11

Ασκηση 1η

Ευρεση ακροτατων απο τυπο

ⓐ $f(x) = 3x^4 - 2$

Ισχυει οτι $x^4 \geq 0$

$3x^4 \geq 0$

$3x^4 - 2 \geq -2$

$f(x) \geq -2$

→ $f(x) = -2$

$3x^4 \cancel{-2} = \cancel{-2}$

$3x^4 = 0$

$x^4 = 0$

$x = 0$

$A(0, -2)$

Ολικο ελαχιστο.

(B) $f(x) = 3 - \dfrac{2}{4-3\sqrt{x}}$

Ισχύει ότι $\sqrt{x} \geq 0$

$$-3\sqrt{x} \leq 0$$

$$4-3\sqrt{x} \leq 4$$

$$\frac{1}{4-3\sqrt{x}} \geq \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{4-3\sqrt{x}} \geq \frac{2}{4}$$

$$-\frac{2}{4-3\sqrt{x}} \leq -\frac{1}{2}$$

$$3-\frac{2}{4-3\sqrt{x}} \leq 3-\frac{1}{2}$$

$$f(x) \leq \frac{5}{2}$$

$\rightarrow f(x) = \frac{5}{2}$

$$3 - \frac{2}{4-3\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$$

$$3 - \frac{5}{2} = \frac{2}{4-3\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4-3\sqrt{x}}$$

$$\cancel{4} - 3\sqrt{x} = \cancel{4}$$

$$-3\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x} = 0$$

$$x = 0$$

Το $A\left(0, \frac{5}{2}\right)$

Ολικο μεγιστο,

(γ) $f(x) = 2 - \sqrt{x^2+1}$

Ισχύει ότι $x^2 \geq 0$

$x^2+1 \geq 1$

$\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{1}$

$\sqrt{x^2+1} \geq 1$

$-\sqrt{x^2+1} \leq -1$

$\underbrace{2-\sqrt{x^2+1}}_{f(x)} \leq 1$

$f(x) \leq 1$

$\longrightarrow f(x)=1 \Rightarrow 2-\sqrt{x^2+1} = 1$

$2-1 = \sqrt{x^2+1}$

$1 = \sqrt{x^2+1}$

$\cancel{1} = x^2 \cancel{+1}$

$x^2=0$

$x=0$

$A(0,1)$

Ολ. Μέγιστο.

Ασκηση 2η

Νδο η $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+9}$ παρουσιαζει

ελαχιστο για $x=-3$ και

μεγιστο στο 3.

→ Για να δειξω οτι η $f(x)$ παρουσιαζει

ελαχιστο για (ή στο) $x=-3$

αρκει νδο $\boxed{f(x) \geq f(-3)}$

$$\frac{6x}{x^2+9} \geq \frac{6\cdot(-3)}{(-3)^2+9} \Leftrightarrow \frac{6x}{x^2+9} \geq \frac{\cancel{-18}}{\cancel{18}}$$

$$\frac{6x}{x^2+9} \geq -1 \Rightarrow 6x \geq -(x^2+9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x \geq -x^2-9 \Rightarrow x^2+6x+9 \geq 0$$

$$(x+3)^2 \geq 0 \checkmark$$

→ Για να δειξω οτι η $f(x)$ εχει μεγιστο στο 3

$$\boxed{\text{Αρκει νδο} \quad f(x) \le f(3)}$$

$$\frac{6x}{x^2+9} \le \frac{18}{18}$$

$$\frac{6x}{x^2+9} \le 1$$

$$6x \le x^2+9$$

$$0 \le x^2-6x+9$$

$$0 \le (x-3)^2$$

extra tip

Αν ηθελα νδο η $f(x)$ παρουσιαζει μεγιστο το $\underline{1}$

$$\boxed{\text{Αρκει νδο } f(x) \leq 1}$$

$$\frac{6x}{x^2+9} \leq 1$$

$$6x \leq x^2+9$$

$$0 \leq x^2-6x+9$$

$$0 \leq (x-3)^2$$

Ασκηση 3

Εστω $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{5-x}$

Να βρεθει η μονοτονια και τα ακροτατα της f.

Πρεπει $x-2 \geq 0$ και $5-x \geq 0$

$x \geq 2$ $\quad$ $x \leq 5$

$$A_f = [2, 5]$$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \sqrt{x_1-2} < \sqrt{x_2-2}$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 5 - x_1 > 5 - x_2$

$$\sqrt{5-x_1} > \sqrt{5-x_2}$$

$+$

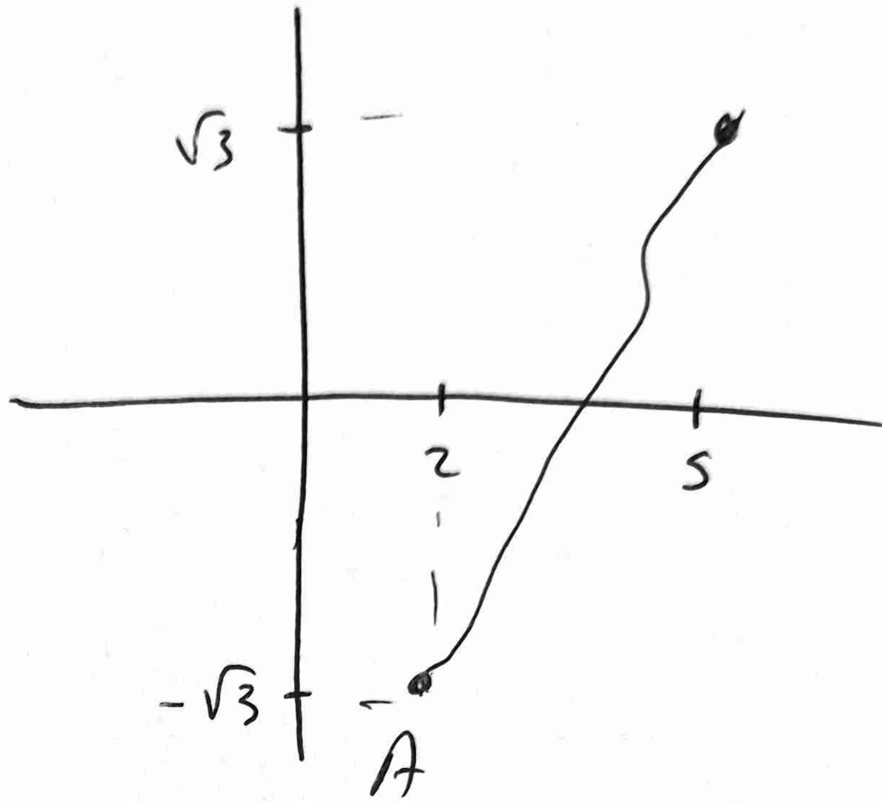
$$-\sqrt{5-x_1} < -\sqrt{5-x_2}$$

$$\sqrt{x_1-2} - \sqrt{5-x_1} < \sqrt{x_2-2} - \sqrt{5-x_2}$$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad f \nearrow$$

$f(2) = -\sqrt{3}$

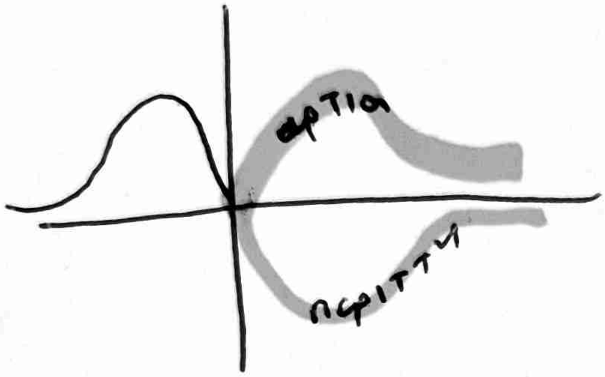
$f(5) = \sqrt{3}$



$A(2, -\sqrt{3})$ O.E

$B(5, \sqrt{3})$ O.M.

Ασκηση 4



Ασκηση 5

Αρτια ή περιττη απο τυπο

ⓐ $f(x) = 5x^2 + 2$

$D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = 5\cdot(-x)^2 + 2 = 5x^2 + 2 = f(x)$

f αρτια.

ⓑ $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$

Πρεπει $x^2 - 1 \neq 0$

$x^2 \neq 1$

$x \neq 1 \quad x \neq -1$

$A_f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 2(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3 + 2x}{x^2 - 1} =$$

$$= -\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1} = -f(x)$$

περιττη

(γ) $f(x) = \dfrac{x-1}{|x|}$

$A_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$f(-x) = \frac{-x-1}{|-x|} = \frac{-x-1}{|x|} = -\frac{x+1}{|x|}$$

ούτε άρτια

ούτε περιττή.

(δ) $f(x) = \dfrac{|x|}{x-1}$

$A_f = \mathbb{R} - \{1\}$

Το πεδίο ορισμού δεν είναι

συμμετρικό άρα δεν είναι

ούτε άρτια ούτε περιττή.

(ε) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}$

$A_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

$$f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}-\frac{-x+1}{-x-1}=$$

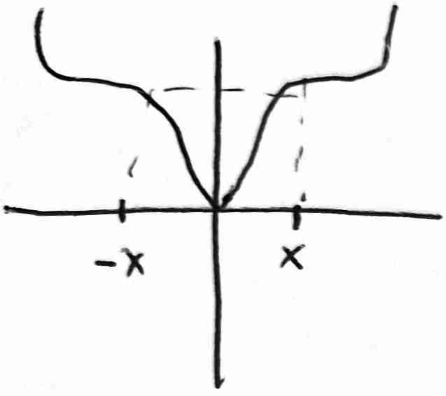
$$=\frac{-(x+1)}{-(x-1)}-\frac{-(x-1)}{-(x+1)}$$

$$=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=$$

$$=-\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$=-f(x)$ περιττή

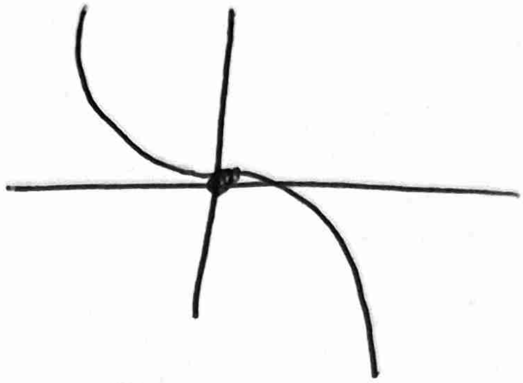
Αρτια



Ειναι συμμετρικη ως προς τον y'y

$$f(x) = f(-x)$$

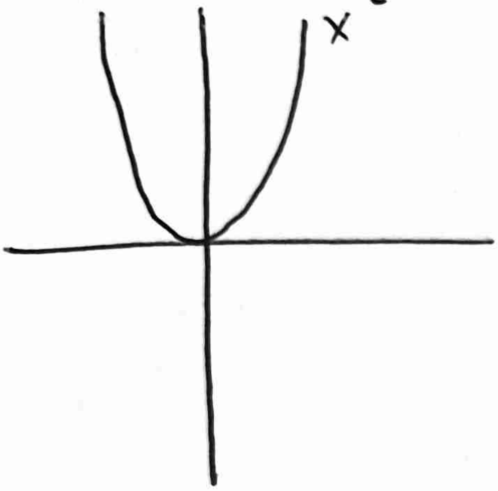
Περιττη



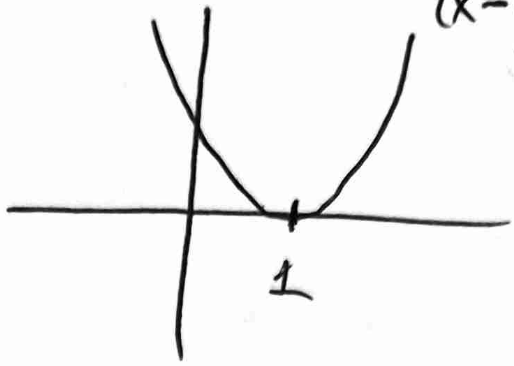
Εχω κεντρο συμμετριας την αρχη των αξονων

$$-f(x) = f(-x)$$

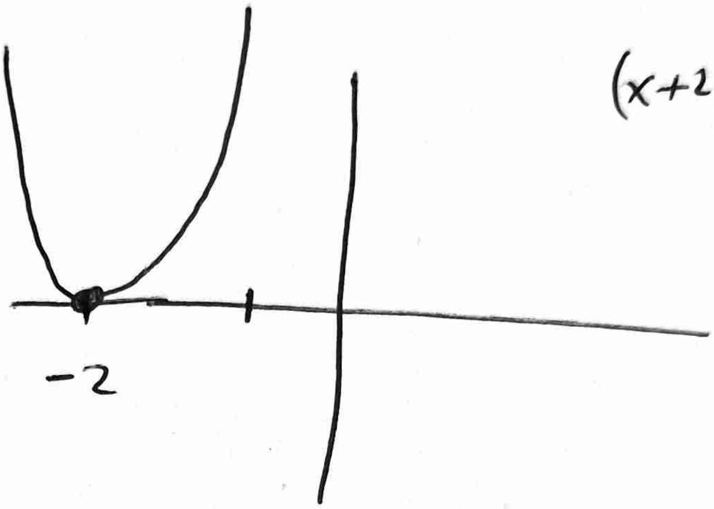
x^2



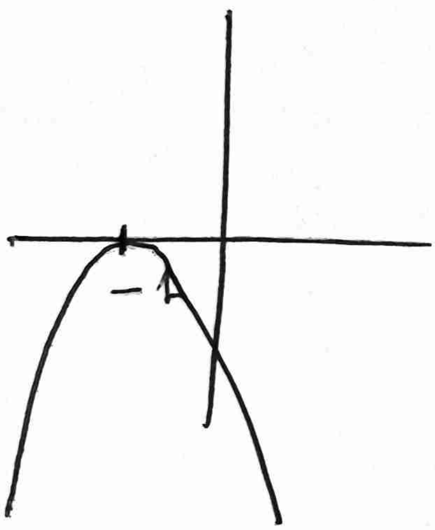
$(x-1)^2$



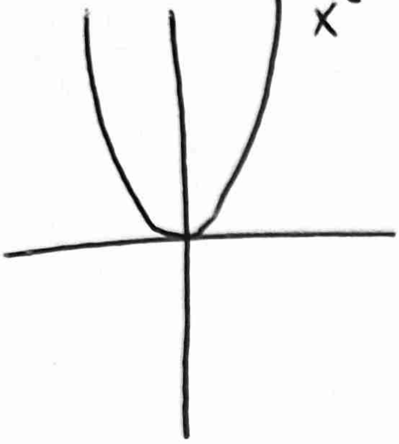
$(x+2)^2$

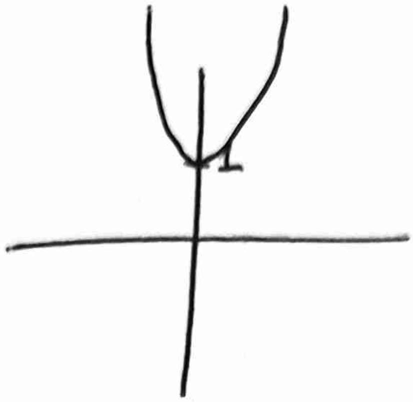


$-(x+1)^2$



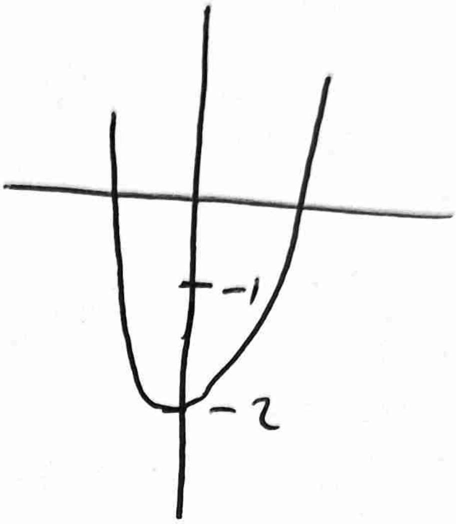
x^2

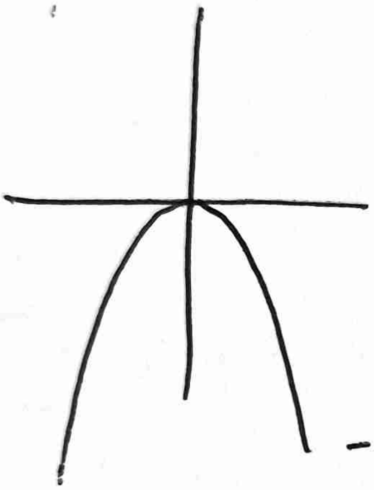




x^2+1

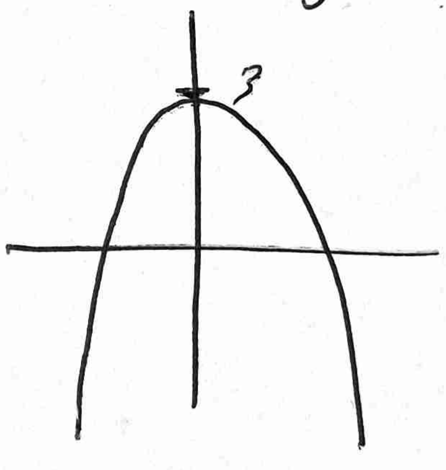
x^2-2





$-x^2$

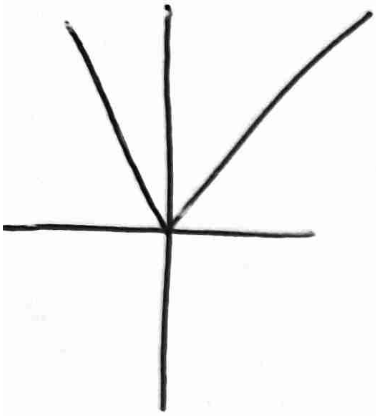
$3-x^2$



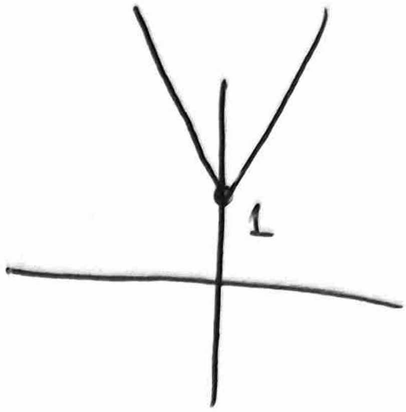
κατακόρυφη

μετατόπιση.

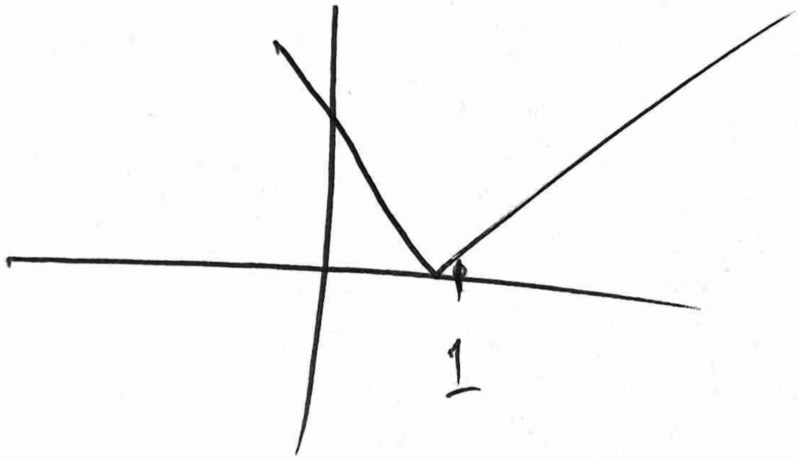
$|x|$



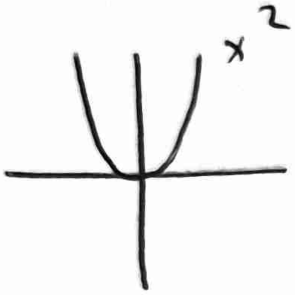
$|x|+1$

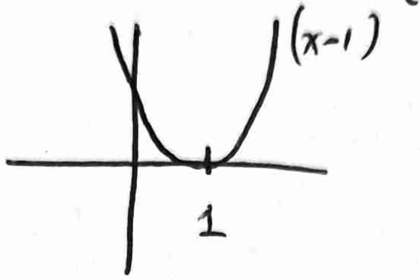


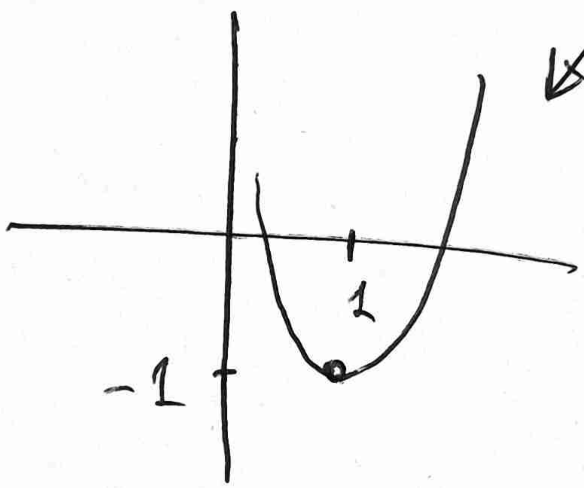
$|x-1|$



$$f(x) = (x-1)^2 - 1$$







Επομενο Μαθημα

$\dfrac{6}{3}$ $\qquad$ $\dfrac{7}{1}$

7.