

B1. B2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α .

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = 15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

(Μονάδες 6)

$$\textcircled{\alpha} P(1) = 0 \quad (\Rightarrow) 2 - 9 + \alpha - 2 - 6 = 0$$

$$\alpha - 15 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 15}}$$

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$$

$$\textcircled{\beta} \text{ i) } \begin{array}{r|l} 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 & x^2 - 3x + 2 \\ - (2x^3 - 6x^2 + 4x) & \hline -3x^2 + 9x - 6 & 2x - 3 \\ - (-3x^2 + 9x - 6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$$

$$ii) \quad P(x) < 0$$

$$(x^2 - 3x + 2)(2x - 3) < 0$$

x		1	$\frac{3}{2}$	2	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+
$2x - 3$	-	-	0	+	+
$P(x)$	-	+	-	+	

$$x \in (-\infty, 1) \cup (\frac{3}{2}, 2)$$

also

$$iii) \quad P(\ln 2) < 0$$

$$2 > 1$$

$$\ln 2 > \ln 1$$

$$\ln 2 > 0$$

$$2 < e$$

$$\ln 2 < \ln e$$

$$\ln 2 < 1$$

$$P(\ln 2) < 0$$

B₁, B₂.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$.

(Μονάδες 4)

$$\textcircled{a} \quad P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$$

$$P(x) = e^1 x^3 + 4x^2 \ln e^{1/2} + 2$$

$$P(x) = ex^3 + 4x^2 \frac{1}{2} \ln e + 2$$

$$\boxed{P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2}$$

$$\textcircled{b} \quad P(x) = ex + 4$$

$$ex^3 + 2x^2 + 2 = ex + 4$$

$$ex^3 + 2x^2 - ex - 2 = 0$$

$$ex(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) = 0$$

$$\rightarrow (x^2 - 1)(ex + 2) = 0$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

$$x = -\frac{2}{e}$$

$$\textcircled{\delta} \quad P(x) > ex + 4$$

$$(x^2 - 1)(ex + 2) > 0$$

x	-1	$-\frac{2}{e}$	1
$x^2 - 1$	+	-	+
$ex + 2$	-	+	+
$Q(x)$	-	+	+

$$x \in (-1, -\frac{2}{e}) \cup (1, +\infty)$$

$$\textcircled{\delta} \quad \text{Продължава} \quad P(e) - e^2 - 4$$

Връща се от $x \in (-1, -\frac{2}{e}) \cup (1, +\infty)$

$$\text{То} \quad P(x) - ex - 4 > 0$$

$$\text{То} \quad e > 1 \quad \text{ако} \quad P(e) - e \cdot e - 4 > 0$$

$$\underline{\underline{P(e) - e^2 - 4 > 0}}$$

B_1 B_2 .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log \sqrt{10}) > 0$.

(Μονάδες 6)

α) $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$ 3 ακέραιες ρίζες.

$$P(x) = x(\alpha x^2 + \beta x + 1)$$

Το 0 ρίζα προφανώς!

Οι διακριτές του σταθμού ορα είναι ± 1

Άρα το 1 και -1 ρίζες!

$$\textcircled{\text{B}} \quad P(1) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \alpha + \beta + 1 = 0$$

$$P(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\alpha + \beta - 1 = 0$$

$$\textcircled{+} \quad 2\beta = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\alpha = -1$$

$$P(x) = -x^3 + x$$

⑧ i) $P(x) > 0$

$$-x^3 + x > 0$$

$$x(-x^2 + 1) > 0$$

	-1	0	1
x	-	0	+
$-x^2 + 1$	-	+	-
$P(x)$	+	-	-

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

ii) Ndo $P(\log \sqrt{10}) > 0$

$$\log \sqrt{10} = \log 10^{1/2} = \frac{1}{2} \log 10 = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \quad \text{justa ca } \frac{1}{2} \in (0, 1)$$

B1 B2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$.

(Μονάδες 9)

α) $f(x) = \ln(e^x - 2)$

πρέπει $e^x - 2 > 0 \Rightarrow e^x > 2 \Rightarrow \ln e^x > \ln 2$

$D_f = (\ln 2, +\infty)$

$x > \ln 2$

β) $f(x) + x = 3 \ln 2$

$\ln(e^x - 2) + x = 3 \ln 2$

$\ln(e^x - 2) + \ln e^x = \ln 2^3$

$\ln((e^x - 2)e^x) = \ln 8$

$(e^x - 2)e^x = 8$

$(t - 2)t = 8$

$t^2 - 2t - 8 = 0$

$t = 4$

$t = -2$

$e^x = 4$

$e^x = -2$ Αδυνα

$e^x = t$

$\ln e^x = \ln 4$

$x = \ln 4$

$$(8) \quad f(x) + x \geq 3 \ln 2$$

$$t^2 - 2t - 8 \geq 0$$

t	$-2 \quad 4$		
$t^2 - 2t - 8$	$+$	$-$	$+$

$$t \in (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$$

$$t \leq -2 \quad \vee \quad t \geq 4$$

$$e^x \leq -2 \quad \vee \quad e^x \geq 4$$

Jawab

$$\underline{\underline{x \geq \ln 4}}$$

B1 B2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

α) $\frac{4^x - 1}{2^x + 5} > 0$ και $2^x + 5 \neq 0$ ✓
⊕
 $4^x - 1 > 0 \Rightarrow 4^x > 1 \Rightarrow 4^x > 4^0 \Rightarrow x > 0$

$D_f = (0, +\infty)$

β) $f(x) = \log 3 - \log 7$

$\log \frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \log \frac{3}{7}$

$\frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \frac{3}{7} \Rightarrow ((2^x)^2 - 1) \cdot 7 = 3(2^x + 5)$
 $2^x = k$

$(k^2 - 1) \cdot 7 = 3(k + 5)$

$7k^2 - 7 = 3k + 15$

$7k^2 - 3k - 22 = 0$

$k = 2$

$2^x = 2$

$x = 1$

$k = -\frac{22}{14}$

$2^x = -\frac{22}{14}$

ΑΤΟΛ.

$$(8) f(x) > \log 3 - \log 7$$

$$7k^2 - 3k - 22 > 0$$

k	$-\frac{11}{7}$	2
$7k^2 - 3k - 22$	+	-

$$k < -\frac{11}{7}$$

$$k > 2$$

$$2^x < -\frac{11}{7}$$

$$2^x > 2^1$$

At Total

$$\underline{\underline{x > 1}}$$

B₁ B₂

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \sqrt{10^x - 2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \log \sqrt{\frac{10^x}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2}$ με $x \in (\log 2, +\infty)$.

(Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 09)

α) πρώτα $10^x - 2 > 0 \Rightarrow 10^x > 2 \Rightarrow \log 10^x > \log 2$

β) i) $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2} \Rightarrow \frac{10^x}{3} = 10^x - 2$

$\frac{t}{3} = t - 2 \Rightarrow t = 3t - 6 \Rightarrow 6 = 2t \Rightarrow t = 3$

$10^x = 3 \Rightarrow \log 10^x = \log 3 \Rightarrow x = \log 3$

ii). $f(x) = g(x)$

$\log \sqrt{10^x - 2} = \log \sqrt{\frac{10^x}{3}}$

$A(\log 3, 0)$

$\sqrt{10^x - 2} = \sqrt{\frac{10^x}{3}} \Rightarrow x = \log 3$

B₁ B₂.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

(Μονάδες 7)

γ) $1 < \log 20 < 2$.

(Μονάδες 6)

δ) $P(\log 20) < 0$.

(Μονάδες 6)

α) $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0$ ✓

1	-2	-1	2	1
↓	1	-1	-2	
1	-1	-2	0	

$$P(x) = (x-1)(x^2 - x - 2)$$

β)

x	-1	1	2
x-1	-	+	+
$x^2 - x - 2$	+	-	+
P(x)	-	+	+

$P(x) < 0$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

γ)

NFS $1 < \log 20 < 2$

$10^1 < 10^{\log 20} < 10^2$

$10 < 20 < 100$ ✓

δ) Άρα $\log 20 \in (1, 2) \Rightarrow P(\log 20) < 0$.

B1. B2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα x 'ς και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

α) $f(x) = (x-1)\ln x, x > 0$

$\varepsilon: y = 2x - 2$

$f(2) = \ln 2$

$f(4) = 3\ln 4 = 3\ln 2^2 = 3 \cdot 2\ln 2 = 6\ln 2$

$f(8) = 7\ln 8 = 7 \cdot \ln 2^3 = 7 \cdot 3\ln 2 = 21\ln 2$

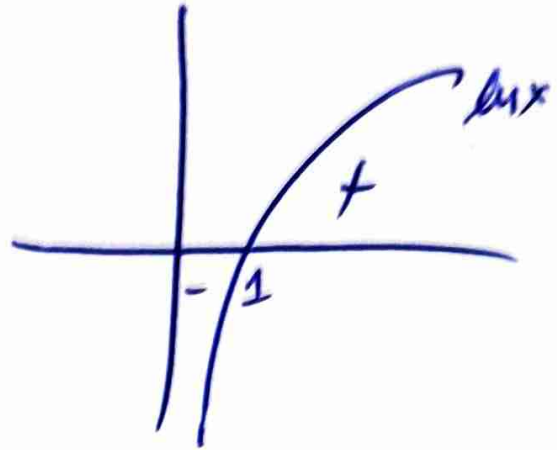
Άρα $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8) \quad (\Rightarrow) \quad \ln 2 + 6\ln 2 = \frac{1}{3}21\ln 2$

$7\ln 2 = 7\ln 2$



① $f(x) = (x-1) \ln x, x > 0$

x	1	
$x-1$	-	+
$\ln x$	-	+
$f(x)$	+	+



$f(x) > 0$

② i) $f(x) = 2x-2$

$(x-1) \ln x = 2x-2$

$(x-1) \ln x = 2(x-1)$

$(x-1)(\ln x - 2) = 0$

$x-1=0$ or $\ln x - 2 = 0$

$x=1$

$\ln x = 2 \Rightarrow e^{\ln x} = e^2$
 $x = e^2$

ii) $f(x) < 2x-2$

$(x-1)(\ln x - 2) < 0$

$x \in (1, e^2)$

x	1		e^2
$x-1$	-	+	+
$\ln x - 2$	-	-	+
$P(x)$	+	-	+

ΘΕΜΑ 4

B₁ B₂.

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2+1} - x > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

(Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$, με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O .

(Μονάδες 04)

α) i) $\sqrt{x^2+1} > x$ αφού $x < 0$ πραγματικά ισχύει!

$$ii). f(x) > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > x$$

για $x < 0$ ισχύει

$$\text{για } x \geq 0 \quad \sqrt{x^2+1} > x^2$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2+1} > x^2$$

$$1 > 0 \quad \checkmark$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\beta) i) g(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$$

$$g(-x) + g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) + \ln(\sqrt{x^2+1} + x) =$$

$$\ln(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x) =$$

$$= \ln(\sqrt{x^2+1}^2 - x^2) = \ln(1) = 0.$$

ii) Аpxu vдо нечеттн.

$$g(-x) + g(x) = 0$$

$$g(-x) = -g(x)$$

g нечеттн

B1 B2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x' .

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι αν $a > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + a$.

(Μονάδες 8)

α) Πρωτα $e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow \underline{\underline{x > 0}}$

$D_f = (0, +\infty)$

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln(e^x - 1) = 0 \Rightarrow e^{\ln(e^x - 1)} = e^0$

$e^x - 1 = 1$

$e^x = 2$

$\ln e^x = \ln 2$

$x = \ln 2$

$B(\ln 2, 0)$

β) $f(x) = x - 1$

$\ln(e^x - 1) = x - 1$

$e^{\ln(e^x - 1)} = e^{x-1}$

$e^x - 1 = e^x \cdot e^{-1}$

$t - 1 = t \cdot \frac{1}{e}$

$et - e = t$

$e^x = t$

$et - t = e$

$t(e-1) = e$

$t = \frac{e}{e-1} \Rightarrow e^x = \frac{e}{e-1}$

$$x = \ln \frac{e}{e-1} = \ln e - \ln(e-1) = 1 - \ln(e-1)$$

$$x = 1 - \ln(e-1)$$

⑧ NĐĐ $f(x) = x + a$, $a > 0$

$$\ln(e^x - 1) = x + a \Rightarrow e^{\ln(e^x - 1)} = e^{x+a}$$

$$e^x - 1 = e^{x+a}$$

$$e^x - 1 = e^x \cdot e^a$$

$$e^x = t$$

$$t - 1 = t \cdot e^a$$

$$t - t e^a = 1$$

$$t(1 - e^a) = 1$$

$$t = \frac{1}{1 - e^a}$$

$$\begin{aligned} a > 0 \\ e^a > e^0 \\ e^a > 1 \end{aligned}$$

$$e^x = \frac{1}{1 - e^a} \text{ ASudon}$$

$$0 > 1 - e^a$$

B₁ B₂

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x - \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι $\nu = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των a, β .

(Μονάδες 06)

Αν είναι $a = 5$, $\beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 07)

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 06)

δ) Αν $P(k) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού k .

(Μονάδες 06)

$$\textcircled{\alpha} \begin{cases} P(3) = 0 \\ P(-1) = -16 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 5, \beta = 3$$

$$\textcircled{\beta} P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -5 & 7 & -3 & \textcircled{3} \\ \downarrow & 3 & -6 & 3 & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$(x-3)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\textcircled{x=3} \quad \textcircled{x=1}$$

⑦ $P(x) < 0$

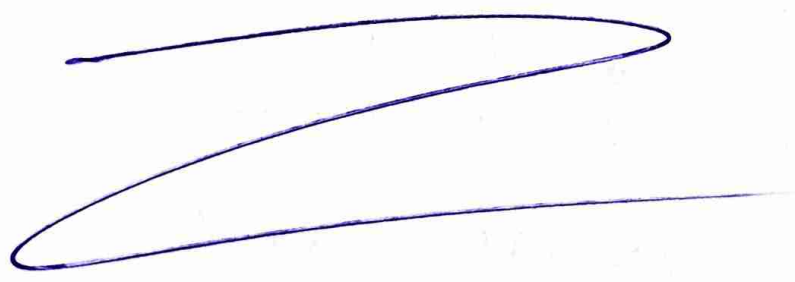
x		1	3
$x-1$	-		- ϕ +
x^2-2x+1	+	0	+ +
$P(x)$	-	-	+

$x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3)$

⑧ $\forall P(\ln k) < 0$ Bpd to k ,

$\ln k < 1$ \wedge $e^{\ln k} < e^1$ <u>$0 < k < e$</u>	$1 < \ln k < 3$ $e^1 < e^{\ln k} < e^3$ <u><u>$e < k < e^3$</u></u>
--	--

$k \in (0, e) \cup (e, e^3)$



B₁B₂

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx' .

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{a} \frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0 \Rightarrow \frac{(\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4)}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$$

ω	-6	2
$\omega - 2$	-	+
$\omega^2 + 2\omega + 4$	+	+
$\omega^2 + 4\omega - 12$	+	-
$P(\omega)$	-	+

$$\omega \in (-6, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\textcircled{b} \text{ πρηνά } \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} > 0 \text{ και } e^{2x} + 4e^x - 12 \neq 0$$

$$\text{Θέτω } e^x = \omega$$

$$\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$$

$$-6 < \omega < 2 \text{ ή } \omega > 2$$

$$\underbrace{-6 < e^x < 2}_{\substack{e^x < 2 \\ x < \ln 2}} \text{ ή } e^x > 2$$

$$\underbrace{x < \ln 2}_{x > \ln 2} \quad D_f = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$$

$$\rightarrow e^{2x} + 4e^x - 12 = 0$$

$$e^x = w$$

$$w^2 + 4w - 12 = 0$$

$$w = -6$$

$$w = 2$$

$$e^x = -6$$

$$e^x = 2$$

Adapun

$$\underline{\underline{x = \ln 2}}$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = 0$$

$$\ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} = 0$$

$$\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} = 1$$

$$\textcircled{e^x = t}$$

$$\frac{t^3 - 8}{t^2 + 4t - 12} = 1 \quad \Rightarrow t^3 - 8 = t^2 + 4t - 12$$

$$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$t^2(t-1) - 4(t-1) = 0$$

$$(t-1)(t^2-4) = 0$$

$$\textcircled{t=0}$$

$$t=1 \\ e^x = 1$$

$$t=2 \\ e^x = 2 \\ x = \ln 2$$

$$t=-2 \\ e^x = -2 \\ \text{Adapun}$$

B1.

B2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A .

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(x) = g(x) \Rightarrow 4^x = 2^x - \frac{1}{4} \Rightarrow (2^x)^2 = 2^x - \frac{1}{4}$$

$$t^2 = t - \frac{1}{4} \Rightarrow 4t^2 = 4t - 1$$

$$\textcircled{2^x = t}$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad 2^x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^{-1}$$

$$\textcircled{x = -1}$$

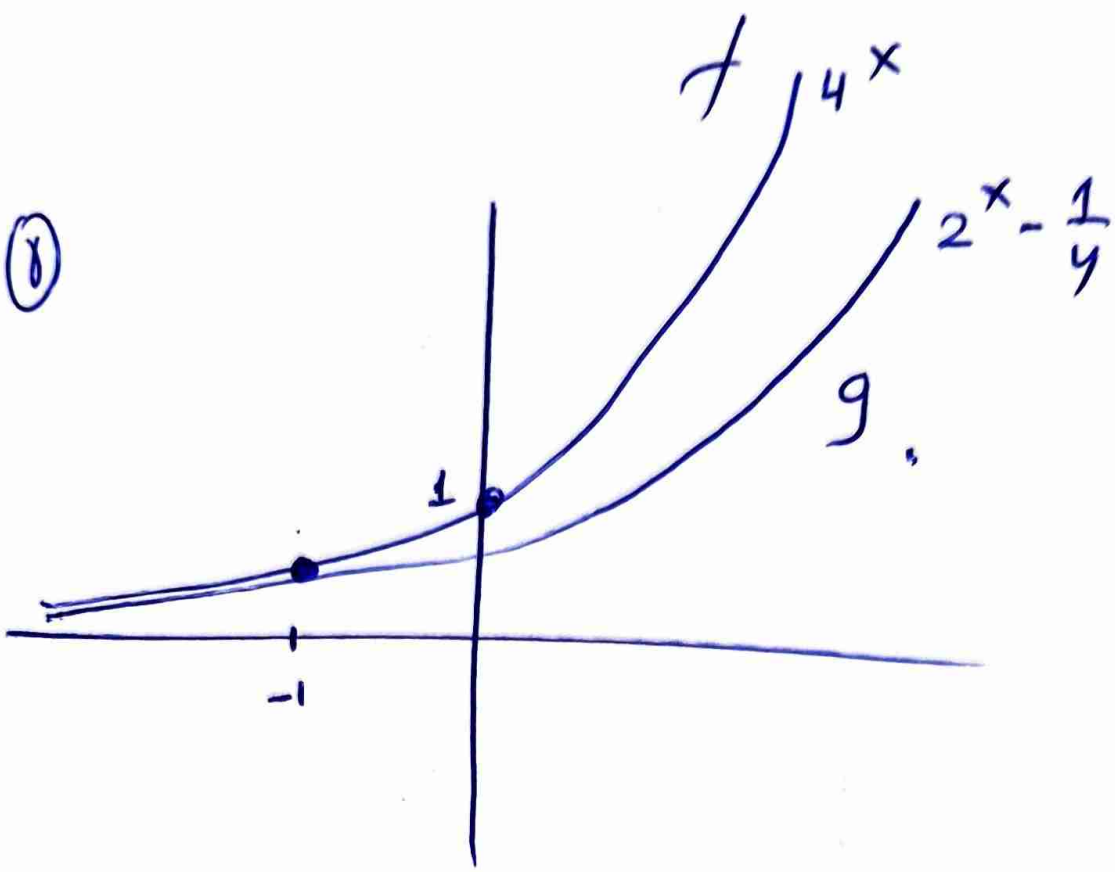
$$A\left(-1, \frac{1}{4}\right)$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(x) > g(x) \Rightarrow 4^x > 2^x - \frac{1}{4} \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x + \frac{1}{4} > 0$$

$$4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 > 0 \Rightarrow (2 \cdot 2^x - 1)^2 > 0$$



(8)



B₁ B₂.

ΘΕΜΑ 4

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5) \neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 5)

α) $P(x) = (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1$

$P(x) = 1 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1 = 1$

$(4x^2 - 1)(3x - 2) = 0$

$4x^2 - 1 = 0 \quad \vee \quad 3x - 2 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2}{3}$

β) Έστω $P(\log 5) = 1$

$\log 5 = \frac{1}{2}$

$5 = 10^{1/2}$

$5 = \sqrt{10}$

X

$\vee \quad \log 5 = -\frac{1}{2}$

$5 = 10^{-1/2}$

$5 = \frac{1}{\sqrt{10}}$

X

$\vee \quad \log 5 = \frac{2}{3}$

$5 = 10^{2/3}$

$5 = \sqrt[3]{10^2}$

X

Άρα $P(\log 5) \neq 1$.

$$\textcircled{\delta} \quad P(x) = (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1 \quad (-1, 0)$$

$$P(-1) = (4 - 1)(-3) + 1 = -9 + 1 = -8$$

$$P(0) = -1 \cdot (-2) + 1 = 3$$

$$P(-1) P(0) < 0$$

Αρα η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει

τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1, 0)$

B_1 B_2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2})$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi+\theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta \neq 0$.

(Μονάδες 7)

α) Περλι $x \neq 0$ αρσ $A_f = \mathbb{R}^*$

β) Περλι T

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x)$$

Αν $x \in D_f$ και $-x \in D_f$ αρσ οκω συμμετρικω

δωστωμα. Αρα περλι T .

$$\textcircled{\gamma} f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2}) = f(\ln 2) + f(-\ln 2) = \textcircled{*}$$

$$\rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

$$\textcircled{*} f(\ln 2) - f(\ln 2) = 0$$

$$\textcircled{8} \text{ NBSO } f(x+\theta) + f(x-\theta) = 0$$

$$f(x+\theta) + f(-x-\theta) = 0$$

$$f(x+\theta) - f(x-\theta) = 0$$

$$0 = 0.$$

B_1 B_2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(Μονάδες 7)

Αν $\alpha = 5$ και $\beta = -7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$.

(Μονάδες 7)

α) $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$

$f(1) = 3 \Rightarrow \alpha \cdot 2 + \beta = 3$

$\Rightarrow 2\alpha + \beta = 3$ (1)

$f(2) = 13 \Rightarrow \alpha \cdot 2^2 + \beta = 13$

$\Rightarrow 4\alpha + \beta = 13$

$-2\alpha = -10$

$\alpha = 5$

$\beta = -7$

$f(x) = 5 \cdot 2^x - 7$

β) $f(0) = 5 \cdot 2^0 - 7 = 5 - 7 = -2$

$K(0, -2)$

γ) $x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} \Rightarrow 5 \cdot 2^{x_1} < 5 \cdot 2^{x_2}$

$5 \cdot 2^{x_1} - 7 < 5 \cdot 2^{x_2} - 7$
 $f(x_1) < f(x_2)$

$f \uparrow$

$$\textcircled{8}. \quad f(x) > 4^x - 3$$

$$5 \cdot 2^x - 7 > (2^x)^2 - 3$$

$$2^x = \lambda$$

$$5\lambda - 7 > \lambda^2 - 3$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 < 0$$

λ	1 4	
$\lambda^2 - 5\lambda + 4$	$+$	$-$

$$\lambda \in (1, 4)$$

$$1 < \lambda < 4$$

$$1 < 2^x < 4$$

$$2^0 < 2^x < 2^2$$

$$0 < x < 2$$

B1.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0$.

(Μονάδες 10)

$$\textcircled{\alpha} \quad P(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = -1$$

$$\textcircled{\beta} \quad \ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0$$

$$P(\ln x) = 0$$

$$\ln x = 0$$

$$e^{\ln x} = e^0$$

$$x = 1$$

$$\ln x = 2$$

$$e^{\ln x} = e^2$$

$$x = e^2$$

$$\ln x = -1$$

$$e^{\ln x} = e^{-1}$$

$$x = \frac{1}{e}$$

$$\textcircled{\gamma} \quad \ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0$$

$$\ln x = t$$

$$t^3 - t^2 - 2t > 0$$

$$t(t^2 - t - 2) > 0$$

t		-1	0	2	
t		-	-	+	+
$t^2 - t - 2$		+	0	-	+
$P(t)$		-	+	-	+

$$t \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$-1 < t < 0 \quad \wedge \quad t > 2$$

$$-1 < \ln x < 0$$

$$e^{-1} < e^{\ln x} < e^0$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{e} < x < 1}}$$

$$\ln x > 2$$

$$e^{\ln x} > e^2$$

$$x > e^2$$

$$\underline{\underline{x > e^2}}$$

B1

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 05)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .

(Μονάδες 10)

δ) Αν $g(x) = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 05)

α) $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|} = f(x)$

$x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$

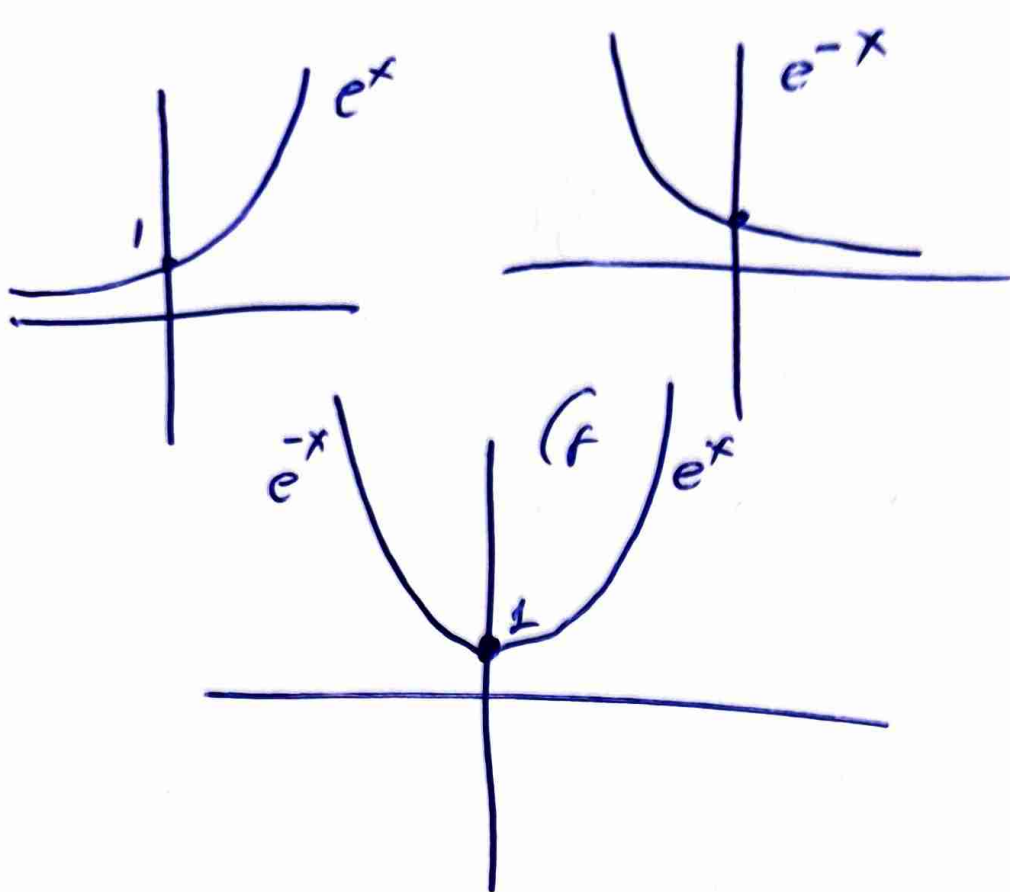
Άρτια

β) Άρκει να δό $f(x) \geq f(0)$

$e^{|x|} \geq 1 \Rightarrow \ln e^{|x|} \geq \ln 1 \Rightarrow |x| \geq 0 \checkmark$

$\rightarrow f(0) = e^0 = 1$ $\min f$

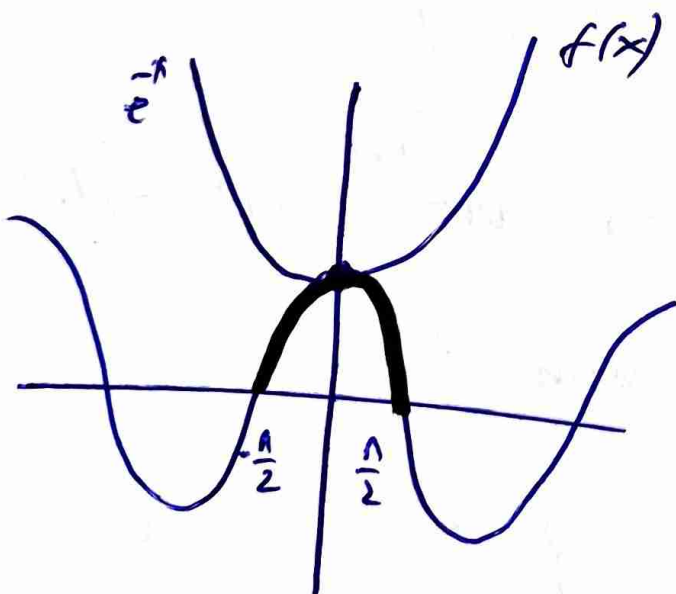
γ) $f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$



⑧ $g(x) = \sin x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(x) = g(x)$

$e^{|x|} = \sin x$



$f(x) \geq 1$

To " $=$ "
and $x=0$

exists $0 \leq g(x) \leq 1$

To $g(x) = 1$

" $=$ " $x=0$,

Proposition van maxima pily

$x=0$

BL

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 6)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$ και $\Gamma(x,\ln x)$.

(Μονάδες 10)

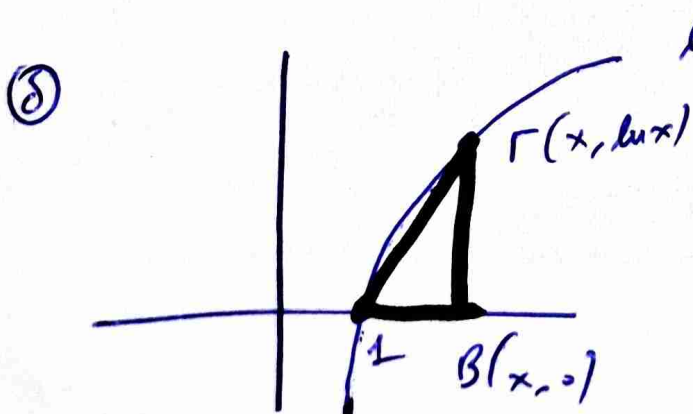
α) $f(x) = \ln|x|$
ήδη $|x| > 0$

$D_f = \mathbb{R}^* \neq$

β) $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$

$x \in D_f, -x \in D_f$ άρα άρτια.

γ) $f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & , x < 0 \\ \ln x & , x > 0 \end{cases}$



$E = \frac{B \cdot \nu}{2} = \frac{(x-1)\ln x}{2}$

ΘΕΜΑ 4

B1

α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

(Μονάδες 03)

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

(Μονάδες 05)

α) $\frac{x-2}{x+1} > 0$

x	-1	2
x-2	-	- 0 +
x+1	- 0 +	+
p(x)	+	-

$x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

β) Για να είναι καλώς ορισμένη πρέπει να έχει πεδίο ορισμού \mathbb{R} .

$\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \quad \alpha \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

ii) $0 < \frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1$

$\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0$

και $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1$

$\alpha \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

$\frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1 \Rightarrow \frac{\alpha-2}{\alpha+1} - \frac{\alpha+1}{\alpha+1} < 0 \Rightarrow \frac{-3}{\alpha+1} < 0$
 $\alpha+1 > 0$
 $\alpha > -1$

$$\text{iii) } \frac{a-2}{a+1} = 1$$

$$a-2 = a+1$$

Αδυνατα. ✓

Δα υπάρχει $a \in \mathbb{R}$

ωστε να είναι ορθογώνιο.

B1

ΘΕΜΑ 4

Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, τότε:

α) Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O .

(Μονάδες 7)

δ) Εστω $f(x) = -2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω.

(Μονάδες 6)

α) Γνωρίζω ότι $f(-1) = 2$
αφού f περιττή

$$f(-x) = -f(x)$$

Αφού f γν. φθίνουσα

$$f(-1) = -f(1)$$

$$2 = -f(1)$$

$\Rightarrow f \uparrow$ ή $f \downarrow$

$$\underline{\underline{f(1) = -2}}$$

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} -1 < 1 & \Leftrightarrow & f(-1) > f(1) \\ & & \parallel & \parallel \\ & & 2 & -2 \end{array} \right. \quad f \downarrow$$

β) $f(-x) = -f(x)$

$\underline{x=0}$

$$f(0) = -f(0)$$

$$2f(0) = 0$$

$$f(0) = 0.$$

8

x	0
f(x)	↘ + ↗ -

$x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 1 \Rightarrow f(x) > 0$

$x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 1 \Rightarrow f(x) < 0$

$f(x) = g(x)$

$f(x) = e^x - 1$

Προφανώς π.β. $h(0) = 0$

$f(x) - e^x + 1 = 0$

$h(x)$

$h(x) = 0$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1} + 1 > -e^{x_2} + 1$

$f(x_1) - e^{x_1} + 1 > f(x_2) - e^{x_2} + 1$

$h(x_1) > h(x_2)$

h ↓

απειροστικά $x=0$ μονωτική π.β.

8 $f(x) = -2x^3$

$h(x) = 1 - 2(x+2)^3$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

(Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

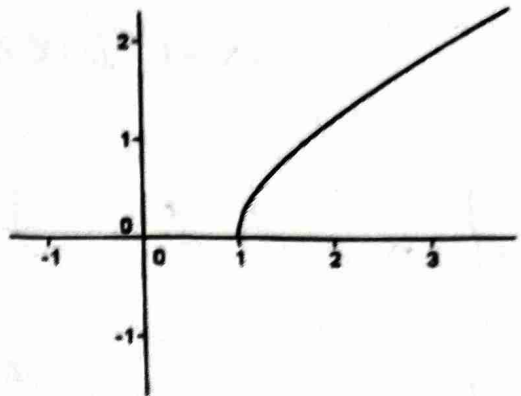
(Μονάδες 4)

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$.

(Μονάδες 7)

B₁



α) $\frac{D_f}{x \cdot \ln x > 0}$ και $\frac{x > 0}{\downarrow}$

$\ln x \geq 0$
 $e^{\ln x} \geq e^0$
 $x \geq 1$

$\frac{D_g}{\ln x \geq 0}$ $x > 0$

$e^{\ln x} \geq e^0$
 $x \geq 1$

$D_f = [1, +\infty)$

$D_g = [1, +\infty)$

β) Αρκεί να $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \sqrt{x \ln x} \geq \sqrt{\ln x}$

$x \ln x \geq \ln x \Rightarrow x \ln x - \ln x \geq 0$

Αρκεί να $\ln x (x - 1) \geq 0$

$$\text{Αφού } x \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0$$

$$\text{Αφού } x \geq 1 \Rightarrow \ln x \geq \ln 1 \Rightarrow \ln x \geq 0$$

$$(x-1) \ln x \geq 0$$

ii) f \uparrow $\forall x \geq 1$ από το σχήμα.

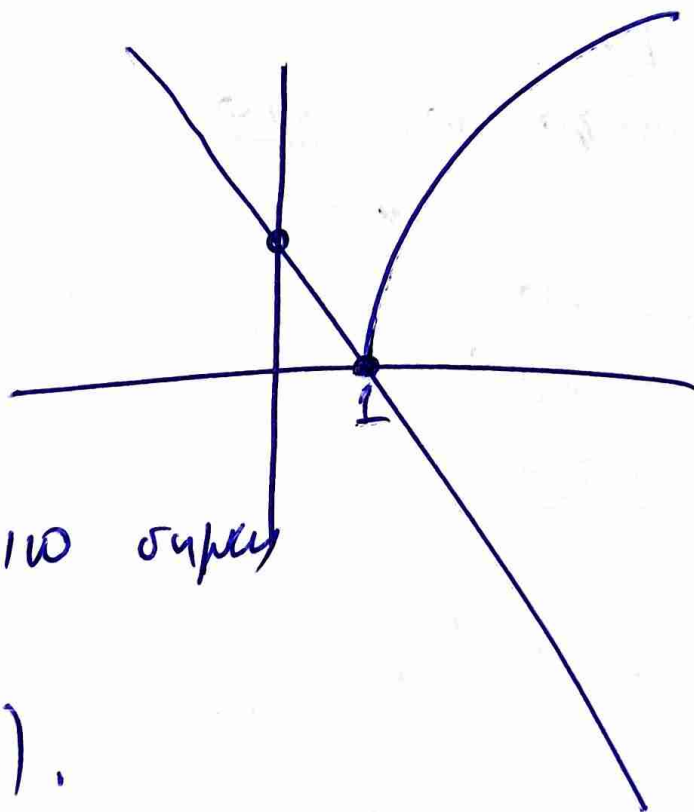
$$\text{ii) Εστω } \frac{5}{3} < \frac{7}{5} \Rightarrow 25 < 21 \text{ ΑΤΟΝΟ!}$$

$$\text{αφού } \frac{5}{3} > \frac{7}{5} \text{ \neq } f\left(\frac{5}{3}\right) > f\left(\frac{7}{5}\right).$$

iii)

$$y = 1 - x$$

x	1	0
y	0	1



Μοναδικό κοινό σημείο

$$A(1, 0).$$

B₁.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$. (Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y=2$. (Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$$

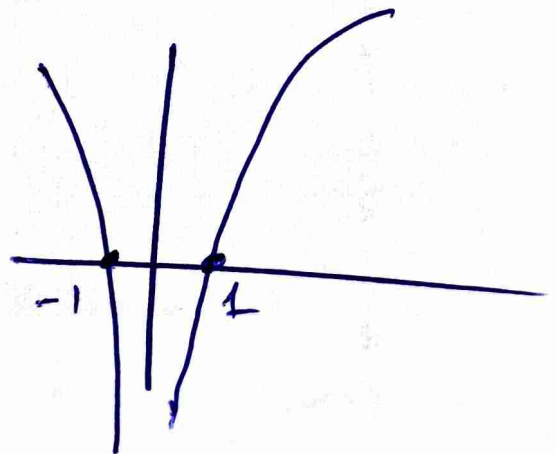
$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln (-x)^2 = \frac{1}{2} \ln x^2 = f(x) \text{ άρα } \textcircled{\alpha}$$

$$x \in D_f, -x \in D_f$$

$$\textcircled{\beta} f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 = \frac{1}{2} 2 \ln |x| \text{ για } x > 0 \textcircled{\oplus}$$

$$f(x) = \ln x, x > 0$$

$$\textcircled{\gamma} f(x) = \begin{cases} \ln(-x), & x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$$



$$\textcircled{8} \quad |x| < 2$$

$$\underline{x < 0}$$

$$|x| < 2$$

$$|(-x)| < 2$$

$$e^{|(-x)|} < e^2$$

$$-x < e^2$$

$$\boxed{0 > x > -e^2}$$

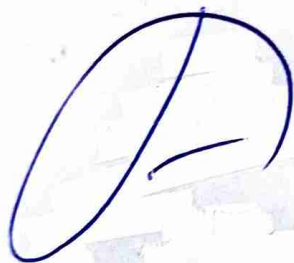
$$f(x) = \begin{cases} |(-x)|, & x < 0 \\ |x|, & x > 0 \end{cases}$$

$$\underline{x > 0}$$

$$|x| < 2$$

$$e^{|x|} < e^2$$

$$\boxed{0 < x < e^2}$$



P_1

$$x \in (-e^2, 0) \cup (0, e^2)$$

B1

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^x$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση. (Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα; (Μονάδες 7)

γ) Για $\lambda = 0$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 6$. (Μονάδες 7)

α) $f(x) = a^x$ εκθετική $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

$0 < \frac{2-\lambda}{4}$ και $\frac{2-\lambda}{4} \neq 1$

$2-\lambda > 0$
 $2 > \lambda$

$2-\lambda \neq 4$
 $\lambda \neq -2$

$\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$

β) Η $f(x) = a^x$ ↓ αν $0 < a < 1$

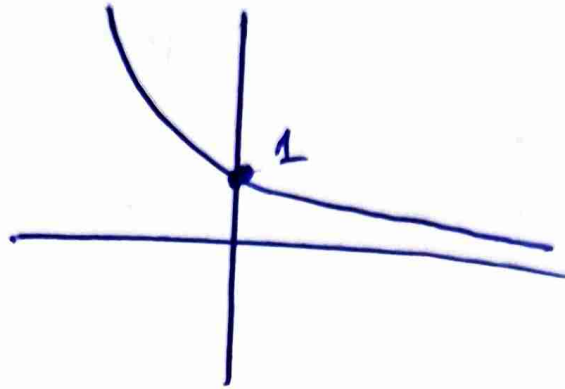
$0 < \frac{2-\lambda}{4} < 1$

$0 < 2-\lambda < 4$

$0 < 2-\lambda$ και $2-\lambda < 4$

$\lambda < 2$ $\lambda \in (-2, 2)$ $-2 < \lambda$

⑧ il fua $\lambda=0$ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



ii) $f(x) + f(x+1) = 6$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 6$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{2} = 6$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$$

$$2 + \frac{1}{2} 2 = 6$$

$$2 \cdot 2 + 2 = 12$$

$$3 \cdot 2 = 12$$

$$2 = 4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$$

$$2^{-x} = 2^2$$

$$-x = 2$$
$$x = -2$$