

Συνοψη

Των

σημαντικων

ασκησην

εω σημερα.

2/12/25.

1.

Να εξετάσεται αν οι συναρτήσεις,

$$f(x) = x - \ln(e^x - 1)$$

$$g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - 1}$$

είναι ισόες.

Λύση

D_f

πρέπει $e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow \ln e^x > \ln 1$
 $\Rightarrow x > 0.$

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$f(x) = x - \ln(e^x - 1)$$

D_g

πρέπει $\frac{e^x}{e^x - 1} > 0$

$$\Rightarrow e^x - 1 > 0$$

$$e^x > 1$$

$$\underline{\underline{x > 0}}$$

και $e^x - 1 \neq 0$

$$e^x \neq 1$$

$$\ln e^x \neq \ln 1$$

$$x \neq 0$$

$$D_g = (0, +\infty).$$

$$g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - 1} = \ln e^x - \ln(e^x - 1) =$$

$$= x - \ln(e^x - 1) = f(x).$$

Εχουν ιδιο τιπο.

Εχουν ιδιο ποσο ορισμου.

Αρα ανα ιση!

$$(-\infty, +\infty) \quad f(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

$$\text{чи } g(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

Найдите $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$

$$\text{и } \frac{f}{g}.$$

Решение

$$\bullet (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{e^x - 1} + \frac{x-1}{x-2}$$

$$\bullet (f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{e^x - 1} - \frac{x-1}{x-2}$$

$$\bullet (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{e^x - 1} \cdot \frac{x-1}{x-2}$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [0, 2) \cup (2, +\infty).$$

D_f

$$\text{при } e^x - 1 \geq 0$$

$$e^x \geq 1$$

$$x \geq 0$$

$$D_f = [0, +\infty)$$

D_g

$$\text{при } x-2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\sqrt{e^x-1}}{\frac{x-1}{x-2}}}{\frac{x-1}{x-2}} = \frac{(x-2)\sqrt{e^x-1}}{x-1}$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \text{ with } g(x) \neq 0$$

$$\frac{x-1}{x-2} \neq 0$$

$$x-1 \neq 0$$

$$\underline{\underline{x \neq 1}}$$

$$D_{f/g} = [0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

3.

$\in \text{OTW}$ $f(x) = \sqrt{x-1}$ can $g(x) = \frac{1}{x}$
 $D_f = [1, +\infty)$ $D_g = \mathbb{R}^*$

Nu Bspadow oi $f \circ g$ can got.

Answer

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$

$x \in D_g$ can $g(x) \in D_f$.

$x \neq 0$

$\frac{1}{x} \geq 1$

$\frac{1}{x} - 1 \geq 0$

$\frac{1-x}{x} \geq 0$

x	0	1
1-x	+	0
x	-	+
$\frac{1-x}{x}$	-	+

$x \in (0, 1]$

$D_{f \circ g} = (0, 1]$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$x \in D_f$ can $f(x) \in D_g$

$x \geq 1$

$\sqrt{x-1} \neq 0$

$x-1 \neq 0$

$x \neq 1$

$D_{g \circ f} = (1, +\infty)$

4.

Εστω οι θετικοί νδσ
για συνάρτηση είναι 1-1.

(a) $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$

Εστω $f(x_1) = f(x_2)$

$$\ln\left(\frac{x_1-2}{x_1-1}\right) = \ln\left(\frac{x_2-2}{x_2-1}\right)$$

$$\frac{x_1-2}{x_1-1} = \frac{x_2-2}{x_2-1}$$

$$(x_1-2)(x_2-1) = (x_1-1)(x_2-2)$$

$$\cancel{x_1}x_2 - x_1 - 2x_2 + 2 = \cancel{x_1}x_2 - 2x_1 - x_2 + 2$$

$$-x_1 = -x_2$$

(b) $f(x) = e^x + x - 1$

$$x_1 = x_2$$

$$f(1) = 1$$

$$f'(x) = e^x + 1 > 0$$

f αυξ. από $f(1) = 1$.

5.

Νδο n $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \neq 0$

αντιστρέφεται και να βρω
την αντιστροφή $f^{-1}(x)$.

Λύση

Εστω $f(x_1) = f(x_2) \quad (\Rightarrow) \quad \frac{e^{x_1} + 1}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 1}{e^{x_2} - 1}$

$$(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_2} + 1)(e^{x_1} - 1)$$

$$\cancel{e^{x_1} e^{x_2}} - e^{x_1} + e^{x_2} - \cancel{1} = \cancel{e^{x_2} e^{x_1}} - e^{x_2} + e^{x_1} - \cancel{1}$$

$$2e^{x_1} = 2e^{x_2}$$

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

αρα f 1-1
αρα αντιστ.

$$f(x) = y$$

$$y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

1o checkpoint

$$y(e^x - 1) = e^x + 1$$

$$ye^x - y = e^x + 1$$

$$ye^x - e^x = 1 + y$$

$$e^x(y - 1) = 1 + y$$

$$e^x = \frac{1+y}{1-y}$$

$$x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

2o checkpoint

para $y \neq 1$

3o checkpoint

$$\frac{1+y}{1-y} > 0$$

$$y \in (-1, 1)$$

y	-1	1
$\frac{1+y}{1-y}$	-	+
$1-y$	+	-
$\frac{1+y}{1-y}$	-	+

Te 2o / 4o checkpoint

Para $x \neq 0$

$$\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{1+y}{1-y} \neq 1 \Rightarrow$$

Terminar

$$D_{f^{-1}} = (-1, 0) \cup (0, 1)$$

$$1+y \neq 1-y \Rightarrow 2y \neq 0$$

$$y \neq 0$$

6.

Επιλυση Βασικων οριων.

$$\textcircled{a} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 + 4} = \frac{8 - 8 - 1}{8} = -\frac{1}{8}.$$

$$\textcircled{b} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x}{2x} = \frac{12 - 8}{4} = 1$$

$$\textcircled{\gamma} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 4} \stackrel{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 2}$$

x	2
x-2	-0+

$$= \frac{-1}{4} \cdot \infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 2} = -\frac{1}{4} (-\infty) = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 2} = -\frac{1}{4} (+\infty) = -\infty$$

Το σημειωμενο αναπαρουσιάζει,

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x - 1} \stackrel{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{1}{\sin x - 1} =$$

$$= 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

opt $\sin x \leq 1 \Rightarrow \sin x - 1 \leq 0$

$$\textcircled{9} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 1}{x^4 - 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{\sqrt{x^2 + 5}}^2 - 3^2}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}(x-1)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}$$

$$= \frac{4}{6}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x \right) =$$

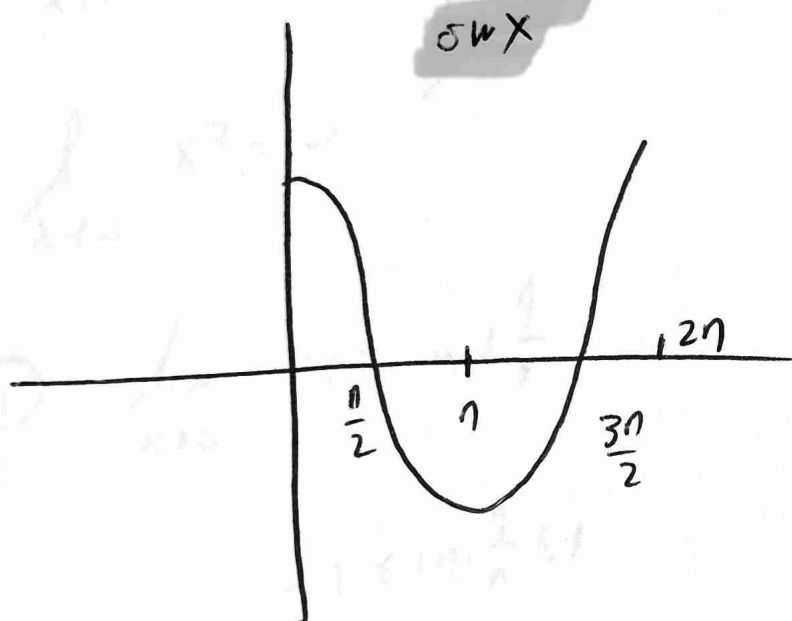
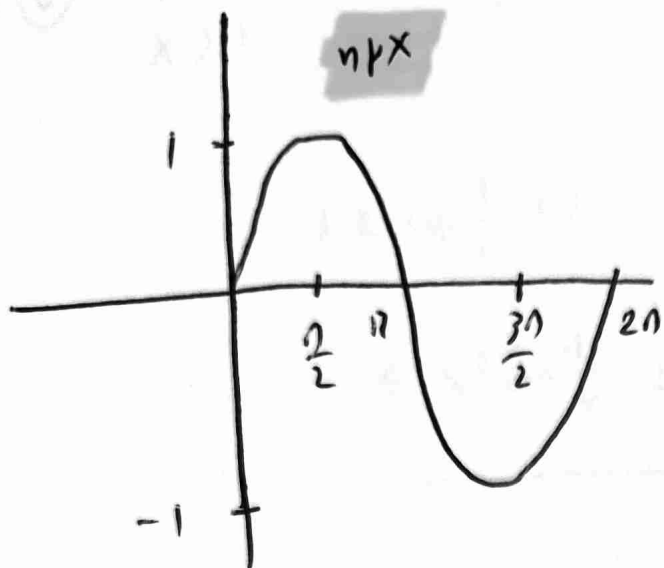
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x \right) \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x \right)}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 + \frac{4}{x} \right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 + \frac{4}{x} \right)}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - x} =$$

$$= \frac{2}{-1-1} = \frac{2}{-2} = -1$$



$$\textcircled{9} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \delta w \frac{1}{x} = 0.$$

$$-1 \leq \delta w \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\boxed{-x^2 \leq x^2 \delta w \frac{1}{x} \leq x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{array} \right\} \text{Αν κ.Π.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \delta w \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{10} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \eta r x \quad \eta r \frac{1}{x}$$

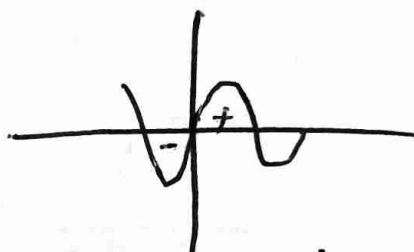
$$-1 \leq \eta r \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left| \eta r \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$$\left| \eta r x \right| \left| \eta r \frac{1}{x} \right| \leq \left| \eta r x \right|$$

$$\left| \eta r x \eta r \frac{1}{x} \right| \leq \left| \eta r x \right|$$

$$\boxed{-\left| \eta r x \right| \leq \eta r x \eta r \frac{1}{x} \leq \left| \eta r x \right|}$$



Δεν χρειάζεται το
πρόσημο του
 $\eta r x$ κοντά στο 0

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} -\ln|x| &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Ans K, D}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| \ln \frac{1}{x} = 0.$$

$$(K) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln x}{x^2 + x + 1} \quad \frac{\frac{\infty}{\infty}}{DLH} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \frac{1}{x}}{2x+1}$$

$$\frac{\frac{\infty}{\infty}}{DLH} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \frac{1}{x^2}}{2} = +\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\ln(x+1) - x \sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \quad \frac{DLH}{DLH}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{x+1} - (\sin x + x(-\cos x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{x+1} - \sin x + x \cos x}$$

$$\frac{\left(\frac{0}{0} \right)}{DLH} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{-\frac{1}{(x+1)^2} + \cos x + x \sin x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\textcircled{p} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$0 \cdot \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$$

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{\ln x}{e^x} \right)$$

$$= +\infty / (1 - 0) = +\infty$$

$+\infty - \infty$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x e^x} = 0$$

$$\textcircled{7} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \cdot \ln x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = e^{(-\infty)^2} = e^{+\infty} = +\infty.$$

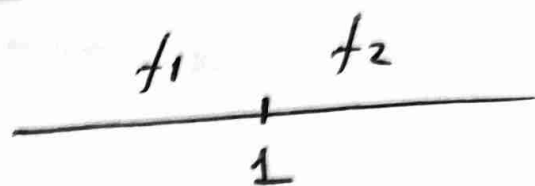
7.

Δύο σκαρπύ.

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x-1} - 1, & x \leq 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

Είναι σκαρπύ η $f(x)$;

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (xe^{x-1} - 1) = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x \ln x) = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$



$$f(1) = 1 \cdot e^{1-1} - 1 = 0 \quad \text{αρα} \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Αρα σκαρπύ στο 1!

Η f σκαρπύ $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$

ως Π.Ο.Ο.

Είναι παραγωγισίμη η $f(x)$;

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x e^{x-1} - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + x e^{x-1}}{1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x - 0}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 1$$

Η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

και παραγωγίσιμη αν $x \neq 1$

$(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως π.ο.σ

εν τέλει δεν είναι παραγωγίσιμη.

Σχολιο

Αν η f είναι συνεχής $\delta\omega$ σημαίνει
οτι είναι παραγωγισιμή.

Αν η f $\delta\omega$ είναι συνεχής $\delta\omega$ είναι
ουτε παραγωγισιμή.

Κριτική σημεία

Αφου η f $\delta\omega$ παραγωγίζεται στο 1

Το 1 είναι κριτικό σημείο.

$$\underline{x < 1}$$

$$f_1(x) = x e^{x-1} - 1$$

$$f_1'(x) = e^{x-1} + x e^{x-1}$$

$$f_1'(x) = e^{x-1} (1+x)$$

$$\rightarrow f_1'(x) = 0 \Rightarrow x+1=0$$

$$x = -1$$

κριτικό σημείο

$$\underline{x > 1}$$

$$f_2(x) = x \ln x$$

$$f_2'(x) = \ln x + 1$$

$$\rightarrow \ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1}$$

$$x = \frac{1}{e}$$

Εφαρμογή στο 1

Μεγάλη προσοχή εδώ!

Το $x_0=1$ είναι το σημείο αλλαγής
τύπου.

Η εφαπτομένη στο 1 είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$\text{Το } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Εδώ αφού η f δεν είναι

περ/κη στο 1 δω ορίζεται

εφαπτομένη στο 1.

As υποθέσουμε ότι στην ίδια άσκηση

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= 1 \end{aligned} \right\} f'(1) = 1.$$

$$\text{εξ } y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$\boxed{y = x - 1}$$

Στο σημείο αυτό η εφαπτομένη
σχηματίζει γωνία 45° με την
α'x γωνία $\epsilon\varphi\omega = f'(1)$

$$\epsilon\varphi 45 = 1$$

$$\epsilon\varphi 135 = -1$$

8.

 $\in \sigma \tau w$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x-1} = 4.$$

• Να βρεθεί το $f(1)$ και $f'(1)$.

Λύση

$$\text{Από } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x-1} = 4$$

$$\text{Θέτω } g(x) = \frac{f(x) - x^2}{x-1} \quad \text{από } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$$

$$g(x)(x-1) = f(x) - x^2$$

$$g(x)(x-1) + x^2 = f(x)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x-1) + x^2 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$4 \cdot (1-1) + 1^2 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

και αφού η f συνεχής $f(1) = 1$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(x-1) + x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} + \frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (g(x) + x + 1) = 4 + 2 = 6$$

$$f'(1) = 6.$$

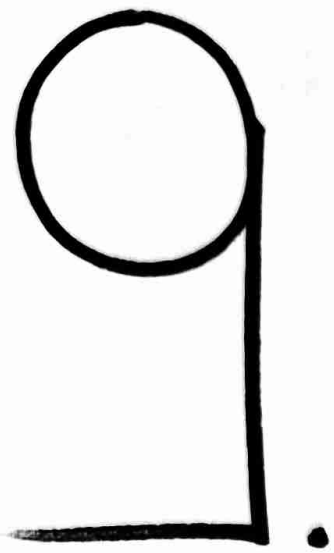
Σχόλιο

Παρατήρηση η άσκηση αυτή να

Για να να $f(1)$ και $f'(1)$

θα μπορούσε να Γίνεται την

εφαρμογή στο 1.



Παραγωγή

συνθετών

συναρτήσεων

(α) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)'$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

(β) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

$$f'(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)'$$

$$f'(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right)$$

$$\textcircled{1} \quad g(x) = f^2(x) - \ln^2 f(x) - f^2(x^2)$$

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2\ln f(x)(\ln f(x))' - \\ - 2f(x^2)(f(x^2))'$$

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2\ln f(x) \frac{1}{f(x)} f'(x) - \\ - 2f(x^2)f'(x^2) 2x$$

Εργασία Μαθητή

1. Θεωρία

1.18 1.28 1.42

1.21 1.31

1.22 1.34

1.24 1.36

1.26 1.40

2. Διαβάστησα ότι η υσάκη

στο σύστημα μαθητές

με εμψύχηση στο

μεθοδολογία.