1.

Έστω $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$, $x>2$

και $g(x)=\frac{1}{x}$, $x>1$.

- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x-1}{x-2}-\frac{1}{x}$

$D_{f-g}=D_f \cap D_g=(2,+\infty)$

- $\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x-2}}=\frac{x-2}{x(x-1)}$

$D_{g/f}=(2,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$

$\Rightarrow \frac{x-1}{x-2}\neq 0$ $\Rightarrow x-1\neq 0$

$x\neq 1$

- $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}-2}=$

$=\frac{1-x}{1-2x}$

$x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$

$x>1$ και $\frac{1}{x}>2$

Άτοπο!

Δεν ορίζεται η $f\circ g$.

$\frac{1}{x}-2>0$

$1>2x$

$\frac{1}{2}>x$

2. $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$, $x>0$

Να δ.ο η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρεθεί ο τύπος της $f^{-1}(x)$

Έστω $f(x_1) = f(x_2)$

$$e^{\frac{x_1-1}{x_1}} = e^{\frac{x_2-1}{x_2}}$$

$$\frac{x_1-1}{x_1} = \frac{x_2-1}{x_2}$$

$$x_2(x_1-1) = (x_2-1)x_1$$

$$x_2x_1 - x_2 = x_2x_1 - x_1$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ 1-1}$$

$$y = e^{\frac{x-1}{x}}, y>0$$

$$\ln y = \ln e^{\frac{x-1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{x-1}{x}$$

$$x\ln y = x-1$$

$$x\ln y - x = -1$$

$$x(\ln y - 1) = -1$$

$$x = \frac{-1}{\ln y - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-1}{\ln x - 1}$$

$D_{f^{-1}} = (0, e)$.

при $\ln y - 1 \neq 0$

$\ln y \neq 1$

$e^{\ln y} \neq e^1$

$y \neq e$

Орл $x > 0$

$$\frac{-1}{\ln y - 1} > 0$$

$\ln y - 1 < 0$

$\ln y < 1$

$e^{\ln y} < e^1$

$y < e$

3. $f(x) = x^2 - 4x + 4$, $x \geq 2$

Νδο η $f(x)$ αντιστρέφεται

και να βρεθεί την $f^{-1}(x)$.

$$f(x) = (x-2)^2$$

• $x_1 < x_2 \rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$

$(x_1-2)^2 < (x_2-2)^2$

$f(x_1) < f(x_2)$

$1-1$

$x \geq 2$

$\sqrt{y} + 2 \geq 2$

$\sqrt{y} \geq 0$ ✓

$y = (x-2)^2$ $\quad y \geq 0$

$\sqrt{y}^2 = (x-2)^2$

$|\sqrt{y}| = |x-2|$ (+) (+)

$\sqrt{y} = x-2$ $\quad x = \sqrt{y} + 2$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$

$D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

4

Δίνεται $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

• (α) Σωστό Τέρμα.

(β) Νδο η εξίσωση $x = e^{\frac{1}{x}}$ εχει μοναδική θετική ρίζη.

(α) $D_f = (0, +\infty)$

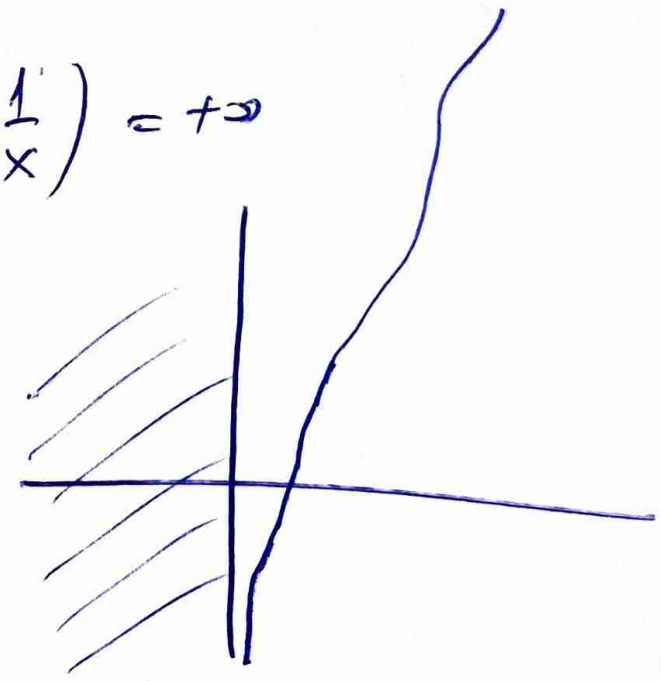
• $x_1 < x_2 \rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ (f) f ↗

• $x_1 < x_2 \rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = -\infty - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$\Sigma T_f = \mathbb{R}$.



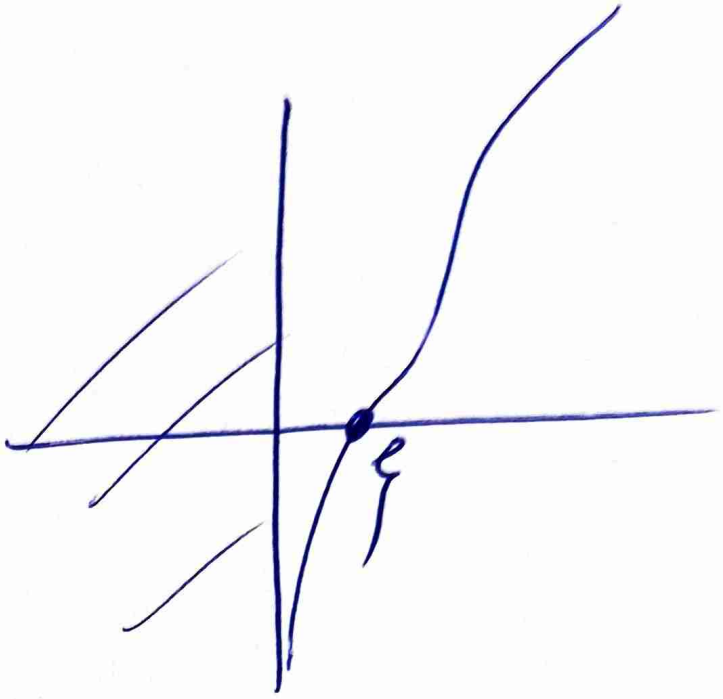
$$x = e^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln x = \ln e^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\ln x - \frac{1}{x} = 0$$

$f(x) = 0$.



- f συνεχής
- $f \uparrow$
- $\Sigma_f = \mathbb{R}$

Το $0 \in \Sigma_f$ άρα

$\exists\, \xi > 0$ τ.ω $f(\xi) = 0$

5 ∈ σταθ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. συνεχ.

$\exists \xi \in \mathbb{R}$ τ.ω $7f(\xi) = 3f(2026) + 4f(2027)$.

Αφού f συνεχ στο $\mathbb{R}$

είναι και στο $[2026, 2027]$

οπότε $\exists M \in T$

$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [2026, 2027]$

$m \le f(2026) \le M \Rightarrow 3m \le 3f(2026) \le 3M$

$m \le f(2027) \le M \Rightarrow 4m \le 4f(2027) \le 4M$ } (+)

$7m \le 3f(2026) + 4f(2027) \le 7M$

$m \le \frac{3f(2026) + 4f(2027)}{7} \le M.$

Ο αριθμός $\frac{3f(2026)+4f(2027)}{7}$

ανήκει στο σύνολο τιμών της $f(x)$ διότι στο

$[m, M]$

άρα $\exists\, \xi \in [2026, 2027)$

τ.ω $f(\xi) = \frac{3f(2026)+4f(2027)}{7}$

$7f(\xi) = 3f(2026) + 4f(2027)$

6. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και $f(x)\neq 0$.

Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2x}{x^2-4}=2$

(α) Νδο $f(x)>0$.

(β) Νδο $\exists\,\xi\in(-1,1)$ τ.ω

$$\xi^2+\xi f(\xi)=1.$$

(α) Αφού f συνεχής και $f(x)\neq 0$

τότε $f(x)>0$ ή $f(x)<0$.

$$g(x)=\frac{f(x)-2x}{x^2-4} \Rightarrow \boxed{g(x)(x^2-4)+2x=f(x)}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} g(x)(x^2-4)+2x$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=2\cdot 0+4 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=4$$

f συνεχής $\underline{f(2)=4}$

Αφού $f(2)=4 \Rightarrow f(x)>0$

(B) $\xi^2 + \xi f(\xi) = 1$

$x^2 + x f(x) = 1$

$\underbrace{x^2 + x f(x) - 1 = 0}$

$h(x)$

Η $h(x)$ συνεχής στο $[-1,1]$ ως π.σ.

$h(-1) = 1 - f(-1) - 1 = -f(-1) < 0$

(+)

$h(1) = f(1) > 0$

(+)

$h(-1)h(1) < 0$ ✓

7. $\in$ στω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή.

και $(x-1) f(x) = \sqrt{x+3} - 2$

Να βρεθεί ο τυπος της $f(x)$

Για $x \neq 1$ το $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}, & x \neq 1 \\ \dfrac{1}{4}, & x = 1 \end{cases}$$

8. Έστω $f: (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$

η οποία διέρχεται από το

σημείο $A(-3, 5)$

και $f^2(x) = x^2 - 4x + 4$.

Βρείτε τον $f(x)$.

$$f^2(x) = (x-2)^2$$

$$|f(x)| = |\overset{(-)}{x-2}|$$

$$|f(x)| = -x+2$$

$f(x) = 2 - x$

Τύπος $f(x)$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$-x+2 = 0$

$x = 2$

x	2
$f(x)$	$+$ ∅ ///

$f(-3) = 5$

9. Δίνεται $f(x)=\sqrt{x-4}\sqrt{x+4}$

και $g(x)=\sqrt{x^2-16}$.

Να εξεταστεί αν είναι ίσες.

D_f

$x-4\geq 0$ και $x+4\geq 0$

$x\geq 4$ $\quad$ $x\geq -4$

$D_f=[4,+\infty)$

D_g

$x^2-16\geq 0$

x		-4		4
x^2-16	+	0	−	0	+

$x\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

$f(x)=\sqrt{x-4}\sqrt{x+4}=\sqrt{(x-4)(x+4)}$

$=\sqrt{x^2-16}=g(x)$

Ίσες μόνο στο $[4,+\infty)$