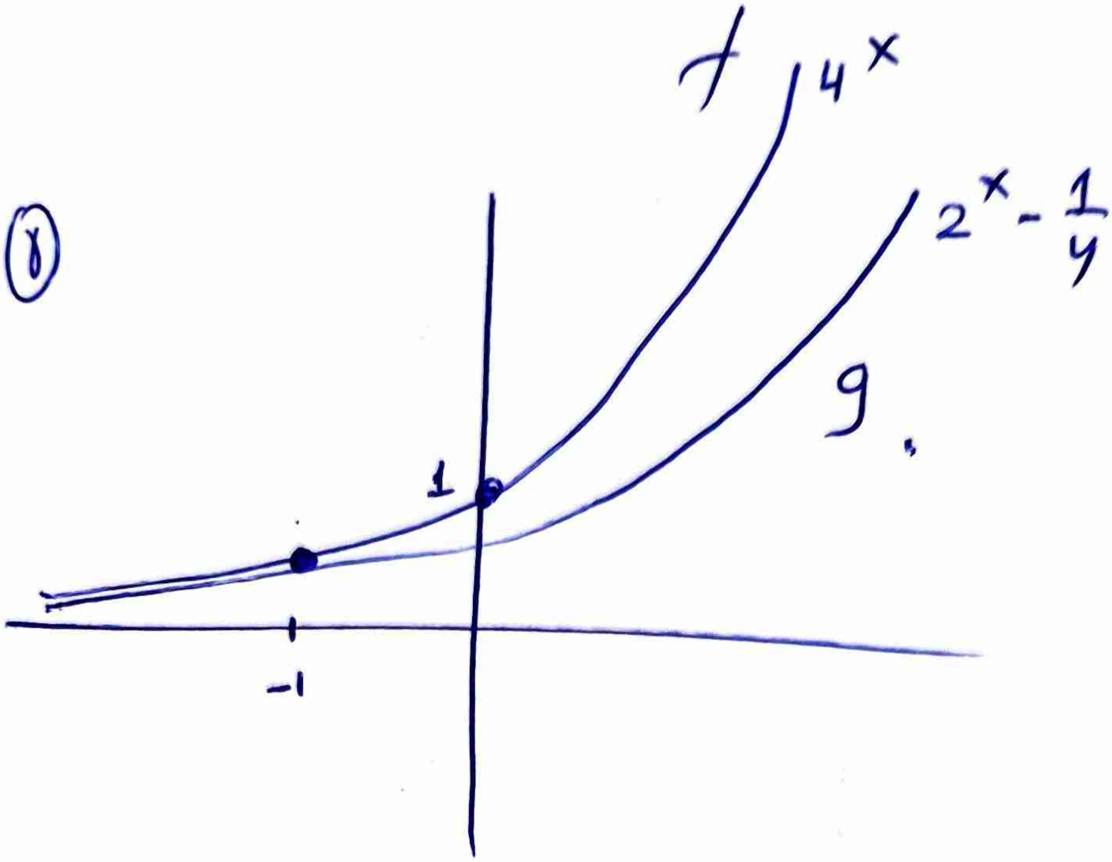
$t = \frac{1}{2}$ ή $2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1}$ $x = -1$

$A(-1, \frac{1}{4})$

β) $f(x) > g(x) \Rightarrow 4^x > 2^x - \frac{1}{4} \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x + \frac{1}{4} > 0$

$4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 > 0 \Rightarrow (2 \cdot 2^x - 1)^2 > 0$ ✓

(γ)



B_1 B_2.

ΘΕΜΑ 4

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

(Μονάδες 5)

α) $P(x)=(4x^2-1)(3x-2)+1$

$P(x)=1 \iff (4x^2-1)(3x-2)+1=1$

$(4x^2-1)(3x-2)=0$

$4x^2-1=0$ ή $3x-2=0$

$x=\frac{1}{2}$ $\quad x=-\frac{1}{2}$ $\quad x=\frac{2}{3}$

β) Έστω $P(\log 5)=1$

$\log 5=\frac{1}{2}$ ή $\log 5=-\frac{1}{2}$ ή $\log 5=\frac{2}{3}$

$5=10^{1/2}$ $\quad 5=10^{-1/2}$ $\quad 5=10^{2/3}$

$5=\sqrt{10}$ $\quad 5=\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\quad 5=\sqrt[3]{10^2}$

× × ×

Άρα $P(\log 5)\neq 1$.

(γ) $P(x) = (4x^2-1)(3x-2)+1$ $\quad\quad (-1,0)$

$P(-1) = (4-1)(-5)+1 = -15+1 = -14$

$P(0) = -1\cdot(-2)+1 = 3$

$P(-1)\,P(0) < 0$

Αρα η εξισωση $P(x)=0$ εχει

τουλαχιστον μια ριζα στο $(-1,0)$

B1 B2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **(Μονάδες 5)**

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$. **(Μονάδες 6)**

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2)+f(\ln\frac{1}{2})$. **(Μονάδες 7)**

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=0$, για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta\neq 0$. **(Μονάδες 7)**

(α) Πρεπει $x\neq 0$ αρα $A_f=\mathbb{R}^*$

(β) Περιττη

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-x}=\frac{x^2+1}{-x}=-\frac{x^2+1}{x}=-f(x)$$

Αν $x\in D_f$ και $-x\in D_f$ αρα εχω συμμετρικο συστημα. Αρα περιττη.

(γ) $f(\ln 2)+f(\ln\frac{1}{2})=f(\ln 2)+f(-\ln 2)\overset{(*)}{=}$

$\rightarrow \ln\frac{1}{2}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$

$(*)$ $f(\ln 2)-f(\ln 2)=0$

8 NSO $f(r,\theta) + f(r,(\pi+\theta)) = 0$

$$f(r,\theta) + f(-r,\theta) = 0$$

$$f(r,\theta) - f(r,\theta) = 0$$

$$0 = 0.$$

B_1 B_2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot 2^x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

(Μονάδες 7)

Αν $\alpha=5$ και $\beta=-7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>4^x-3$.

(Μονάδες 7)

α) $f(x)=\alpha\cdot 2^x+\beta$

$f(1)=3 \Rightarrow \alpha\cdot 2+\beta=3 \Rightarrow \boxed{2\alpha+\beta=3}$ $\ominus$

$f(2)=13 \Rightarrow \alpha\cdot 2^2+\beta=13 \Rightarrow \boxed{4\alpha+\beta=13}$

$-2\alpha=-10$ $\quad \alpha=5 \quad \beta=-7$

$\boxed{f(x)=5\cdot 2^x-7}$

β) $f(0)=5\cdot 2^0-7=5-7=-2$ $\quad K(0,-2)$

γ) $x_1<x_2 \Rightarrow 2^{x_1}<2^{x_2} \Rightarrow 5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2}$

$\underbrace{5\cdot 2^{x_1}-7}_{f(x_1)}<\underbrace{5\cdot 2^{x_2}-7}_{f(x_2)}$

$f\nearrow$

⑥. $f(x) > 4^x - 3$

$2^x = t$

$5 \cdot 2^x - 7 > (2^x)^2 - 3$

$5t - 7 > t^2 - 3$

$t^2 - 5t + 4 < 0$

t		1		4	
t^2-5t+4	+		−		+

$t \in (1, 4)$

$1 < t < 4$

$1 < 2^x < 4$

$2^0 < 2^x < 2^2$

$0 < x < 2$