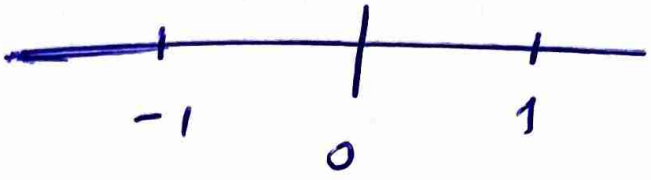
28.

Ενότητα 24

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & x<0 \\ 2x-x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Ικανοποιεί το Bolzano στο $(-1,1)$;



- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x^3 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x-x^2 = 0$

$\Big\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$f(0) = 0$

Άρα $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ η f συνεχής στο 0.

Η f συνεχής στο $[-1,0]$ και $(0,1]$

αλλ π.δ.δ. αρα συνεχής $[-1,1]$

$f(-1) = 1$

$f(1) = 1$

$\Big\}$ $f(-1)f(1) > 0$ άρα δεν ισχύει το Bolzano.

Ορίζεται και εφάπτεται της C_f στο 0;

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

↓

υπάρχει;

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^3 - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} -x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x - x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2 - 2x}{1} = 0$$

f παραγωγίσιμη στο 0 και

$f'(0) = 0$ άρα ορίζεται και εφάπτεται στο 0

(01) Μονοτονία - Ακρότατα Τιμών

$x < 0$

$f_1(x) = -x^3$

$f_1'(x) = -3x^2$

$\rightarrow -3x^2 = 0$

$\boxed{x = 0}$

$x \geq 0$

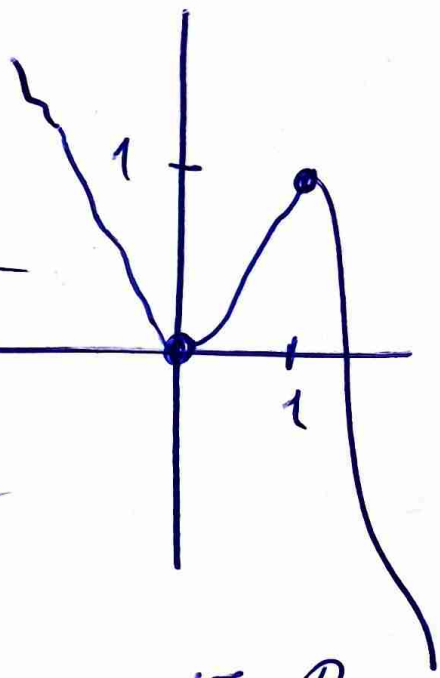
$f_2(x) = 2x - x^2$

$f_2'(x) = 2 - 2x$

$\rightarrow 2 - 2x = 0$

$x = 1$

x	$-\infty$		0		1	
f_1'		$-$	0	///	///	///
f_2'	////	////	////	$+$	0	$-$
f'		$-$		$+$		$-$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$
						$-\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$

$\Sigma T_f = \mathbb{R}$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(B) Ανίσωση $f(-2x) > f(-x^2)$ $(0,+\infty)$

- $x>0 \Rightarrow -2x<0$
- $x>0 \rightarrow x^2>0 \Rightarrow -x^2<0$

$\left.\begin{array}{l}\\\\\end{array}\right\}$ $\forall x<0$ και $f\downarrow$

$$-2x < -x^2$$

$$x^2-2x<0$$

x		0		2	
x^2-2x	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$

$$x \in (0,2).$$

(Γ) Εξίσωση $f(e^x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ στο $(-1,0)$

- $-1<x<0 \Rightarrow e^{-1} < e^x < e^0 \Rightarrow e^{-1} < e^x < 1$
- $\frac{1}{2} \in (0,1)$

$f\uparrow$

$$e^x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\ln 2$$

(8) Νδο $f(x+1) > f(e^x) \quad \forall x > 0$

- $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1$
- $x > 0 \Rightarrow x+1 > 1$

$\forall x > 1$ η $f\downarrow$

$x + 1 < e^x$

που ισχυει

απο Βασιλικη

απλοστικη

14. $f(x)=(x+1)\eta\mu x$

Εισοδος 20

$\boxed{\exists\, \xi \in (-1,0] \text{ τ.ω } f'(\xi)=0}$

(β) Νδο η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = -x-1$ εχει

τουλ. μία ρίζα $(-2,\omega)$.

$$f'(x) = \eta\mu x + (x+1)\sigma\upsilon x$$

$$f'(\xi) = \eta\mu\xi + (\xi+1)\sigma\upsilon\xi = 0$$

$$\frac{\eta\mu\xi}{\sigma\upsilon\xi} + \xi + 1 = 0$$

$$\varepsilon\varphi\xi = -\xi - 1$$

14. $f(0)=0$ f

$f(1)=1$ f'

$f''(x)\neq 2$ f''

(α) $g(x)=f(x)-x^2$

$g(0)=f(0)=0$

$g(1)=f(1)-1=0$

} Rolle $\exists\, \xi\in(0,1)$ τ.ω $g'(\xi)=0$

(β) Έστω ότι η $f(x)=x^2$ έχει 3 ρίζες

$\underbrace{f(x)-x^2}_{h(x)}=0$

$h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=0$

Rolle Rolle

$h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$

Rolle

$h''(\xi)=0$

$h(x) = f(x) - x^2$

$h'(x) = f'(x) - 2x$

$h''(x) = f''(x) - 2$

$h''(\xi) = f''(\xi) - 2 = 0$

$f''(\xi) = 2$ Άτοπο!

Άρα έχει το πολύ 2 ρίζες

β) $f(x) = x^2$

$f(x) - x^2 = 0$

$g(x) = 0$

$g(0) = 0$ $g(1) = 0$

Άρα έχει δύο ρίζες Το πολύ δύο ρίζες έχει δηλαδή

12. $f'(x) \neq 3x^2$

Νδο η εξίσωση $f(x)=x^3$ έχει μόνο μία πολ ρίζα.

$$f(x)=x^3 \Rightarrow \underbrace{f(x)-x^3=0}_{h(x)}$$

Έστω ότι η $h(x)$ έχει 2 ρίζες

$$h(x_1)=h(x_2)=0$$

Rolle

$$h'(\xi)=0$$

$$h'(x)=f'(x)-3x^2$$

$$h'(\xi)=f'(\xi)-3\xi^2=0$$

$$f'(\xi)=3\xi^2$$ Άτοπο!

Έχει το πολ 1 ρίζα

35. $f'(0) < 0$

$f'(x) \neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

f

f' συνεχής

(α) Να δ.ο. $f \downarrow$

Αφού $f'(x) \neq 0$ και συνεχής

$f'(x) < 0$ ή $f'(x) > 0$

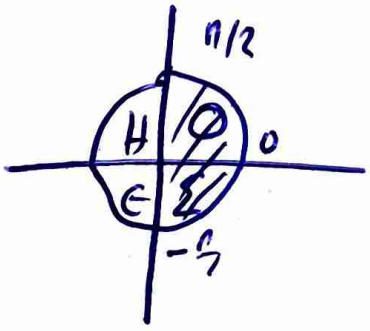
όμως $f'(0) < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$

(β) $f(\varepsilon\varphi x) > f(\eta\mu x)$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f \downarrow$

$\varepsilon\varphi x < \eta\mu x$



$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} > \eta\mu x$

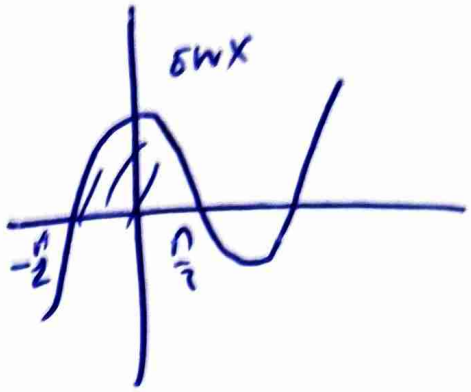
$\sigma\upsilon\nu x > 0$ ④

$\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x > \eta\mu x$,

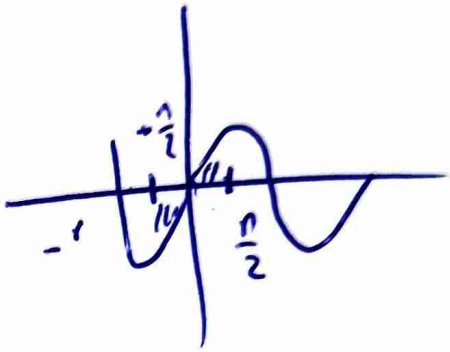
$$\text{tg}x\,(1-\sin x) < 0$$

$$\text{tg}x < 0$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$



Β' τρόπος



$$\varepsilon\varphi x < \text{tg}x$$

$$\underbrace{\varepsilon\varphi x - \text{tg}x}_{h(x)} < 0$$

$$h(x) < 0$$

$$h(x) < h(0)$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \sin x = \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}$$

h → $x < 0$

$$\rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow 1-\sin^3 x = 0 \Rightarrow \sin^3 x = 1$$

$$\sin x = 1$$

$x = 0$,

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
h'		$+$	0	$+$	
h		↗		↗	

(8) $f(x^2) - \ln x = f(x)$, $x > 0$

$f(x^2) = f(x) + \ln x$

$f(x^2) + \ln x = f(x) + 2\ln x$

$f(x^2) - \ln x^2 = f(x) - \ln x$

$g(x) = f(x) - \ln x$

$g(x^2) = g(x)$

$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} < 0$

$g(x) = \ln x + 1$

$g(x) = 1$

$x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0$ $x = 1$

40. $f(x) = e^x(x^2+3)$

(a) $f'(x) = e^x(x^2+3) + e^x \cdot 2x$

$f'(x) = e^x(x^2+2x+3) > 0$ $f \nearrow$

$f''(x) = e^x(x^2+2x+3) + e^x(2x+2)$

$f''(x) = e^x(x^2+4x+5) > 0$ $f' \nearrow$

$\Delta < 0$

(B) $f(2x^2) + 2f(x+2) > f(2x+4) + 2f(x^2)$

$(0, +\infty)$

$f(2x^2) - 2f(x^2) > f(2(x+2)) - 2f(x+2)$

$g(x) = f(2x) - 2f(x)$

$g(x^2) > g(x+2)$

$g'(x) = 2f'(2x) - 2f'(x) = 2(f'(2x) - f'(x))$

$\cdot\ x < 2x \Rightarrow f'(x) < f'(2x) \Rightarrow f'(2x) - f'(x) > 0$

$g'(x) > 0$ $g \nearrow$

$g(x^2) > g(x+2)$

$g \uparrow$

$x^2 > x+2$

$x^2 - x - 2 > 0$

x		-1		2
x^2-x-2	$+$	$-$		$+$

$x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

⑧ $f(2x^4+6) - f(2x^2+6) = 2f(x^4+3) - 2f(x^2+3)$

$f(2(x^4+3)) - 2f(x^4+3) = f(2(x^2+3)) - 2f(x^2+3)$

$\boxed{g(x) = f(2x) - 2f(x)}$

$g(x^4+3) = g(x^2+3)$

g 偶 $(-)$

$x^4+3 = x^2+3$

$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-1) = 0$

$x=0$ $x=1$ $x=-1$

14. Β) Νδο η εξίσωση

Ενότητα 14

$\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x$

έχει ακριβώς μια ρίζα

στο $(0, \frac{\pi}{2})$

$$\underbrace{\ln(e^x - x) - \sigma\upsilon\nu x = 0}_{f(x)}$$

$f(0) = \ln(e^0 - 0) - \sigma\upsilon\nu 0 = 0 - 1 < 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = \ln(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}) > 0$

$f(0) f(\frac{\pi}{2}) < 0$

Bolzano

$\exists \xi \in (0, \frac{\pi}{2})$

τ.ω. $f(\xi) = 0$.

• $e^x \geq x + 1$

$e^x - x \geq 1$

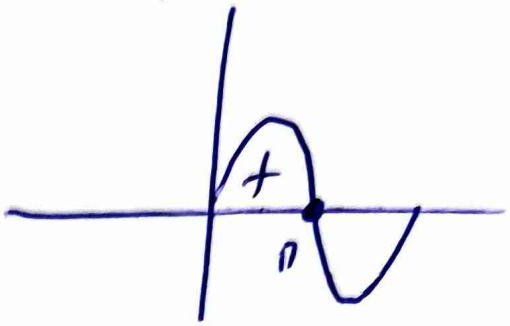
$e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2} \geq 1$

$\ln(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}) \geq \ln 1$

$\ln(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}) \geq 0$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta\mu x > 0$$

(+) (+) (+)



- $e^x \geq x + 1$

$e^x - x \geq 1$

$e^x - x > 0$

$x > 0$

$e^x > e^0$

$e^x > 1$

$e^x - 1 > 0$

→ f γν $(0, \frac{\pi}{2})$

το ζητούμενο

10. $f(x) = e^x + x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Ενότητα 24

① $f'(x) = e^x + \underbrace{1 - \eta\mu x}_{\oplus} > 0$

$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ $\quad f \nearrow$

$1 \geq -\eta\mu x \geq -1$

$\boxed{2 \geq 1 - \eta\mu x \geq 1}$

③ Ισχύει $f(\varepsilon\varphi x) - e^x > x + \sigma\upsilon\nu x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$f(\varepsilon\varphi x) > e^x + x + \sigma\upsilon\nu x$

$f(\varepsilon\varphi x) > f(x)$

$f \nearrow$

$\varepsilon\varphi x > x.$

$\underbrace{\varepsilon\varphi x - x}_{g(x)} > 0$

$g(x) > 0$

$$g(x) = \varepsilon\varphi x - x$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sigma w^2 x} - 1 = \frac{1 - \sigma w^2 x}{\sigma w^2 x} = \frac{\mu p^2 x}{\sigma w^2 x} \geq 0$$

$g \nearrow$

Av $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0)$

$g \nearrow$

$$\varepsilon\varphi x - x > 0$$

$$\varepsilon\varphi x > x \quad \checkmark$$

ii). Vdo $f(e^{x-1} - 1) > f(\ln x^x)$ If $x > 1$

$f \nearrow$

$$e^{x-1} - 1 > \ln x^x$$

$$e^{x-1} - 1 > x \ln x$$

$$\underbrace{e^{x-1} - 1 - x\ln x > 0}_{\varphi(x)}$$

$$\varphi'(x) = e^{x-1} - \ln x - 1$$

- $e^x \geq x+1$

  $e^{x-1} \geq x-1+1$

  $e^{x-1} \geq x$

$\ln x \leq x-1$

$-\ln x \geq 1-x$

$\oplus$

$$e^{x-1} - \ln x \geq 1$$

$$\underbrace{e^{x-1} - \ln x - 1 \geq 0}$$

$$\varphi'(x) \geq 0$$

$\varphi \nearrow$

Av $x > 1$ $\Rightarrow \varphi(x) > \varphi(1)$ ✓

$\Rightarrow e^{x-1} - 1 - x\ln x > 0$

iii) $f(e^x) > f(1+\ln x)$ $\forall x > 0$.

$f \nearrow$

$e^x > 1 + \ln x$

$\underbrace{e^x - 1 - \ln x > 0}_{\varphi(x)}$

$\varphi'(x) = e^x - \frac{1}{x}$

$\varphi'(x) = \underbrace{e^x - 1}_{①} + \underbrace{1 - \frac{1}{x}}_{②} > 0$

① $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1$

$e^x - 1 > 0$

② $\varphi \nearrow$

Av $x > 0$ $\varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow e^x - 1 - \ln x > 0$ ✓

Επόμενο Μάθημα

Τρίτη: 6:30 - 8

Οι ασκήσεις είναι για το μάθημα την περασμένη. 5/11

Ενότητα 23

(26) α β γ

(27) ολη

(28) β δ

(29)

Ενότητα 24

(9) $f(x) = e^x + \ln(x+1)$

(41)

(42)

(43)

(46)

(60)

Άσκηση επανάληψης

Δίνεται $f(x) = e^x + 2x + \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Μονοτονία.

(β) Να δείξετε $f(\eta\mu x) - e^x < 2x + \eta\mu x$ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

(γ) Να δείξετε $f(x-1) > f(\ln x)$ $\forall x > 1$

(δ) Να δείξετε $f(e^x) > f(1 + \eta\mu x)$ $\forall x > 0$.