

# Συναρτήσεις

## Άσκηση 1

Να βρείτε и μονοτονία των συναρτήσεων

α)  $f(x) = 1 - 2\sqrt{1-3x}$

β)  $f(x) = x^3 - \sqrt{-x} - x^2$

Λύση

α)  $f(x) = 1 - 2\sqrt{1-3x}$

Πρέπει  $1-3x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 3x \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$

$$A_f = (-\infty, \frac{1}{3}]$$

•  $x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow 1-3x_1 > 1-3x_2$

$$\sqrt{1-3x_1} > \sqrt{1-3x_2}$$

$$-2\sqrt{1-3x_1} < -2\sqrt{1-3x_2}$$

$f \nearrow$

$$1 - 2\sqrt{1-3x_1} < 1 - 2\sqrt{1-3x_2}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

ⓑ

$$f(x) = x^3 - \sqrt{-x} - x^2$$

$$\text{прому } -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$A_f = (-\infty, 0]$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow \underline{x_1^3 < x_2^3}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow \sqrt{-x_1} > \sqrt{-x_2}$$

$$\underline{-\sqrt{-x_1} < -\sqrt{-x_2}}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$$

$$\Rightarrow \underline{-x_1^2 < -x_2^2}$$

⊕

$$x_1^3 - \sqrt{-x_1} - x_1^2 < x_2^3 - \sqrt{-x_2} - x_2^2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$f \nearrow$

## Άσκηση 2

Να βρω τα ακρότατα.

(α)  $f(x) = 6 - 2x^4$

(β)  $f(x) = -\frac{3}{\sqrt{2-x} + 1}$

Λύση

(α) Ισχύει ότι  $x^4 \geq 0$

$$-2x^4 \leq 0$$

$$6 - 2x^4 \leq 6$$

$$\underline{f(x) \leq 6}$$

$$\rightarrow f(x) = 6 \Rightarrow \cancel{6 - 2x^4 = 6}$$

$$-2x^4 = 0$$

$$x^4 = 0$$

$$x = 0$$

$A(0, 6)$  Ολικό μέγιστο.

③ Пусть  $2-x \geq 0$  или  $x \leq 2$

$$A_f = (-\infty, 2]$$

$$\bullet \sqrt{2-x} \geq 0$$

$$\sqrt{2-x} + 1 \geq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2-x} + 1} \leq 1$$

$$\frac{3}{\sqrt{2-x} + 1} \leq 3$$

$$-\frac{3}{\sqrt{2-x} + 1} \geq -3$$

$$\underline{f(x) \geq -3}$$

$$A(2, -3)$$

$$0 \in$$

$$f(x) = -3 \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{2-x} + 1} = -3$$

$$-3 = -3(\sqrt{2-x} + 1) \Rightarrow \cancel{1} = \sqrt{2-x} + \cancel{1} \Rightarrow 0 = \sqrt{2-x}$$

$x=2$

# Άσκηση 3

Έστω  $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{5-x}$

Να μελετήσουμε τη  $f(x)$  ως προς  
τη μονotonία και τα ακρότατά της.

Πρέπει  $x-2 \geq 0$  και  $5-x \geq 0$   
 $x \geq 2$   $x \leq 5$ .

$$A_f = [2, 5]$$

•  $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \sqrt{x_1 - 2} < \sqrt{x_2 - 2}$

•  $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 5 - x_1 > 5 - x_2 \quad (+)$

$$\sqrt{5-x_1} > \sqrt{5-x_2}$$

∴

$$-\sqrt{5-x_1} < -\sqrt{5-x_2}$$

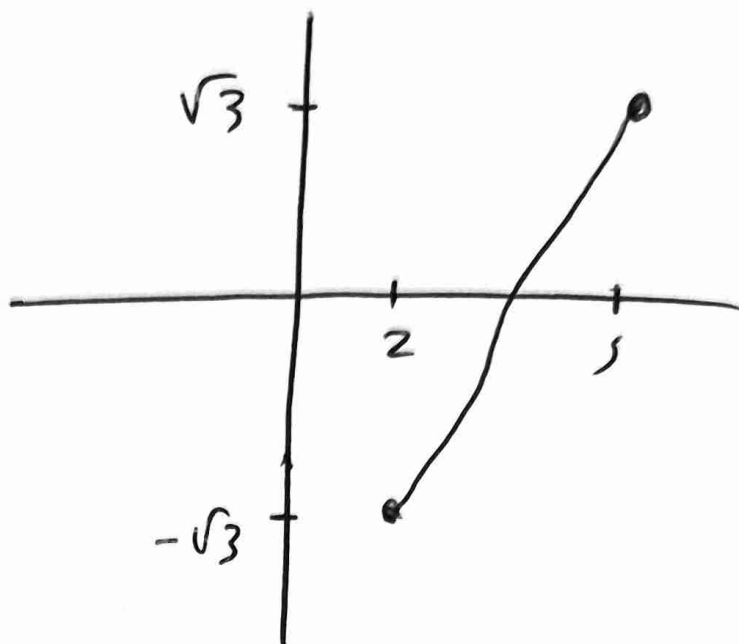
$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$f(2) = -\sqrt{3}$$

$$f(5) = \sqrt{3}$$

$$A(2, -\sqrt{3}) \text{ O. E.}$$

$$B(5, \sqrt{3}) \text{ O. M.}$$



# Άσκηση 4

Να ελέγξετε αν η  $f(x)$  είναι  
άρτια ή περιττή.

$$\textcircled{\alpha} \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-|x|}}$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(x) = \frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3}$$

Λύση

$$\textcircled{\alpha} \quad \text{Πρέπει} \quad 4-|x| > 0 \Rightarrow |x| < 4$$

$$-4 < x < 4$$

$$x \in (-4, 4)$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{4-|-x|}} = \frac{x^2}{\sqrt{4-|x|}} = f(x) \quad \text{άρτια.}$$

• (B). При  $x-3 \neq 0$  и  $x+3 \neq 0$   
 $x \neq 3$   $x \neq -3$

$$A_f = \mathbb{R} - \{3, -3\}.$$

$$f(-x) = \frac{-x+3}{-x-3} - \frac{-x-3}{-x+3} = \frac{-(x-3)}{-(x+3)} - \frac{-(x+3)}{-(x-3)} =$$

$$= \frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = - \left( \frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \right)$$

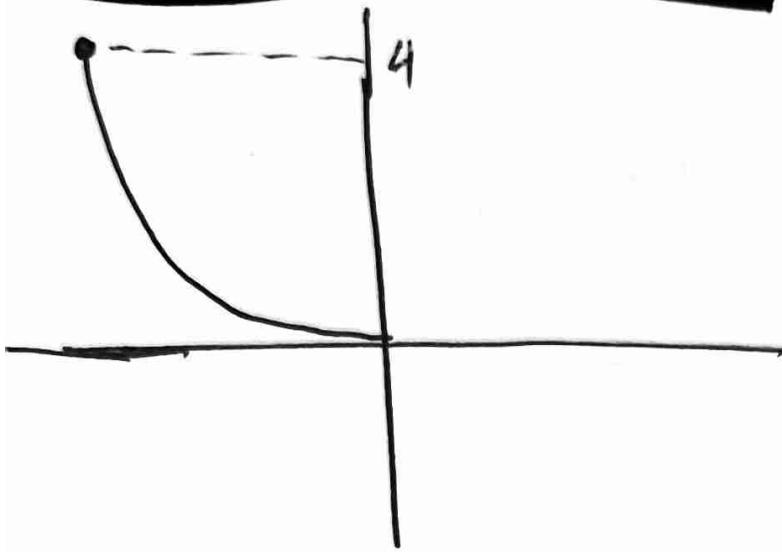
$$= -f(x) \quad \text{асп.тн.}$$



# Άσκηση 5

$$f: [a^2 - 3a, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  αρχα .



(α) Βρεί το  $a$ .

(β) Συμπληρώσε το σχήμα.

(γ) Μονοτονία ακρότατα

(δ) Συγκρίνε το  $f\left(\frac{1}{2025}\right)$  και  $f\left(\frac{1}{2026}\right)$

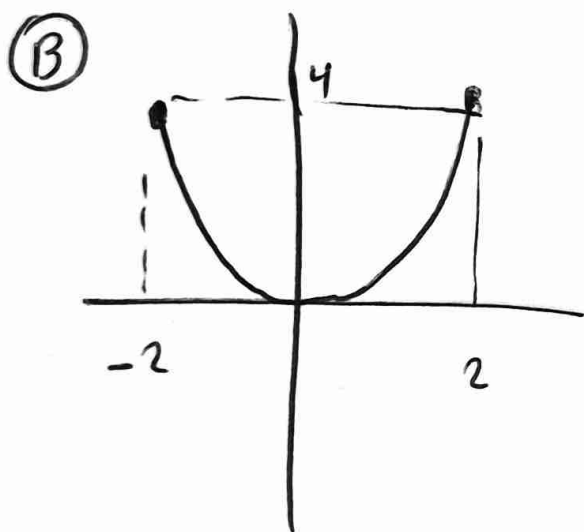
Λύση

α) Από η  $f$  ορτια το πλαιο ορισμω ται  
είμαι συμμετρικο  $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

πρην  $a^2 - 3a = -2$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$a=1, a=2$$



γ) Η  $f$  γν. γθιναισα αν  $x \in [-2, 0]$

Η  $f$  γν. αντιστα αν  $x \in [0, 2]$

Το  $A(0, 0)$  Ο.Ε

Το  $B(-2, 4)$  και  $\Gamma(2, 4)$  Ο.Μ.

$$\textcircled{8} \quad \frac{1}{2025} > \frac{1}{2026} \quad \in (0, 1) \quad f \nearrow$$

$f \nearrow$

$$f\left(\frac{1}{2025}\right) > f\left(\frac{1}{2026}\right).$$

## Άσκηση 6

Εστω  $f$  γραμμική συνάρτηση η οποία διέρχεται από το  $A(7,3)$  και τέμνει τον  $y'y$  σε σημείο με τεταγμένη 5.

(α) Βρει την συνάρτηση.

(β) Βρει το πρόσημο της παραστάσεως

$$A = \frac{f(2\sqrt{3}) - f(3\sqrt{2})}{f(-1) - 5}$$

(γ) Να λοθάρ οι ανισώσεις.

i)  $f(12x+11) > 3$

ii)  $f(f(x^2+6x)-3) < 5$ .

(δ) Αν  $0 < k < 2$  να γραφεί σε φθίνουσα σειρά του/ αριθμού/.

$$f(2), f\left(\frac{k+2}{2}\right), 5, f(k), f(k-2).$$

Аууу

(a) Аууу n f rv. pozorn  $\Rightarrow f \downarrow$  n' f  $\uparrow$

$$A(7,3)$$

$$f(7)=3$$

$$B(0,5)$$

$$f(0)=5$$

$$7 > 0$$

( $\Rightarrow$ )

$$f(7) < f(0)$$

$$\parallel$$
  
$$3$$

$$\parallel$$
  
$$5$$

$f \downarrow$

(b)  $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$

$f \downarrow$

$$f(2\sqrt{3}) > f(3\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \underline{f(2\sqrt{3}) - f(3\sqrt{2}) > 0}$$

$$-1 < 0$$

$f \downarrow$

$$f(-1) > f(0)$$

$$f(-1) > 5$$

$$\underline{f(-1) - 5 > 0}$$

$$A = \frac{\textcircled{+}}{\textcircled{+}} > 0.$$

$$\textcircled{r} \quad i) \quad f(12x+1) > 3$$

$$f(12x+1) > f(7)$$

$$f \downarrow$$

$$|2x+1| < 7$$

$$-7 < 2x+1 < 7$$

$$-8 < 2x < 6$$

$$\boxed{-4 < x < 3}$$

$$ii). \quad f(f(x^2+6x)-3) < 5$$

$$f(f(x^2+6x)-3) < f(0)$$

$$f \downarrow$$

$$f(x^2+6x)-3 > 0$$

$$f(x^2+6x) > 3$$

$$f(x^2+6x) > f(7)$$

$$x^2 + 6x < 7$$

$$x^2 + 6x - 7 < 0$$

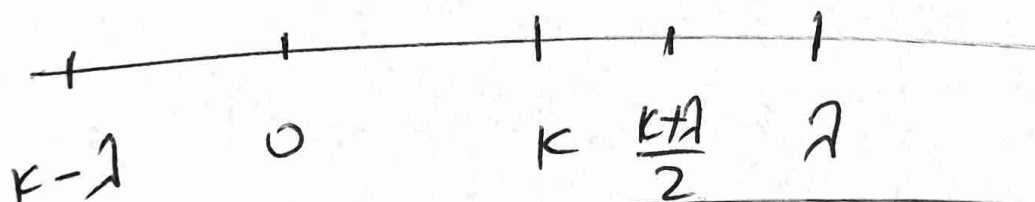
| x              | -7 | 1     |
|----------------|----|-------|
| $x^2 + 6x - 7$ | +  | - / + |

$$x \in (-7, 1)$$

⑧  $1, \frac{k+1}{2}, 0, k, k-1$

$$0 < k < 1$$

$$k-1 < 0$$



$$k-1 < 0 < k < \frac{k+1}{2} < 1$$

$\downarrow$

$$f(k-1) > f(0) > f(k) > f\left(\frac{k+1}{2}\right) > f(1)$$