1. Αν $2\cdot[5(a-3)-2(a-9)]<-3(1-a)$

τότε $a<-3$

$2[5a-15-2a+18]<-3+3a$.

$2[3a+3]<3a-3$

$6a+6<3a-3$

$6a-3a<-9$

$3a<-9$

$a<-3$

Που ισχύει!

2. Αν $\alpha < 3 < \beta$ νδο $\alpha\beta + 9 < 3(\alpha + \beta)$

$$\alpha\beta + 9 < 3\alpha + 3\beta$$

$$\underbrace{\alpha\beta + 9 - 3\alpha - 3\beta}_{} < 0$$

$$\alpha(\beta - 3) - 3(\beta - 3) < 0$$

$$(\beta - 3)(\alpha - 3) < 0 \quad \checkmark$$

(+) (−)

- $3 < \beta \Rightarrow 0 < \beta - 3$
- $\alpha < 3 \Rightarrow \alpha - 3 < 0$

3. Av $\alpha < -2 < \beta$

vsо $\alpha^2 - 2\beta > \alpha(\beta - 2)$

$\alpha^2 - 2\beta > \alpha\beta - 2\alpha$

$\alpha^2 - 2\beta - \alpha\beta + 2\alpha > 0$

$\alpha(\alpha - \beta) + 2(\alpha - \beta) > 0$

$(\alpha \overset{\ominus}{-} \beta)(\alpha \overset{\ominus}{+} 2) > 0$

- $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha - \beta < 0$
- $\alpha < -2 \Rightarrow \alpha + 2 < 0$

4. Αν α, β θετικοί τότε

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$$

$$\alpha\beta \frac{\alpha}{\beta} + \alpha\beta \frac{\beta}{\alpha} \geq 2\alpha\beta$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$$

$$(\alpha - \beta)^2 \geq 0.$$

5. Να δ.ο $\alpha^2+\beta^2-2(\alpha-\beta)+2\geq 0$

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha+2\beta+2\geq 0$$

$$\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2+2\beta+1\geq 0$$

$$(\alpha-1)^2+(\beta+1)^2\geq 0$$ ✓

6. Να δ.ο $2\alpha^2+\beta^2+9\geq 2\alpha(3-\beta)$

$$2\alpha^2+\beta^2+9\geq 6\alpha-2\alpha\beta$$

$$2\alpha^2+\beta^2+9-6\alpha+2\alpha\beta\geq 0$$

$$\alpha^2-6\alpha+9+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\geq 0$$

$$(\alpha-3)^2+(\alpha+\beta)^2\geq 0.$$

Τραπεζα

Θεματων

SOS

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y)=9xy\,.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2=0$

(Μονάδες 8)

ii. $y=\frac{x}{2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

(Μονάδες 12)

(α) i) $(x+4y)(x+y)=9xy$

$x^2+xy+4xy+4y^2=9xy$

$x^2+5xy-9xy+4y^2=0$

$x^2-4xy+4y^2=0$

$\boxed{(x-2y)^2=0}$

ii) $x-2y=0 \Rightarrow x=2y \Rightarrow \boxed{y=\frac{x}{2}}$

(β) ΝΔΟ $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$

$(2y-y)^2+(2y+y)^2=10y^2$

$y^2+(3y)^2=10y^2$

$y^2+9y^2=10y^2$ ✓

SOS

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να δείξετε ότι $y=2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y=2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

(α) $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

$4x+5y=-2(x-4y)$

$4x+5y=-2x+8y$

$4x+2x=8y-5y$

$6x=3y$

$\boxed{2x=y}$

(β) $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$

$A=\frac{2x^2+3\cdot(2x)^2+x\cdot 2x}{x\cdot 2x}=\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}$

$A=\frac{16x^2}{2x^2}$ $\boxed{A=8}$

505

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2 = x^2+y^2-2x+6y+10.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y, ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$.

(Μονάδες 13)

(α) $(x-1)^2+(y+3)^2 = x^2+y^2-2x+6y+10$

$x^2-2x+1+y^2+6y+9 = x^2+y^2-2x+6y+10$

$0=0$

(β) $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2=0$

$x-1=0$ και $y+3=0$

$x=1$ $\quad$ $y=-3$

Σημαντική ιδιότητα

$$\alpha^2+\beta^2=0$$

$\Rightarrow$

$\alpha=0$ και $\beta=0$.

SOS.

ΘΕΜΑ 2

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

(α) $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$

$A = 2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2$

$A = 2x^2 + 4xy + 2y^2 - x^2 + 2xy - y^2 - 6xy - y^2$

$A = x^2$

(β) $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$

$B = 2 \cdot (2021+1)^2 - (2021-1)^2 - 6 \cdot 2021 - 1^2$

$B = 2021^2$

→ $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$

→ $\alpha\beta \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta+\gamma=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0.$$

(Μονάδες 13)

(α) $\alpha+\beta+\gamma=0$

i) $\beta+\gamma=-\alpha$ ✓

ii) $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} = \frac{\alpha^2}{-\alpha} = -\alpha$

(β) $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$ $\quad \frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=-\beta$ $\quad \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=-\gamma$

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} = -\alpha-\beta-\gamma = -(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$= 0$$

✓

SOS

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, **τότε να αποδείξετε ότι:**

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 13)

(α) $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$

$\cancel{\alpha}\cdot\frac{1}{\cancel{\alpha}}+\alpha\cdot\frac{1}{\beta}+\beta\cdot\frac{1}{\alpha}+\cancel{\beta}\cdot\frac{1}{\cancel{\beta}}=4$

$1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1=4$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$$

(β) $\alpha\beta\frac{\alpha}{\cancel{\beta}}+\cancel{\alpha}\beta\frac{\beta}{\cancel{\alpha}}=2\alpha\beta$

$\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$

$(\alpha-\beta)^2=0$

$\alpha-\beta=0$

$\alpha=\beta$

SOS

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

α ≠ β

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

(Μονάδες 9)

(α) i) $\alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha + \beta - (2\beta + \alpha)$

$\alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha + \beta - 2\beta - \alpha$

$\boxed{\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta}$

ii) $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$

$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha - \beta$

$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) = 0$

$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1) = 0$

$\alpha - \beta = 0$ ή $\alpha + \beta - 1 = 0$

$\alpha = \beta$ $\alpha + \beta = 1$

Άτοπο!

(β) $A = \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha + \beta + 2\beta + \alpha = 3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta)$

$3 \cdot 1 = 3$

505

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

(α) $(x-2y)^2 - 2(3-2xy) = 5y^2 - 1$

$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6 + 4xy - 5y^2 + 1 = 0$

$x^2 - y^2 - 5 = 0$

$x^2 - y^2 = 5$

(β) $(x+y)^3(x-y)^3$

$[(x+y)(x-y)]^3$

$(x^2-y^2)^3$

5^3

$125.$

SOS

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$

(Μονάδες 15)

(α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Rightarrow \alpha+\beta=4\beta \Rightarrow \underline{\alpha=3\beta}$

$\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Rightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Rightarrow \underline{5\gamma=\delta}$

(β) $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{\beta\cdot 5\cdot\gamma-\beta\gamma}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}$

$=1.$

Σχολικο (Σελ 52)

1. $A=\left[(x^2y^3)^{-2}\cdot(xy^2)^4\right]:\left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$

i) Νδο $A=x^9y^9$

$$A=\left[\left(x^{-4}y^{-6}\cdot x^4y^{12}\right):\frac{x^{-9}}{y^3}\right.$$

$$A=\left[\left(x^0y^6\right):\frac{x^{-9}}{y^3}\right]$$

$$A=\left[y^6\cdot\frac{y^3}{x^{-9}}\right]$$

$$A=\frac{y^6}{1}\cdot\frac{y^3}{x^{-9}}=\frac{y^9}{x^{-9}}=y^9x^9$$

ii) Για $x=2010$ και $y=\frac{1}{2010}$

$$A=x^9y^9=(xy)^9=\left(\cancel{2010}\,\frac{1}{\cancel{2010}}\right)^9=1^9=1.$$

2. $A = \left[(xy^{-1})^2 : (x^3 y^7)^{-1} \right]^2$

$x = 0{,}4 \qquad y = -2{,}5$

$A = \left[(x^2 y^{-2}) : (x^{-3} y^{-7}) \right]^2$

$A = (x^5 y^5)^2$

$A = x^{10} y^{10} = (xy)^{10}$

$A = \left[0{,}4 \cdot (-2{,}5) \right]^{10}$

$A = (-1)^{10} = 1.$

3. (i) $1001^2 - 999^2 =$

$= (1001 - 999)(1001 + 999) = 2 \cdot 2000 = 4000$

(ii) $99 \cdot 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1$
$= 9999$

(iii) $\dfrac{7{,}23^2 - 4{,}23^2}{11{,}46} = \dfrac{(7{,}23 - 4{,}23)(7{,}23 + 4{,}23)}{11{,}46}$

$= \dfrac{3 \cdot 11{,}46}{11{,}46} = 3$

4. i) Nšo $(a+\blacksquare)^2-(a-\blacksquare)^2=4a\blacksquare$

$a^2+2aB+B^2-(a^2-2aB+B^2)=4aB$

$a^2+2aB+B^2-a^2+2aB-B^2=4aB$

$4aB=4aB.$

ii). $\left(\frac{999}{1000}+\frac{1000}{999}\right)^2-\left(\frac{999}{1000}-\frac{1000}{999}\right)^2=$

$=4\cdot\frac{999}{1000}\cdot\frac{1000}{999}$

$=4$

5. (a) Nšo $a^2 - (a-1)(a+1) = 1$

$a^2 - (a^2 - 1) = 1$

$a^2 - a^2 + 1 = 1$

$1 = 1$ ✓

(b) $1,3265^2 - 0,3265 \cdot 2,3265 =$

$= 1,3265^2 - (1,3265 - 1) \cdot (1 + 1,3265) =$

$= \underline{1}.$

6. Νδο η διαφορα των τετραγωνων δυο διαδοχικων φυσικων αριθμων. ισουται με το αθροισμα αυτ.

1ος : x

2ος : $x+1$.

$$(x+1)^2 - x^2 = x+1+x$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

7. $\nu \in \mathbb{N}$

Να δείξετε ότι $2^{\nu} + 2^{\nu+1} + 2^{\nu+2}$ πολλαπλάσιο του 7.

$$2^{\nu} + 2^{\nu+1} + 2^{\nu+2} =$$

$$= 2^{\nu} + 2^{\nu} \cdot 2^{1} + 2^{\nu} \cdot 2^{2} =$$

$$= 2^{\nu} + 2 \cdot 2^{\nu} + 4 \cdot 2^{\nu}$$

$$= 7 \cdot 2^{\nu}$$ πολλαπλάσιο του 7.

$$a^{\nu} \cdot a^{\rho} = a^{\nu+\rho}$$

Β' ομαδα

1. i) $\frac{a^3-2a^2+a}{a^2-a} = \frac{a(a^2-2a+1)}{a(a-1)} = \frac{(a-1)^2}{a-1}$

$= a-1$

ii) $\frac{(a^2-a)+2a-2}{a^2-1} = \frac{a(a-1)+2(a-1)}{(a-1)(a+1)}$

$= \frac{(a-1)(a+2)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a+2}{a+1}$

2. i) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 \frac{a^3+a^2}{(a+1)^3} = \left(\frac{a}{1}-\frac{1}{a}\right)^2 \frac{a^2(a+1)}{(a+1)^3}$

$= \left(\frac{a^2}{a}-\frac{1}{a}\right)^2 \frac{a^2}{(a+1)^2} = \left(\frac{a^2-1}{a}\right)^2 \frac{a^2}{(a+1)^2}$

$= \left(\frac{(a-1)(a+1)}{a}\right)^2 \frac{a^2}{(a+1)^2} = \frac{(a-1)^2(a+1)^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{(a+1)^2}$

$= (a-1)^2$

2. ii) $\dfrac{a^2+a+1}{a+1} \cdot \dfrac{a^2-1}{a^3-1} =$

$= \dfrac{a^2+a+1}{a+1} \cdot \dfrac{(a-1)(a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)} = 1$

3. i) $(x+y)^2 \cdot (x^{-1}+y^{-1})^{-2} =$

$= (x+y)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^{-2}$

$= (x+y)^2 \cdot \left(\dfrac{y}{xy}+\dfrac{x}{xy}\right)^{-2}$

$= (x+y)^2 \cdot \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^{-2} =$

$= (x+y)^2 \cdot \left(\dfrac{xy}{x+y}\right)^2 = \dfrac{(x+y)^2 \cdot (xy)^2}{(x+y)^2}$

$= x^2y^2.$

11) $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}} =$

$= \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}} =$

$= \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{\frac{y}{xy}-\frac{x}{xy}}{\frac{y^2}{x^2y^2}-\frac{x^2}{x^2y^2}} =$

$= \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{y^2-x^2}{xy}} =$

$= \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{(y-x)xy}{xy(y^2-x^2)} =$

$= \frac{\cancel{x+y}}{x-y} \cdot \frac{\cancel{(y-x)}\ \cancel{xy}}{\cancel{xy}\ \cancel{(y-x)(y+x)}} = \frac{1}{x-y}.$

4. Nδo $\left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right) : \left(\frac{x^2}{x-y} - y\right) = 1$

$$\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)} : \left(\frac{x^2}{x-y} - \frac{y(x-y)}{x-y}\right) = 1$$

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x-y} : \left(\frac{x^2-yx+y^2}{x-y}\right) = 1$$

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x-y} \cdot \frac{x-y}{x^2-yx+y^2} = 1$$

$$1 = 1$$

5. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda$

$\alpha = \lambda\beta$

$\beta = \lambda\gamma \longrightarrow \beta = \lambda \cdot \lambda\alpha$

$\boxed{\gamma = \lambda\alpha}$

$\underline{\beta = \lambda^2\alpha}$

$\alpha = \lambda \cdot \lambda^2\alpha$

$\alpha = \lambda^3\alpha$

$\alpha - \lambda^3 \cdot \alpha = 0$

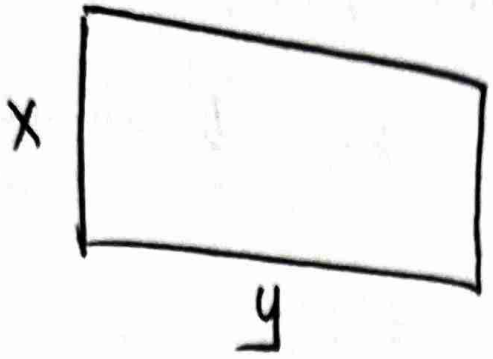
$\alpha(1 - \lambda^3) = 0$

~~$\alpha \neq 0$~~ ; $1 - \lambda^3 = 0$

$\lambda^3 = 1$ $\quad \lambda = 1$

$\alpha = \beta = \gamma$

6.



Περιστρο

$L = 4a$

$E = a^2$

$\Pi = 2x + 2y = 4a$

$x + y = 2a \Rightarrow a = \frac{x+y}{2}$

$E = xy = a^2$

$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

$xy = \frac{(x+y)^2}{4}$

$4xy = (x+y)^2$

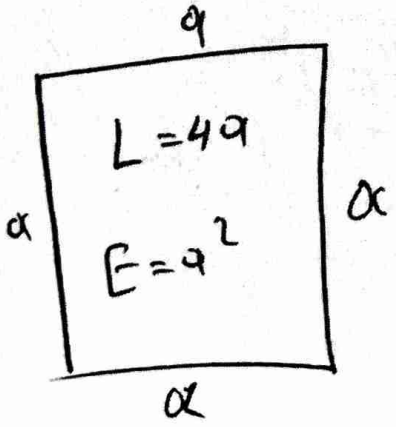
$4xy = x^2 + 2xy + y^2$

$0 = x^2 - 2xy + y^2$

$0 = (x-y)^2$

$0 = x - y$

$x = y$



7. i) Αν ο α είναι ρητός

τότε $\alpha = \frac{k}{\lambda}$ και Β άρρητος

Έστω $\alpha+\beta$ είναι ρητός.

$$\alpha+\beta = \frac{t}{\delta}$$

$$\frac{k}{\lambda} + \beta = \frac{t}{\delta}$$

$$\beta = \frac{t}{\delta} - \frac{k}{\lambda} = \frac{t\lambda - k\delta}{\delta\lambda}$$

$\beta = \frac{t\lambda - k\delta}{\delta\lambda}$ ρητός.

Άτοπο!

Άρα $\alpha+\beta$ άρρητος

Βασική Άσκηση διάταξης

Έστω $1<\alpha<2$ και $2<\beta<3$

1. $\alpha+\beta$

- $1<\alpha<2$
- $2<\beta<3$

$\Big\}\oplus$ $\boxed{3<\alpha+\beta<5}$

2. $3\alpha+2\beta$

- $1<\alpha<2 \Rightarrow 3<3\alpha<6$
- $2<\beta<3 \Rightarrow 4<2\beta<6$

$\Big\}\oplus$

$$\boxed{7<3\alpha+2\beta<12}$$

3. $\frac{1}{\alpha} - 2\beta$

- $1 < \alpha < 2 \Rightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{2} \Rightarrow 1 > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{2}$
- $2 < \beta < 3 \Rightarrow -4 > -2\beta > -6$ ⊕

$$-3 > \frac{1}{\alpha} - 2\beta > \frac{1}{2} - 6$$

$$\boxed{-3 > \frac{1}{\alpha} - 2\beta > -\frac{11}{2}}$$

4. $\alpha - \beta$

- $1 < \alpha < 2 \Rightarrow 2 > \alpha > 1$
- $2 < \beta < 3 \Rightarrow -2 > -\beta > -3$

} ⊕

$$\boxed{0 > \alpha - \beta > -2}$$

5. $\frac{\alpha}{\beta}$

- $1 < \alpha < 2 \Rightarrow 2 > \alpha > 1$
- $2 < \beta < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\beta} > \frac{1}{3}$

$\Big\} \odot$

$$2 \cdot \frac{1}{2} > \alpha \cdot \frac{1}{\beta} > 1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{2} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{3}$$

$$\boxed{1 > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{3}}$$

Βασική Άσκηση διατάξη

Έστω $1 < x < 2$

1. $x^2 - 1$

- $1 < x < 2 \Rightarrow 1^2 < x^2 < 4$

$1 < x^2 < 4$

$1 - 1 < x^2 - 1 < 4 - 1$

$\boxed{0 < x^2 - 1 < 3}$

2. $x^3 - \frac{1}{x}$

- $1 < x < 2 \Rightarrow 1^3 < x^3 < 2^3$

$1 < x^3 < 8$

- $1 < x < 2 \rightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \Rightarrow 1 > \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$

$-1 < -\frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$

(+)

$0 < x^3 - \frac{1}{x} < 8 - \frac{1}{2}$

Συμβολισμοί.

- $\alpha < x < \beta$ ή $x \in (\alpha, \beta)$.
- $\alpha \leq x \leq \beta$ ή $x \in [\alpha, \beta]$
- $\alpha < x \leq \beta$ ή $x \in (\alpha, \beta]$
- $x < \alpha$ ή $x \in (-\infty, \alpha)$
- $x \geqslant \alpha$ ή $x \in [\alpha, +\infty)$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος : Παρασκευή 2/10/26.

Ώρα μαθήματος : 17:30.

Ασκήσεις

Ενότητα 7

8

9

11

12

13 14.

παρατηρήσεις

Πιθανό Σαββατο για Τεστ.

13/10